



Thème : Séries entières



Exercice 1. ♦♦ Unicité du développement en série entière

RA42

Soient $\sum a_n$, $\sum b_n$, deux séries absolument convergentes

1. Justifier que pour tout $x \in [-1, 1]$, les séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont absolument convergentes.
2. On pose

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k.$$

Vérifier que pour $N \in \mathbb{N}$, $f(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k + o_0(x^N)$.

3. En déduire que si $f = g$ alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = b_k$.

Exercice 2. ♦♦ Exemple avec la suite de Fibonacci

d'après oral ESCP # RA43

1. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ une série à termes strictement positifs telle que la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_n$ converge vers un réel ℓ tel que $\ell < 1$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge.

On considère la suite (f_n) définie par : $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$.

2. Montrer que la suite (f_n) est à valeurs strictement positives.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$.

a) Expliciter une fonction rationnelle φ telle que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

b) Déterminer le sens de variation de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. a) Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et convergentes. Déterminer leurs limites respectives.

b) En déduire que (u_n) converge vers $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

5. Pour tout réel x , pour lequel la série de terme général $f_n x^n$ converge, on pose $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$. On pose $R = \frac{1}{\Phi}$.

a) Montrer que pour tout x de $] -R, R[$, la série définissant $A(x)$ est absolument convergente.

b) On pose, pour tout x de $] -R, R[$:

$$A_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n x^{n+2}, \quad A_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1} x^{n+2} \quad \text{et} \quad A_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+2} x^{n+2}.$$

Exprimer $A_0(x)$, $A_1(x)$ et $A_2(x)$ en fonction de $A(x)$ pour tout x de $] -R, R[$.

- c) En déduire $A(x)$ en fonction de x pour tout x de $] -R, R[$.