



Thème : Intégrales à paramètre



Exercice 1. ♦♦ Exemples d'intégrale de Frullani

CA79

Soit $(a, b) \in]0; +\infty[^2$.

1. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ converge.

2. a) Établir, en utilisant des changements de variable, pour tout $(\varepsilon, X) \in]0; +\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leq X$:

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax}}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y} dy \quad \text{et} \quad \int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-bx}}{x} dx = \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

b) En déduire, pour tout $(\varepsilon, X) \in]0; +\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leq X$:

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

3. a) Montrer que l'application h définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $h(y) = \begin{cases} \frac{1-e^{-y}}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

b) En déduire : $\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{b}{a}$.

c) Établir : $\forall X \in]0; +\infty[, \int_0^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy$.

d) En déduire : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a}$.

4. *Facultatif.* Adapter le raisonnement pour établir : $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(bx) - \arctan(ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$.

» ♦♦ On pourra aussi regarder EML 2004, voie S pour d'autres intégrales à paramètres.

Exercice 2. ♦ 📄 Dérivation d'une intégrale à paramètre

CPV14

On considère les fonctions f , définie sur $\mathcal{F} = [0, +\infty[\times [0, +\infty[$ et g , définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x, t) = e^{-t^2 \sqrt{1+xt}} \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt.$$

1. a) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2} dt$ est convergente.

b) En déduire que la fonction g est bien définie sur $[0; +\infty[$.

c) 🗨 Justifier que g est croissante sur $[0; +\infty[$.

2. a) Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{F}$ et préciser $\partial_1 f(x, t)$ et $\partial_{1,1}^2 f(x, t)$.

b) Montrer que pour tout $(x, t) \in \mathcal{F}$,

$$|\partial_{1,1}^2 f(x, t)| \leq \frac{t^2}{4} e^{-t^2}.$$

c) 🗨 Soit $x_0 \in [0; +\infty[$, montrer que, pour $(x, t) \in \mathcal{F}$

$$|f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \partial_1 f(x_0, t)| \leq \frac{t^2}{8} e^{-t^2} |x - x_0|^2.$$

d) En déduire l'existence d'une constante $C \in \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $x_0 \in [0; +\infty[$,

$$|g(x) - g(x_0) - (x - x_0) \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0, t) dt| \leq C |x - x_0|^2.$$

e) Conclure en montrant que g est dérivable sur $[0; +\infty[$ et que g' est définie par

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x, t) dt.$$

f) Retrouver le sens de variation de g .

Exercice 3. ♦♦♦ 📄 Injectivité de la transformée de Laplace par des arguments probabilistes

d'après HEC 2002 # VeAp8

Les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ et à valeurs réelles.

Partie I : Définition de l'application L

On note E l'ensemble des fonctions f réelles définies, continues sur $[0, +\infty[$ et telles que, pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ converge absolument.

1.
 - a) Vérifier que E est un espace vectoriel réel.
 - b) Vérifier que E contient les fonctions continues et bornées sur $[0, +\infty[$.
2. Pour tout élément f de E on note $L(f)$ la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par :

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt.$$

- a) Vérifier que L est une application linéaire de E dans l'espace vectoriel des fonctions de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
 - b) Pour tout réel λ positif ou nul, on note ε_λ la fonction réelle définie par $\varepsilon_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$ pour tout réel t positif ou nul. Vérifier que, pour tout réel λ positif ou nul, la fonction ε_λ est dans E et, pour tout réel x strictement positif, calculer $L(\varepsilon_\lambda)(x)$.
 - c) Montrer que, pour tout réel λ positif ou nul et toute fonction f de E, la fonction $\varepsilon_\lambda f$ est aussi dans E et vérifie, pour tout réel x strictement positif, l'égalité : $L(\varepsilon_\lambda f)(x) = L(f)(x + \lambda)$.
3. On considère une fonction H élément de E, de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Montrer que la fonction H' est aussi dans E et, pour tout réel x strictement positif, justifier l'égalité :

$$L(H')(x) = -H(0) + xL(H)(x)$$

4. Soit une fonction f élément de E. Pour tout entier naturel n , montrer que la fonction qui à tout réel t positif ou nul associe $t^n f(t)$ est aussi élément de E.

Partie II : Dérivabilité de la fonction $L(f)$

Dans toute cette partie, on considère un réel x strictement positif et une fonction f élément de E.

1. Soit h un réel non nul vérifiant l'inégalité $|h| < \frac{x}{2}$.
 - a) Pour tout réel t strictement positif, justifier l'inégalité :

$$\left| e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt} \right| \leq \frac{h^2 t^2}{2} e^{-xt/2}.$$

- b) Pour tout réel T strictement positif, justifier l'inégalité :

$$\left| \int_0^T \left(\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} f(t) + te^{-xt} f(t) \right) dt \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 |f(t)| e^{-xt/2} dt.$$

- c) En déduire que $L(f)$ est dérivable en x et que son nombre dérivé en x vaut :

$$(L(f))'(x) = - \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-xt} dt.$$

- d) Montrer que la fonction $L(f)$ est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout entier naturel k , donner à l'aide d'une intégrale la valeur de la dérivée k -ième de $L(f)$ en x .
On note $L(f)^{(k)}$, la dérivée k -ième de $L(f)$.

Remarque. Si on définit la fonction de deux variables $g : (x, t) \in \mathbb{R}_+^2 \mapsto f(x) e^{-xt}$, alors on vient de justifier l'interversion

$$\partial_1 \int_0^{+\infty} g(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \partial_1 g(x, t) dt$$

avec un abus de notation dans le premier membre. Cette relation n'est pas toujours vraie.. il convient donc d'être prudent.

Partie III : Injectivité de l'application $L: f \mapsto L(f)$

Dans toute cette partie, on considère un réel x strictement positif et une fonction f continue et bornée sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Ainsi f est élément de E .

1. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre égal à $\frac{1}{x}$. Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

- a) Donner une densité de la variable aléatoire S_n .
 b) Donner une densité, qu'on notera φ_n , de la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$.

2. Soit ε un réel strictement positif. En déduire l'égalité :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\left| f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(x) \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

3. On note M un majorant de $|f|$ sur $[0, +\infty[$.

- a) Soit ε un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n , on note A_n l'événement :

$$A_n = \left[\left| f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(x) \right| \leq \varepsilon \right]$$

et $\mathbf{1}_{A_n}$ son indicatrice¹. Justifier l'inégalité suivante entre variables aléatoires :

$$\left| f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(x) \right| \leq \varepsilon \mathbf{1}_{A_n} + 2M(1 - \mathbf{1}_{A_n}).$$

- b) Que vaut $\mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_n})$? En déduire l'égalité :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E} \left(f \left(\frac{S_n}{n} \right) \right) = f(x)$$

4. a) Déduire des questions précédentes l'égalité :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n-1)!x^n} \int_0^{+\infty} t^{n-1} f(t) e^{-nt/x} dt$$

puis l'égalité

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n (-1)^{n-1}}{(n-1)!x^n} (L(f))^{(n-1)} \left(\frac{n}{x} \right).$$

- b) Montrer que si deux fonctions f et g continues et bornées sur l'intervalle $[0, +\infty[$ vérifient $L(f) = L(g)$ alors f et g sont égales.
 c) Montrer, plus précisément, que si deux fonctions f et g continues et bornées sur l'intervalle $[0, +\infty[$ vérifient $L(f)(x) = L(g)(x)$ seulement pour tout x dans $]a, +\infty[$ (où a est positif ou nul) alors f et g sont encore égales.

>> Voir aussi ESSEC 2010 pour une autre utilisation de la transformée de Laplace. La transformée de Laplace a de nombreux avantages, elle est notamment utilisée en sciences industrielles pour la résolution des équations différentielles linéaires.

1. Pour rappel, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbf{1}_{A_n}(\omega) = 1$ si $\omega \in A_n$ et 0 sinon.

Exercice 2

p. 1

CPV14

1.a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$. La fonction $t \mapsto t^\alpha e^{-t^2}$ est continue sur $[0; +\infty[$ (en 0 car $\alpha \geq 0$). On a donc une intégrale généralisée en $+\infty$. Or par les croissances comparées

$$t^2 t^\alpha e^{-t^2} = (t^2)^{1+\alpha/2} e^{-t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\text{D'où } t^\alpha e^{-t^2} = o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right).$$

Par le critère de négligeabilité (avec $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$, intégrale de Riemann convergente), on en déduit la convergence de

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2} dt.$$

1.b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[0; +\infty[$. L'intégrale $g(x)$ est donc généralisée en $+\infty$. Or

$$f(x, t) = e^{-t^2} \sqrt{1+xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{x} \cdot t^{1/2} e^{-t^2}.$$

Par le critère d'équivalence (dans le cadre de fonctions positives) et la convergence de la question précédente, on prouve la convergence de l'intégrale $g(x)$.

Finalement, la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.

1.c) Soit $x, y \in \mathbb{R}^+$ avec $x \leq y$. Comme la fonction racine carrée est croissante, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$

$$\sqrt{1+xt} \leq \sqrt{1+yt}.$$

Puis avec $e^{-t^2} \geq 0$.

$$f(x, t) = e^{-t^2} \sqrt{1+xt} \leq e^{-t^2} \sqrt{1+yt} = f(y, t).$$

Enfin, par croissance de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(x, t) dt \leq \int_0^{+\infty} f(y, t) dt.$$

Finalement, g est croissante car pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$x \leq y \Rightarrow g(x) \leq g(y).$$

Attention, on évitera tout recours à la dérivation car on ne sait pas encore que g est dérivable (c'est le but de la question 2).

2.a) La fonction $(x, t) \in \mathcal{F} \mapsto 1+xt$ est une fonction polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{F}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$. La fonction $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_*^+$. Par composition $(x, t) \in \mathcal{F} \mapsto \sqrt{1+xt}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{F}$. De plus, $(x, t) \in \mathcal{F} \mapsto -t^2$ est $\mathcal{C}^2$ et la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Par composition, $(x, t) \in \mathcal{F} \mapsto e^{-t^2}$ est $\mathcal{C}^2$. Par produit, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{F}$. Enfin, pour $(x, t) \in \mathcal{F}$

$$\partial_1 f(x, t) = e^{-t^2} \cdot \frac{t}{2\sqrt{1+xt}} = \frac{te^{-t^2}}{2} (1+xt)^{-1/2}$$

$$\partial_{1,1}^2 f(x, t) = -\frac{t^2 e^{-t^2}}{4} (1+xt)^{-1/2-1} = -\frac{t^2 e^{-t^2}}{4(1+xt)^{3/2}}$$

2.b) Pour $(x, t) \in \mathcal{F}$,

$$\left| \partial_{1,1}^2 f(x, t) \right| \leq \frac{t^2 e^{-t^2}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+xt}^3} \leq \frac{t^2 e^{-t^2}}{4}$$

car $1+xt \geq 1$, puis $\sqrt{1+xt}^3 \geq 1$.

2.c) Soit $t \in [0, +\infty[$ fixé. Soit $x_0 \in [0, +\infty[$. On a vu que, pour tout $x \in [0, +\infty[$

$$\left| \partial_{1,1}^2 f(x, t) \right| \leq \frac{t^2}{4} e^{-t^2}.$$

Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto f(x, t)$ entre x et x_0 ,

$$\left| f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \partial_1 f(x_0, t) \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{4} e^{-t^2} \right) |x - x_0|^2$$

2.d) Soit $x_0 \in [0, +\infty[$. En reprenant les questions 1.a,b), on prouve la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0, t) dt.$$

Pour tout $x \in [0, +\infty[$

$$\begin{aligned} g(x) - g(x_0) - (x - x_0) \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0, t) dt \\ = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt - \int_0^{+\infty} f(x_0, t) dt \\ - (x - x_0) \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0, t) dt \\ = \int_0^{+\infty} (f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \partial_1 f(x_0, t)) dt. \end{aligned}$$

À l'aide de la question précédente et par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \left| g(x) - g(x_0) - (x - x_0) \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0, t) dt \right| \\ \leq \frac{|x - x_0|^2}{8} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

D'où le résultat en posant

$$C = \frac{1}{8} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

2.e) Pour $x \neq x_0$, en divisant par $|x - x_0| > 0$,

$$\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0, t) dt \right| \leq C |x - x_0|.$$

Or $|x - x_0| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$,

et par encadrement,

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0, t) dt \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

$$\text{puis } \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0, t) dt.$$

Enfin par définition du nombre dérivé, g est dérivable en x_0 avec

$$g'(x_0) = \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0, t) dt.$$

2.f) En remplaçant, il vient par croissance de l'intégrale

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{2\sqrt{1+xt}} dt \geq 0,$$

et on retrouve la croissance de la fonction g sur l'intervalle $[0, +\infty[$.