



Thème : Séries à paramètre



Exercice 1. ♦♦

d'après EMLyon 2005 # RAp2

PARTIE I : Calcul de la somme d'une série convergente

1. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}.$$

On admet dans la suite que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0, \pi]$:

$$\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}.$$

On calcule classiquement cette somme par les nombres complexes (hors-programme). On peut aussi faire une récurrence (voir dernière partie).

2. Soit $u : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties : $\int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$.

3. Soit l'application $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{t^2}{2\sin \frac{t}{2}} - t$ si $t \in]0, \pi]$ et $f(0) = -1$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$

4. a) Montrer : $m \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt$.

- b) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et montrer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On pourra aussi consulter l'exercice 1 de Ecricome 2025 sur le même thème.

📎 PARTIE II : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente

1. a) Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in ([0, +\infty[)^2$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ convergent.

- b) Montrer que, pour tout x de $[0, +\infty[$, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$ converge.

On note S l'application définie, pour tout x de $[0, +\infty[$, par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$.

2. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

3. a) Établir : $\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2$, $S(y) - S(x) = (y-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$.

- b) En déduire : $\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2$, $|S(y) - S(x)| \leq \frac{\pi^2}{6} |y-x|$.

- c) Montrer alors que la fonction S est continue sur $[0, +\infty[$.

4. a) Montrer, pour tout couple (x, y) de $[0, +\infty[^2$ tel que $x \neq y$:

$$\left| \frac{S(y) - S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leq |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

- b) En déduire que la fonction S est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

- c) Préciser les valeurs de $S'(0)$ et $S'(1)$.

5. On admet que S est deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad S''(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+x)^3}.$$

Montrer que S est concave.

6. Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. On note ω la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \omega(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}.$$

- a) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge et calculer sa valeur.
 - b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \omega(n+1) \leq \int_n^{n+1} \varphi(t) dt \leq \omega(n)$, et en déduire : $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt \leq S(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$.
 - c) Conclure que $S(x)$ équivaut à $\ln x$ en $+\infty$.
7. a) Dresser le tableau de variation de S , en précisant la limite de S en $+\infty$.
 b) Tracer l'allure de la courbe représentative de S .

PARTIE III : facultatif, preuve du résultat admis

1. a) Justifier que pour tous réels a et b ,

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b)).$$

- b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sin(\theta) \sum_{k=0}^n \cos(2k\theta) = \sin((n+1)\theta) \cos(n\theta)$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$C_n(\theta) = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad S_n(\theta) = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)^2.$$