



Thème : Variables à densité Théorème de sommation



Exercice 1. ♦♦ Inverse du produit de lois uniformes

D'après ESC 2009 #VADp6

Soient U, V deux variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $[0; 1]$. On considérera que, du fait que $[U = 0]$ et $[V = 0]$ sont de probabilité nulle, $U(\Omega) =]0, 1]$, $V(\Omega) =]0, 1]$. On pose

$$X = -\ln(U) \quad \text{et} \quad Y = -\ln(V).$$

- Montrer que $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$ et que la variable X suit une loi exponentielle de paramètre 1.
- Quelle est la loi de Y ? Justifier que X et Y sont indépendantes.
 - Déterminer une densité f de $Z = X + Y$. Vérifier que si $x \geq 0$, alors $f(x) = xe^{-x}$.
 - Déterminer la fonction de répartition de $Z = X + Y$.
- On note $T = e^Z$.
 - Déterminer la fonction de répartition de T et montrer que T est une variable à densité.
 - En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{\ln(t)}{t^2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

est une densité de la variable aléatoire $\frac{1}{UV}$.

- Écrire une fonction Python nommée `Simu` qui simule la variable $1/(UV)$.
On rappelle que la commande `np.random.rand()` simule une variable à densité suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$, dont les exécutions successives donnent des variables indépendantes.
- Commenter le code suivant :

```
E=np.zeros(5000)
for i in range(5000):
    E[i]=Simu()

x=np.linspace(1,20,100)
y=np.log(x)/x**2
plt.hist(E,bins=np.linspace(0,20,20),density=True)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

Editeur

