



Thème : Inégalités



Exercice 1. ✧ Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ n réels. Justifier que $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \leq n \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)$.

Exercice 2. 📖 **Inégalité arithmético-géométrique**

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ n réels strictement positifs. On pose :

$$M(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \quad G(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \quad \text{et} \quad H(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n 1/a_i}.$$

On propose de montrer de plusieurs manières que :

$$G(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq M(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (\text{IAG})$$

1. ✧ *Par convexité.*

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_*^+$. On pose $m = M(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

- a) Justifier que pour tout x strictement positif, $\ln(x) \leq x - 1$.
- b) Montrer que $\sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{m} - 1\right) = 0$.
- c) En déduire que $\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{a_i}{m}\right) \leq 0$, puis conclure en montrant (IAG).
- d) En utilisant $M(1/a_1, 1/a_2, \dots, 1/a_n)$, justifier que $H(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq G(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

2. ✦ *Par l'inégalité de Jensen.*

On rappelle que si une fonction f est concave sur un intervalle I , alors, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in I^n, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k) \leq f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k\right).$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \quad \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

3. ✦✦ *Via de l'optimisation sous contrainte*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\mathcal{K} = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \mid M(x_1, \dots, x_n) = 1\}$.

- a) Déterminer les points critiques de G sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ sous la contrainte $M(x_1, \dots, x_n) = 1$.
- b) Montrer que G possède un maximum sur $\mathcal{K}$ et que celui-ci est atteint sur $\mathcal{K} \cap (\mathbb{R}_+^*)^n$.
- c) En déduire (IAG).
- d) Adapter la démarche pour établir que $H(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq G(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Exercice 3. ✦✦✦ **Inégalité de Carleman**

d'après EDHEC 2012

On admet le lemme de Cesaro : si une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers ℓ , alors on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \ell$.

Dans toute la suite, on considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels positifs telle que la série de terme général x_n converge. Pour tout entier naturel n non nul, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k, \quad T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n S_k \quad \text{et} \quad y_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i x_i.$$

1. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n y_k = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (n+1-i)x_i$.

En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^n y_k = T_n$.

- b) En utilisant le résultat admis au début de ce problème, établir que la série de terme général y_n converge et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

2. Dans cette question, on pose, pour tout entier naturel n non nul : $z_n = \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n}$. On se propose de montrer que la série de terme général z_n converge et que sa somme vérifie $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

- a) On rappelle que si une fonction f est concave sur un intervalle I , alors, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in I^n, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k) \leq f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k\right).$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

- b) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $z_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}} \left(\prod_{k=1}^n k x_k \right)^{1/n}$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z_n \leq \frac{n+1}{(n!)^{1/n}} y_n.$$

- c) Montrer que, pour tout réel x positif, on a $\ln(1+x) \leq x$.

- d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

- e) Établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$.

Montrer enfin que la série de terme général z_n converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout k élément de $[1, n-1]$, on a :

$$\frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

- b) Calculer l'intégrale $\int_{1/n}^1 \ln(x) dx$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}, \quad -1 + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq -1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n}.$$

- c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right)$, puis établir que :

$$\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{n}.$$

4. On admet que si deux séries à termes positifs, de termes généraux équivalents, divergent, alors leurs sommes partielles d'ordre m sont équivalentes lorsque m est au voisinage de $+\infty$. Soit N un entier naturel non nul quelconque. On considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ particulière que l'on note $(x_n(N))_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$x_n(N) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \in [1, N] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose, comme à la deuxième question : $\forall n \in \mathbb{N}^*, z_n(N) = \left(\prod_{k=1}^n x_k(N) \right)^{1/n}$.

- a) Écrire $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)$ sous forme de sommes finies.

- b) En déduire que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e$.

5. Conclure que e est la plus petite des constantes λ telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.