



Thème : Matrices classiques



Exercice 1. ♦♦ Diagonalisation des matrices de rang 1

DA26

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si et seulement si il existe deux matrices colonnes non nulles U, V telles que $M = U^t V$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note U et V deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U^t V$ et on note $a = \text{Tr}(A)$.
 - a) Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
 - b) Vérifier que $U^t V U = a$, puis que $A^2 = aA$.
 - c) Justifier que si $a = 0$ alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - d) On suppose dans la suite $a \neq 0$. Calculer AU . Dédire des questions précédentes que A est diagonalisable.
 - e) Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 soit diagonalisable.

Exercice 2. ♦♦ Matrice de Vandermonde - Lien avec les polynômes de Lagrange

CA61

Soit $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On pose

$$V_a = \begin{bmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

1. Notons $C_0, C_1, \dots, C_n$, les $n+1$ colonnes de V_a . À quelle condition sur les réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ les colonnes de V_a forment une famille libre? En déduire une condition pour l'inversibilité de V_a .

On suppose cette condition vérifiée dans la suite.

Notons $\mathcal{B} = (1, x, \dots, x^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ et $(e_0, \dots, e_n)$, la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. Montrer que l'application suivante est un isomorphisme

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[x] & \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto (P(a_0), \dots, P(a_n)). \end{cases}$$

Pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on définit le polynôme $L_i = \varphi^{-1}(e_i)$. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ et que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x], \quad P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i.$$

- b) Préciser $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{-1}$ où $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ désigne la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

Exercice 3. ♦♦ Matrice Compagnon

VP60

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note id l'application identité de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On considère un n -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ de $\mathbb{R}^n$ et le polynôme :

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0.$$

La matrice compagnon C du polynôme P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie par

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Soit f , l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice C .

- Soit f , l'endomorphisme canoniquement associé à C .
 - Exprimer, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $f(e_i)$ en fonction de e_{i+1} .
 - En déduire : $\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $f^j(e_1) = e_{j+1}$ et $f^n(e_1) = -(a_0 e_1 + a_1 e_2 + \dots + a_{n-1} e_n)$.
- Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $g = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1 f + a_0 \text{id}$.
 - Vérifier : $g(e_1) = (0, \dots, 0)$.
 - Montrer que : $\forall i \in \mathbb{N}$, $g \circ f^i = f^i \circ g$.
 - En déduire : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $g(e_i) = (0, \dots, 0)$.
 - Montrer que le polynôme P est annulateur de l'endomorphisme f . Que dire des valeurs propres de C ?
 - Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5$.

Exercice 4. Encadrement de Rayleigh

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On note α la plus petite valeur propre de S , et β la plus grande valeur propre de S . On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique et de la norme associée $\|\cdot\|$. Montrer :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \alpha \|X\|^2 \leq {}^tXSX \leq \beta \|X\|^2.$$

Exercice 5. Matrices de Gram et valeurs propres

AB59

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E . On pose

$$G = \left(\langle u_i, u_j \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{et} \quad M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n),$$

où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E .

- Vérifier que $G = {}^tMM$.
- En déduire que $\ker(G) = \ker(M)$, puis $\text{rg}(G) = \text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_n)$.
Indication. Considérer tXGX pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Vérifier que G est inversible si et seulement si la famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de E .
- Justifier que les valeurs propres de G sont positives ou nulles.
 - Justifier que les valeurs propres sont majorées par $\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$.
- Soient $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$ et p le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$ (c'est le projecteur orthogonale sur F). Pour $x \in E$, montrer que

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \quad \text{où} \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ sont } n \text{ réels donnés par : } \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = G^{-1} \begin{bmatrix} \langle u_1, x \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, x \rangle \end{bmatrix}.$$

Exercice 6. Matrices symétriques à coefficients positifs

Extrait HEC 2006 # AS51

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \quad a_{ij} > 0.$$

On note β la plus grande valeur propre de S et V le sous-espace propre de S associé à β . On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique et de la norme associée $\|\cdot\|$.

$$1. \text{ Soit } X_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in V \setminus \{0\}. \text{ On note } |X_0| = \begin{bmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{bmatrix}.$$

- Montrer ${}^tX_0SX_0 \leq {}^t|X_0|S|X_0|$ et en déduire : $|X_0| \in V$.
 - Montrer que les coordonnées de $S|X_0|$ sont toutes strictement positives et en déduire que X_0 n'a aucune coordonnée nulle.
 - Montrer : ${}^tX_0SX_0 = {}^t|X_0|S|X_0|$ et en déduire que les coordonnées de X_0 sont toutes de même signe.
- En déduire qu'il n'existe pas deux vecteurs de $V \setminus \{0\}$ orthogonaux entre eux.
 - Conclure : $\dim(V) = 1$.

Exercice 7. ♦♦ Matrice de Hilbert et python

Pour tout entier $n \geq 2$, on désigne par H_n la matrice de Hilbert d'ordre n définie par :

$$H_n = \left[\left(\frac{1}{j+k-1} \right) \right]_{1 \leq j, k \leq n} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}.$$

Soit h_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à H_n . On pose de plus la fonction $q_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$q_n(x) = \langle h_n(x), x \rangle$$

où $\langle, \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

- *Étude de q*

1. Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Vérifier que $q_n(x) = \sum_{1 \leq j, k \leq n} \frac{x_k x_j}{j+k-1}$.

2. Montrer que $q_n(x) = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right)^2 dt$.

3. Justifier que $q_n(x) \geq 0$ et que l'égalité $q_n(x) = 0$ équivaut à $x = 0$.

- *Application à la réduction de H_n*

4. Justifier que H_n est diagonalisable.

5. Pour tout entier $n \geq 2$, on note : $\mu_n = \min(\text{Sp}(H_n))$ et $\rho_n = \max(\text{Sp}(H_n))$.
Expliciter μ_2 et ρ_2 . Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $0 < \mu_n < \rho_n$.

- *Python - conjecture 1*

6. Vérifier que H_n est une matrice inversible.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $h_{i,j}^{(-1,n)}$ le coefficient de place (i, j) de la matrice H_n^{-1} et on désigne par s_n la somme des coefficients de la matrice H_n^{-1} , c'est-à-dire :

$$s_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} h_{i,j}^{(-1,n)}.$$

7. Écrire un programme qui prend en argument n et renvoie la matrice H_n , puis la matrice inverse H_n^{-1} .

8. Comment obtenir la somme des coefficients d'une matrice A à l'aide de Python?

En déduire un programme qui prend en argument n et renvoie s_n . Tester le programme, que peut-on conjecturer sur s_n ?

- *Python - conjecture 2*

9. Pour obtenir le spectre d'une matrice A , on importe la bibliothèque `numpy.linalg` as `al` et on exécute la commande `al.eigvals(A)`.
Écrire un programme qui prend en argument n et renvoie ρ_n et ρ_n/μ_n . Conjecturer le comportement limite des suites $(\rho_k)_k$ et $(\rho_k/\mu_k)_k$.

10. Comment afficher les n premiers termes de la suite $(\rho_k)_k$?

Exercice 8. ♦♦♦ Matrice positive et productive

d'après EML 2004 # CAp1

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles à n lignes. Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite positive si et seulement si tous les coefficients de M sont positifs ou nuls. On notera alors $M \geq 0$. Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite strictement positive si et seulement si tous les coefficients de M sont strictement positifs. On notera alors $M > 0$. Si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la notation $M \geq N$ (respectivement $M > N$) signifie que $M - N \geq 0$ (respectivement $M - N > 0$). Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite productive si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes : M est positive et il existe une matrice positive P de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - MP > 0$.

I - Étude d'exemples

1. En considérant $U = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$, montrer que la matrice $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ est productive.
2. Montrer que la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ n'est pas productive.

II - Caractérisation des matrices positives

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, si M est positive, alors, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif.
2. Réciproquement, montrer que, si, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif, alors la matrice M est positive.

III - Caractérisation des matrices productives

1. Soit A une matrice productive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la i -ème ligne et de la j -ème colonne est noté a_{ij} , et P une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $P - AP > 0$. On note $p_1, \dots, p_n$ les coefficients de la matrice colonne P .
 - a) Montrer que $P > 0$.
 - b) Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geq AX$. On note $x_1, \dots, x_n$ les coefficients de la matrice colonne X . On désigne par c le plus petit des réels $\frac{x_j}{p_j}$ lorsque l'entier j décrit l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ et k un indice tel que $c = \frac{x_k}{p_k}$.
Établir que $c \left(p_k - \sum_{j=1}^n a_{kj} p_j \right) \geq 0$. En déduire que $c \geq 0$ et que X est positive.
 - c) Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X = AX$. En remarquant que $-X \geq A(-X)$, montrer que X est nulle. En déduire que $I_n - A$ est inversible, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - d) Montrer que, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $Y = (I_n - A)^{-1} X$ est positive (on pourra utiliser III.1.b). En déduire que $(I_n - A)^{-1}$ est positive.
 - e) Dans cette question, on considère une matrice positive B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n - B$ soit inversible et telle que $(I_n - B)^{-1}$ soit positive. On note $V = (I_n - B)^{-1} U$, où U est la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que $V - BV > 0$. Conclure.
 - f) Donner une caractérisation des matrices productives.
 - g) *Application.* Soit M une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $2M^2 = M$. Vérifier que $(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n$ et en déduire que M est productive.

Exercice 1

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $C_1, C_2, \dots, C_n$ ses colonnes. La matrice M est de rang 1 si, et seulement si, il existe une colonne C_{i_0} non nulle telle que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ la colonne C_i est colinéaire à C_{i_0} . C'est-à-dire, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $C_i = \lambda_i C_{i_0}$.

Si on pose $U = C_{i_0}$ et $V = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$, on a bien

$$\begin{aligned} {}^t V U &= \begin{bmatrix} \lambda_1 C_{i_0} & \lambda_2 C_{i_0} & \dots & \lambda_n C_{i_0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{bmatrix} = M. \end{aligned}$$

- 2.a) D'après la formule du rang

$$\begin{aligned} \dim E_0(A) &= \dim \operatorname{Ker} A \\ &= n - \operatorname{rg}(A) = n - 1. \end{aligned}$$

Comme $n \geq 2$

$$\dim E_0(A) > 0$$

Le réel 0 est bien valeur propre de A .

- 2.b) On a

$$\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(U {}^t V) = \operatorname{Tr}({}^t V U) = {}^t V U$$

en identifiant $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$. D'où

$${}^t V U = a.$$

De plus, par associativité du produit matriciel

$$\begin{aligned} A^2 &= (U {}^t V)(U {}^t V) = U ({}^t V U) {}^t V \\ &= U \cdot a \cdot {}^t V = a U {}^t V \quad \text{car } a \in \mathbb{R} \\ A^2 &= aA. \end{aligned}$$

- 2.c) Si $a = 0$ alors $A^2 = 0$. Le polynôme x^2 est annulateur de A et seul 0 est valeur propre (question 2.a)). Si A est diagonalisable, alors A est semblable à la matrice nulle. A est donc la matrice nulle. Absurde, la matrice A est de rang 1.

- 2.d) On a :

$$AU = U {}^t V U = U \cdot a = aU.$$

Comme $U \neq 0$, U est vecteur propre pour la valeur propre a et

$$\dim E_a(A) \geq 1.$$

D'après 2.a), on a aussi

$$\dim E_0(A) + \dim E_a(A) \geq (n-1) + 1 \geq n.$$

Or on a toujours

$$\dim E_0(A) + \dim E_a(A) \leq \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \leq n.$$

On a donc égalité et la matrice A est diagonalisable.

- 2.e) Finalement, comme $a = \operatorname{Tr}(A)$, A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Tr}(A) \neq 0$.

Exercice 2

- 1.

- 2.a) Il est clair que φ est linéaire.

Prouvons l'injectivité de φ . Soit $P \in \operatorname{Ker} \varphi$, dans ce cas

$$\varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) = (0, 0, \dots, 0).$$

Autrement dit, P admet au moins $n+1$ racines avec $a_0, a_1, \dots, a_n$. Or $P \in \mathbb{R}_n[x]$, nécessairement, P est le polynôme nul. Il vient

$$\operatorname{Ker} \varphi \subset \{0_{\mathbb{R}_n[x]}\}.$$

On a même l'égalité puisqu'un noyau contient toujours le vecteur nul.

De plus, l'espace de départ et d'arrivée sont de même dimension (finie). Par les corollaires de la formule du rang, φ est un isomorphisme.

- 2.b) • *Méthode 1. Famille génératrice*

Comme la famille contient autant de vecteurs que la dimension de $\mathbb{R}_n[x]$, pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer que la famille est génératrice. Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Posons

$$Q = P - \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i.$$

Or, par définition de L_i

$$L_i(a_i) = 1 \quad \text{et} \quad L_i(a_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

En évaluant en a_i , il vient

$$Q(a_i) = P(a_i) - P(a_i) = 0.$$

Le polynôme Q admet au moins $n+1$ racines alors qu'il est de degré au plus n . Nécessairement, Q est le polynôme nul et

$$P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i.$$

On prouve ainsi le caractère générateur de la famille et l'égalité demandée.

- *Méthode 2. Famille libre*

Comme la famille contient autant de vecteurs que la dimension de $\mathbb{R}_n[x]$, pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer que la famille est libre. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i = 0_{\mathbb{R}[x]}.$$

Par linéarité de l'application réciproque

$$\varphi^{-1} \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i e_i \right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \varphi^{-1}(e_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i = 0_{\mathbb{R}[x]}.$$

En appliquant φ , on obtient

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i e_i = 0_{\mathbb{R}^{n+1}}.$$

puis, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\lambda_i = 0$ puisque $(e_0, \dots, e_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{n+1}$. En conclusion, $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

- Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. La famille $\mathcal{C}$ est génératrice, il existe $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$P = \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i.$$

En évaluant en les racines a_i , on obtient le résultat demandé.

- 2.c) On a vu que $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{-1} = P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$.
Et, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$x^i = \sum_{j=0}^n a_j^i \cdot L_j(x) \quad \text{et} \quad 1 = \sum_{j=0}^n 1 \cdot L_j(x).$$

D'où

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Exercice 5

1. Comme les matrices ont même taille, il suffit de vérifier que les coefficients sont égaux. Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$

$$\begin{aligned} [{}^tMM]_{ij} &= \sum_{k=1}^n [{}^tM]_{ik} [M]_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n \langle u_i, e_k \rangle \langle e_k, u_j \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = [G]_{ij}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Raisonnons par double inclusion.

$\Rightarrow$ Soit $X \in \text{Ker } M$.

$$GX = {}^tMMX = {}^tM0_{n,1} = 0_{n,1}$$

donc $X \in \text{Ker } G$.

$\Leftarrow$ Soit $X \in \text{Ker } G$.

$$\|MX\|^2 = {}^t(MX)(MX) = {}^tX {}^tMMX = {}^tXGX = 0.$$

Nécessairement $MX = 0_{n,1}$ et $X \in \text{Ker } M$.

On conclut par double inclusion.

- Par la formule du rang, $\text{rg}(G) = \text{rg}(M)$. Et on sait que le rang de M s'identifie au rang de la famille $(u_1, \dots, u_n)$.

3. Raisonnons par équivalence.

G est inversible

ssi $\text{rg } G = n$

ssi $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_n) = n$

ssi $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est génératrice

ssi $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E .

car $\text{Card}(u_1, \dots, u_n) = \dim E$.

- 4.a) Soit X un vecteur propre de G associé à la valeur propre λ . On note x (resp. y) le vecteur de E dont X (resp. MX) est la matrice colonne dans la base $\mathcal{B}$. Par définition

$$X \neq 0_{n,1} \quad \text{et} \quad GX = \lambda X.$$

On en déduit

$${}^tXGX = \lambda {}^tXX = \lambda \|x\|^2$$

$$\text{et} \quad {}^tXGX = {}^tX {}^tMMX = {}^t(MX)(MX) = \|y\|^2.$$

Ainsi $\|y\|^2 = \lambda \|x\|^2$ avec $\|x\| \neq 0$. D'où $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Les valeurs propres de G sont positives ou nulles.

- 4.b) Comme G est diagonalisable

$$\text{Tr}(G) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(G)} \dim E_\lambda(G) \cdot \lambda$$

(si besoin, voir exercice ??, p. ??). Comme les valeurs propres sont positives, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(G)$

$$\lambda \leq \text{Tr}(G).$$

On conclut en remarquant que

$$\text{Tr}(G) = \sum_{i=1}^n \langle u_i, u_i \rangle = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2.$$

5.

Exercice 7

1. Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Si on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} h_n(x) &= h_n \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i h(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j+i-1} e_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{j+i-1} e_j. \end{aligned}$$

La composante de $h_n(x)$ suivant e_j est alors

$$y_j = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{j+k-1}.$$

Par définition du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \langle h_n(x), x \rangle &= \sum_{j=1}^n y_j x_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{x_j x_k}{j+k-1}. \end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right)^2 dt &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n x_j t^{j-1} \right) \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_k x_j t^{k+j-2} dt \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_k x_j \int_0^1 t^{k+j-2} dt \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{x_k x_j}{k+j-1}. \end{aligned}$$

Car pour $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

3. Pour tout $t \in [0; 1]$,

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right)^2 \geq 0.$$

Par positivité de l'intégrale, il vient

$$q_n(x) = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right)^2 dt \geq 0.$$

• Traitons le cas d'égalité.

Supposons que $q_n(x) = 0$. Comme la fonction polynomiale

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right)^2$$

est positive et continue sur $[0; 1]$,

$$\forall t \in [0; 1], \quad \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right)^2 = 0,$$

puis

$$\forall t \in [0; 1], \quad \sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} = 0.$$

La fonction polynomiale

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^n x_k t^{k-1}$$

admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. Tous les coefficients sont donc nuls et

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Réciproquement, si $x = 0_{\mathbb{R}^n}$, on a bien $q_n(x) = 0$. L'équivalence dans le cas d'égalité est prouvée.

4. La matrice H_n est une matrice symétrique réelle, donc H_n est diagonalisable.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \det(H_2 - \lambda I_2) &= (1 - \lambda) \left(\frac{1}{3} - \lambda \right) - \frac{1}{4} \\ &= \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Un calcul de discriminant donnent 2 racines

$$\lambda_1 = 1/6 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 1/2.$$

Comme $\lambda \in \text{Sp}(H_2)$ si et seulement si $H_2 - \lambda I_2$ est non inversible.

$$\text{Sp}(H_2) = \text{Sp}(H_2) = \{\lambda_1, \lambda_2\}.$$

On a donc

$$\mu_2 = 1/6 \quad \text{et} \quad \rho_2 = 1/2.$$

• Soit x un vecteur propre associé à une valeur propre λ .

$$h_n(x) = \lambda x \quad \text{et} \quad x \neq 0_{\mathbb{R}^n}.$$

En particulier

$$\begin{aligned} q_n(x) &= \langle h_n(x), x \rangle \\ &= \langle \lambda x, x \rangle \\ &= \lambda \|x\|^2. \end{aligned}$$

Or on a vu que $q_n(x) > 0$ pour $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Donc $\lambda > 0$ et

$$\begin{aligned} \mu_n &= \min \text{Sp}(H_n) \\ &= \min \text{Sp}(h_n) > 0. \end{aligned}$$

Montrons que $\mu_n < \rho_n$ en raisonnant par l'absurde. Comme $\mu_n \leq \rho_n$, on suppose donc $\mu_n = \rho_n$, alors

$$\text{Sp}(H_n) = \{\rho_n\}.$$

Or, H_n est diagonalisable, dans ce cas H_n est semblable à la matrice $\rho_n I_n$. C'est donc $\rho_n I_n$, absurde. Conclusion

$$\mu_n < \rho_n.$$

6. D'après la question précédente, 0 n'est pas valeur propre de H_n . La matrice est donc inversible.

Python

Avant de commencer, on importe les différentes bibliothèques :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
```

7. Pour avoir la matrice de Hilbert de taille n , on peut écrire

```
def Hilbert(n):
```

```
    H=np.zeros([n,n])
    for i in range(0,n):
        for j in range(0,n):
            H[i,j]=1/(i+j+1)
            # +1 à cause des décalages d'
            # indice en Python
    return H
```

• Pour avoir l'inverse, on peut rajouter

8.

```
def sommeH(n):
    H=Hilbert(n)
    return sum(sum(al.inv(H)))
```

Testons le code :

```
>>> sommeH(2)
4.000000000000001
>>> sommeH(3)
8.999999999999999
>>> sommeH(4)
15.999999999999261
>>> sommeH(5)
24.999999999998454
>>> sommeH(6)
36.00000000168575
```

En prenant en compte les erreurs d'arrondis, on conjecture que pour tout entier $n \geq 2$

$$s_n = n^2.$$

9. Pour obtenir le maximum :

```
def MspectreH(n):
    H=Hilbert(n)
    Spectre=al.eigvals(H)
    Max=max(Spectre)
    return Max
```

et le quotient

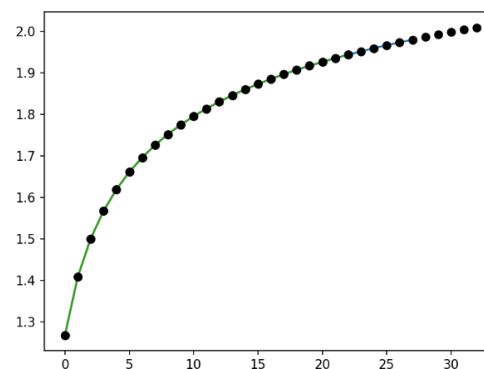
```
def QspectreH(n):
    H=Hilbert(n)
    Spectre=al.eigvals(H)
    Max=max(Spectre)
```

```
Min=min(Spectre)
return Max/Min
```

10.

```
def Affichage(n):
    m=[]
    for i in range(2,n):
        m.append(MspectreH(i))

    plt.plot(m, 'ko')
    plt.show()
```



On conjecture que la suite est croissante et convergente.