



Thème : Espérance conditionnelle



Exercice 1. ♦ Rappel de la définition de l'espérance conditionnelle et donner la formule de l'espérance totale.

Exercice 2. ♦♦

D'après ESC 2005 # EC1

Dans tout l'exercice, S désigne un entier naturel non nul fixé. Une urne contient initialement $4S$ boules indiscernables au toucher, dont S boules rouges, S boules vertes et $2S$ boules bleues.

On effectue des tirages successifs d'une boule, au hasard, et avec le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, on ne la remet pas dans l'urne, mais on remet dans l'urne une boule bleue;
- si la boule tirée est verte, on la remet dans l'urne;
- si la boule tirée est bleue, on ne la remet pas dans l'urne, mais on remet dans l'urne une boule rouge.

On note, pour tout entier naturel n non nul, X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne après le n -ème tirage, et on note X_0 la variable aléatoire certaine égale à S .

1. Déterminer la loi de X_1 , et calculer son espérance.
2. Déterminer la loi de X_2 et calculer son espérance.
3. On suppose désormais que n est un entier supérieur ou égal à $2S$, de sorte que

$$X_n(\Omega) = \{0, \dots, 3S\}.$$

a) Soit $k \in \llbracket 1, 3S - 1 \rrbracket$.

Quelle est la composition de l'urne une fois l'événement $[X_n = k]$ réalisé?

En déduire la loi de X_{n+1} conditionnellement à l'événement $[X_n = k]$.

b) Montrer que $\mathbf{E}(X_{n+1} | X_n = k) = \left(1 - \frac{1}{2S}\right)k + \frac{3}{4}$. Cette formule est-elle encore vraie pour $k = 0$ et $k = 3S$?

c) En déduire par la formule de l'espérance totale que $\mathbf{E}(X_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{2S}\right)\mathbf{E}(X_n) + \frac{3}{4}$.

4. On note, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à $2S$, $u_n = \mathbf{E}(X_n)$.

a) Donner l'expression de u_n en fonction de n, S et u_{2S} .

b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(X_n) = \frac{3S}{2}$.

5. Écrire en Python une fonction `simul(S, n)` qui prend en entrée deux paramètres S et n , simule une série de n tirages dans une urne de $4S$ boules et retourne le nombre de boules rouges restant dans l'urne à l'issue de ces n tirages.

Exercice 3. ♦♦

EC2

1. Dans cette question, x désigne un nombre réel strictement compris entre 0 et 1.

a) Justifier la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} x^k / k$.

b) Vérifier, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0, 1[$, l'égalité : $\frac{1}{1-t} = \frac{t^m}{1-t} + \sum_{k=0}^{m-1} t^k$.

c) Démontrer que l'intégrale $\int_0^x \frac{t^m}{1-t} dt$ tend vers 0 quand l'entier m tend vers l'infini.

d) En déduire la somme de la série $\sum_{k \geq 1} x^k / k$.

2. Soient $U_1, U_2, \dots, U_N$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $[0; 1]$ et N une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p indépendante de la suite $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$. On pose

$$X = \max_{1 \leq i \leq N} U_i.$$

Calculer l'espérance de X .