



Thème : Produits de Cauchy et applications



Exercice 1. ♦ Extrait : problème EDHEC 2020

RA44

2) Dans cette question, x désigne un réel élément de $[0; 1[$.

a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0; x]$, simplifier la somme $\sum_{p=1}^n t^{p-1}$.

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.

c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

d) Établir alors que la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ est convergente et que : $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$.

3) On considère deux suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes positifs et on suppose que les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes, de sommes respectives $A = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n c_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k \right) \leq \sum_{k=1}^{2n} c_k$.

b) En déduire que la série de terme général c_n converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$.

c) Soit x un réel élément de $[0; 1[$.

On suppose dans cette question que l'on a : $a_k = \frac{x^k}{k}$ ($k \in \mathbb{N}^*$) et $b_k = x^k$ ($k \in \mathbb{N}$).

i) Justifier rapidement que les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes et à termes positifs.

ii) écrire une fonction python qui prend en argument n et calcule la valeur de c_n .

iii) Donner l'expression de c_n sous forme de somme.

On désigne toujours par x un réel de $[0; 1[$.

4) a) Utiliser la première question du préliminaire pour établir que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)$.

Exercice 2. ♦♦ Noyaux de Markov

PB1

→ Soit $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 2$.

→ Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket \times \llbracket 1; q \rrbracket$, on note $A[i, j]$ le coefficient à la ligne i et la colonne j de A .

→ On note $U \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont toutes les coordonnées sont égales à 1.

→ On appelle noyau de Markov une matrice $K \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que

$$(M_1) \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2, \quad K[i, j] \geq 0 \quad (M_2) \quad \forall i \in \llbracket 1; N \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^N K[i, j] = 1.$$

1. a) Compléter le programme suivant pour qu'il renvoie True si K vérifie la condition (M_1) .

```
def verifM1(K):
    n=...
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if .....:
                return False
    return True
```

b) Faire de même pour la condition (M_2) en codant une fonction `verifM2(K)`.

c) En déduire une fonction `Markov(K)` qui renvoie `True` si K est un noyau de Markov et `False` sinon. Que renvoie `Markov(np.eye(2025))`?

2. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Montrer que A vérifie (M_2) si et seulement si $AU = U$.

En déduire que si A et B sont deux noyaux de Markov alors AB est encore un noyau de Markov.

On se fixe dans la suite un noyau de Markov K .

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, K^n est un noyau de Markov.

4. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$, justifier que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{t^n K^n[i, j]}{n!}$ converge.

On notera $H_t \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2, \quad H_t[i, j] = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K^n[i, j]}{n!}.$$

5. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, H_t est un noyau de Markov.

6. On se donne deux suites positives $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$. On suppose les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergentes. On définit également la suite (c_n) par $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n c_k \leq \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k \right) \leq \sum_{k=0}^{2n} c_k.$$

b) En déduire que la série de terme général c_n converge et que l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

7. Montrer que pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}^{+2}$, $H_{t+s} = H_t H_s$.

Exercice 3. ♦♦♦ Estimation en variation totale

VeAp9

Dans la suite, on admet ce résultat sur les produits de Cauchy :

→ Pour deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on pose la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

→ Si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes alors la série $\sum c_n$ est aussi absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j \right).$$

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. De plus, pour X, Y deux variables aléatoires, on pose

$$d(X, Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbf{P}([X = n]) - \mathbf{P}([Y = n])|.$$

1. Soient $p \in [0, 1]$, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(p)$.

Établir l'égalité $d(X, Y) = p(1 - e^{-p})$ et en déduire la majoration $d(X, Y) \leq p^2$.

2. a) Soient X, Y, Z, T quatre variables aléatoires. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$|\mathbf{P}(X + Y = k) - \mathbf{P}(Z + T = k)| \leq \sum_{i+j=k} \mathbf{P}(Y = j) |\mathbf{P}(X = i) - \mathbf{P}(Z = i)| + \sum_{i+j=k} \mathbf{P}(Z = i) |\mathbf{P}(Y = j) - \mathbf{P}(T = j)|.$$

b) En déduire que $d(X + Y, Z + T) \leq d(X, Z) + d(Y, T)$.

3. a) Soient $U \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $S \hookrightarrow \mathcal{P}(np)$. Prouver l'inégalité $d(U, S) \leq np^2$.

b) Retrouver le théorème de convergence en loi des loi de Poisson.

4. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_*^+$. En utilisant les résultats précédents, montrer que

$$d(X, Y) \leq |\lambda - \mu| \quad \text{si } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda), \quad Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu).$$

Indication. On pourra remarquer que si S, T et U sont trois variables aléatoires, $d(S, T) \leq d(S, U) + d(U, T)$.