Avant-propos

À notre ami Christian Lebœuf

Ces annales corrigées de mathématiques des épreuves orales du concours ESCP Europe regroupent les exercices posés en 2019 ainsi que leurs corrigés dans les options scientifique et littéraire B/L.

Cet ouvrage devrait permettre aux futurs candidats une meilleure préparation à l'épreuve orale de mathématiques de ESCP Europe et fournir une aide efficace aux enseignants des classes préparatoires économiques et commerciales.

De plus, ces annales constituent également un outil pouvant faciliter la préparation aux épreuves écrites de mathématiques du concours quelle que soit leur option (scientifique, économique, littéraire B/L ou technologique) ; la plupart des thèmes abordés dans les sujets d'oral se retrouvent en effet, peu ou prou, dans les sujets de l'écrit.
Certains exercices publiés dans ces annales sont assez longs : ce sont des sujets d'étude et le jury n'en attend pas nécessairement une résolution complète.

Les énoncés et corrigés des exercices ont été regroupés en quatre rubriques : analyse, algèbre, probabilités et sujets de l'option littéraire B/L.

Chaque candidat doit exposer en une vingtaine de minutes son sujet principal préparé en salle et résoudre directement au tableau, pendant le temps restant, une courte question dont on trouvera, dans cet ouvrage, un échantillon.

On peut également trouver le contenu des annales sur le site internet de ESCP Europe,

Enfin ces annales n'auraient pu voir le jour sans la fidèle collaboration de tous les examinateurs de l'oral de mathématiques de ESCP Europe. Nous les en remercions.

Frank BOURNOIS, Directeur Général ESCP Europe.

Caroline CHAMPONNOIS, Service des Admissions ESCP Europe.

Claude MENENDIAN, Responsable des épreuves orales de mathématiques du concours ESCP Europe.

Chapitre 1

Analyse

Exercice 1.1

1. a) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Montrer que la fonction $\theta \mapsto \ln\left(x^2 - 2x\cos\theta + 1\right)$ est continue sur $[0, \pi]$.
On note alors F la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, F(x) = \int_0^{\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos\theta + 1\right) d\theta$$

b) Justifier que F est paire.

c) Montrer que $\ln(1 - \cos\theta)$ est équivalent à $2\ln\theta$ quand θ tend vers 0. En déduire que l'on peut définir $F(1)$ et $F(-1)$.
On admet que la fonction F ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{2n} = 1$.

b) En déduire l'égalité de polynômes suivante :

$$X^{2n} - 1 = \prod_{k=-(n-1)}^{n} \left(X - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right) = \left(X^2 - 1\right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)$$

c) En faisant intervenir des sommes de Riemann, établir que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on a :

$$F(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\pi}{n} \ln\left(\frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1}\right)$$

d) En déduire l'expression de $F(x)$ si $x \in]-1, 1[$ et si $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

e) Donner alors la valeur de $F(1)$ et $F(-1)$.

3. On pose : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\, dt$. Calculer I.

Solution de l'exercice 1.1

1. a) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$. Pour tout $\theta \in [0,\pi]$, $x\cos\theta \geqslant -|x|$ donc :

$$x^2 - 2x\cos\theta + 1 \geqslant x^2 - 2|x| + 1 = (|x|-1)^2 > 0.$$

donc la fonction $\theta \mapsto \ln\left(x^2 - 2x\cos\theta + 1\right)$ est définie et continue sur $[0,\pi]$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, le changement de variable $\theta = \pi - t$ donne la parité de F.

c) L'équivalence provient de :

$$\frac{\ln(1-\cos\theta)}{2\ln\theta} - 1 = \frac{1}{2\ln\theta}\ln\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right) \to 0 \times \ln\frac{1}{2}.$$

L'intégrale $F(1)$ est impropre en 0. Or :

$$\ln(2-2\cos\theta) = \ln 2 + \ln(1-\cos\theta) \Rightarrow |\ln(2-2\cos\theta)| \sim -2\ln\theta$$

Par ailleurs la fonction $\theta \to \ln\theta$ admet une intégrale absolument convergente sur $]0,\pi]$. Donc $F(1)$ converge ; $F(-1)$ aussi par changement de variable comme en 1b.

2. a) Les solutions de cette équation sont les $2n$ complexes : $e^{\frac{ik\pi}{n}}$, $k \in [\![-(n-1), n]\!]$.

b) Le polynôme $X^{2n} - 1$ est de degré $2n$, unitaire et ses $2n$ racines sont les $e^{\frac{ik\pi}{n}}$, $k \in [\![-(n-1), n]\!]$, d'où la première égalité. Pour la seconde, on sort du produit les facteurs correspondant à $k = n$ et $k = 0$ et on regroupe les autres par conjugués.

c) De ce qui précède, on déduit que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\right) &= \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)\\ &= \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right) - \frac{\pi}{n}\ln\left((x+1)^2\right)\end{aligned}$$

La fonction $\theta \mapsto \ln\left(x^2 - 2x\cos\theta + 1\right)$ est continue sur $[0,\pi]$. On reconnaît dans le premier terme à droite une somme de Riemann qui lui est associée. L'autre terme tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\right) = \int_0^\pi \ln\left(x^2 - 2x\cos t + 1\right)dt = F(x)$$

d) Si $x \in]-1,1[$, $F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\right) = 0.$

Si $|x| > 1$, $F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\right) = 2\pi\ln|x|.$

e) Par continuité de F, on a $F(1) = \lim\limits_{x\to 1} F(x) = 0$ et donc, par parité, $F(-1) = 0$.

3. On a $F(1) = 0$ et

$$F(1) = \int_0^\pi \ln(2(1-\cos\theta))\,d\theta = \int_0^\pi \ln\left(4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)d\theta = \pi\ln 4 + 2\int_0^\pi \ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)d\theta$$

On pose $t = \dfrac{\theta}{2}$. Il vient :

$$\int_0^\pi \ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(t))\,dt = 2I$$

Donc $I = -\dfrac{\pi\ln 2}{2}$.

EXERCICE 1.2

On note E l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs réelles positives.
Pour tout $f \in E$, on définit la fonction $\varphi(f)$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ \varphi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)}\ \mathrm{d}t.$$

1. a) L'ensemble E est-il un espace vectoriel ? L'application φ est-elle linéaire ?

b) Pour tout $f \in E$, montrer que $\varphi(f)$ est de classe C^1 et exprimer sa dérivée en fonction de f.

c) L'application φ est-elle injective ?

d) L'application φ est-elle surjective de E sur E ?

On note f_0 la fonction constante égale à 1, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_{n+1} = \varphi(f_n)$.

2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de la forme $x \mapsto \alpha_n x^{\beta_n}$, avec α_n et β_n réels.

b) Donner des relations de récurrence vérifiées par les suites $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\beta_n = 2 - 2^{1-n}$.

3.a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comparer $\dfrac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}}$ et $\sqrt{\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}}$.

b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $M_n = \max\limits_{x\in[0,1]} \left| f_n(x) - \dfrac{1}{4}x^2 \right|$, puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.2

1. a) L'ensemble E n'est pas stable par multiplication par -1, donc n'est pas un espace vectoriel. Comme φ n'est pas définie sur un espace vectoriel, elle ne peut être linéaire.

b) Comme $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est continue, le théorème fondamental du calcul intégral indique que $\varphi(f)$ est de classe C^1, de dérivée donnée par : $\big(\varphi(f)\big)'(x) = \sqrt{f(x)}$.

c) Si $\varphi(f) = \varphi(g)$, en dérivant on obtient $\sqrt{f} = \sqrt{g}$, donc $f = g$. Ainsi φ est bien injective.

d) Comme $\varphi(f)$ est de classe C^1 et à dérivée positive, l'application φ n'atteint pas les fonctions continues non C^1, ni les fonctions non croissantes. Ainsi φ n'est pas surjective sur E.

2. a)b) Montrons par récurrence sur $n \geqslant 0$ la relation : $\exists \alpha_n, \beta_n \geqslant 0, \forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \alpha_n x^{\beta_n}$:

- C'est vrai pour $n = 0$ en prenant $\alpha_0 = 1$ et $\beta_0 = 0$.
- Si c'est vrai pour n, alors :

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{\alpha_n t^{\beta_n}}\ \mathrm{d}t = \left[\sqrt{\alpha_n}\,\frac{t^{\frac{\beta_n}{2}+1}}{\frac{\beta_n}{2}+1}\right]_0^x = \frac{\sqrt{\alpha_n}}{\frac{\beta_n}{2}+1}x^{\frac{\beta_n}{2}+1}.$$

Donc, la relation est vraie à l'ordre $n+1$ en prenant $\alpha_{n+1} = \dfrac{\sqrt{\alpha_n}}{\frac{\beta_n}{2}+1}$ et $\beta_{n+1} = \dfrac{\beta_n}{2} + 1$.

c) La suite (β_n) est arithmético-géométrique ; le calcul habituel donne alors bien $\beta_n = 2 - 2^{1-n}$ (on peut aussi le montrer par récurrence).

3. a) D'après la question précédente, on a : $\alpha_{n+1} = \dfrac{\sqrt{\alpha_n}}{2 - 2^{-n}}$ $(*)$, donc :

$$\frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}} = \sqrt{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}} \times \frac{2-2^{-n}}{2-2^{-n-1}} \leqslant \sqrt{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}}$$

puisque $0 < 2 - 2^{-n} \leqslant 2 - 2^{-n-1}$.

b) Comme $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = \dfrac{1}{2}$, par récurrence évidente, on en déduit que $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \leqslant 1$. Donc la suite (α_n) est décroissante ; or, par définition, elle est minorée par 0 ; d'après le théorème de la limite monotone, elle converge donc vers une limite $\ell \geqslant 0$. En passant à la limite dans la relation $(*)$, on en déduit que $\ell = \dfrac{\sqrt{\ell}}{2}$, soit $\ell = 0$ ou $\ell = \dfrac{1}{4}$. Comme la suite (α_n) est décroissante, la limite est $\dfrac{1}{4}$ si et seulement si cette suite est minorée par $\dfrac{1}{4}$; ceci se vérifie facilement par récurrence

(pour l'hérédité, $\alpha_{n+1} = \dfrac{\sqrt{\alpha_n}}{2 - 2^{-n}} \geqslant \dfrac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{2} = \dfrac{1}{4}$). Donc $\lim(\alpha_n) = \dfrac{1}{4}$.

4. La fonction $x \mapsto \left| f_n(x) - \dfrac{1}{4}x^2 \right|$ est continue sur le segment $[0, 1]$ (comme composée de fonctions continues), donc elle est bornée et atteint ses bornes ; en particulier, elle admet un maximum M_n.
Pour tout $x \in [0, 1]$, par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\left| f_n(x) - \frac{1}{4}x^2 \right| \leqslant \left| \alpha_n - \frac{1}{4} \right| \times \underbrace{\left| x^{\beta_n} \right|}_{\leqslant 1} + \left| \frac{1}{4}x^{\beta_n} - \frac{1}{4}x^2 \right| \leqslant \underbrace{\left| \alpha_n - \frac{1}{4} \right|}_{\longrightarrow 0} + \frac{1}{4} \max_{x \in [0,1]} \left| x^{\beta_n} - x^2 \right|.$$

Il suffit donc de montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \max\limits_{x \in [0,1]} |g_n(x)| = 0$, où l'on a posé $g_n(x) = x^{\beta_n} - x^2$. On étudie les variations de g_n.
Le maximum de g_n est atteint en $\left(\dfrac{\beta_n}{2} \right)^{1/(2 - \beta_n)}$.
D'où :

$$\max_{x \in [0,1]} \left| x^{\beta_n} - x^2 \right| = g_n\left(\left(\frac{\beta_n}{2} \right)^{\frac{1}{2 - \beta_n}} \right) = \exp\left(\frac{\beta_n}{2 - \beta_n} \ln \frac{\beta_n}{2} \right) - \exp\left(\frac{2}{2 - \beta_n} \ln \frac{\beta_n}{2} \right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} = 0,$$

puisque $\dfrac{\beta_n}{2} \longrightarrow 1$ entraîne : $\ln \dfrac{\beta_n}{2} \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{\beta_n}{2} - 1 = \dfrac{\beta_n - 2}{2}$.

Exercice 1.3

Pour tout $x > 0$, on pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x + k}$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n}(x))_n$ et $(S_{2n+1}(x))_n$ sont adjacentes. On note $f(x)$ leur limite commune.

2. a) Soit a un réel strictement positif. Montrer que :

$$\forall (x, x_0) \in [a, +\infty[^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |S_n(x) - S_n(x_0)| \leqslant |x - x_0| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(a + k)^2}.$$

b) En déduire que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Trouver une relation entre $f(x + 1)$ et $f(x)$. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

4. Montrer que : $\forall x > 0,\ f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1 + t}\, \mathrm{d}t$.

Solution de l'exercice 1.3

1. Posons $b_n = \dfrac{1}{x+n}$.
La suite $(S_{2n}(x))$ décroît car $S_{2(n+1)}(x) - S_{2n}(x) = b_{2n+2} - b_{2n+1} \leqslant 0$ car (b_n) décroissante.
La suite $(S_{2n+1}(x))$ croît car $S_{2(n+1)+1}(x) - S_{2n+1}(x) = -b_{2n+3} + b_{2n+2} \geqslant 0$ car (b_n) décroissante.
On a : $S_{2n+1}(x) - S_{2n}(x) = -b_{2n+1}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Les suites $(S_{2n}(x))$ et $(S_{2n+1}(x))$ sont adjacentes ; donc elles convergent vers la même limite $f(x)$. Et donc la suite $(S_n(x))$ aussi.

2. a) Par l'inégalité triangulaire, on a :

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{1}{x+k} - \frac{1}{x_0+k} \right| = |x - x_0| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)(x_0+k)} \leqslant |x-x_0| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(a+k)^2}.$$

b) Par comparaison avec une série de Riemann convergente, la série $\sum \dfrac{1}{(a+n)^2}$ converge, donc on peut passer à la limite dans l'inégalité large précédente, quand n tend vers $+\infty$, ce qui donne :

$$|f(x_0) - f(x)| \leqslant |x - x_0| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+n)^2}.$$

Si on prend $x_0 \geqslant a$, le théorème d'encadrement donne $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ *i.e.* f continue en x_0.
Comme f est continue en tout point $x_0 \geqslant a$ ceci pour tout $a > 0$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque la continuité est une notion locale.

3. Par décalage d'indice, on a $f(x+1) = \dfrac{1}{x} - f(x)$, soit $f(x) = \dfrac{1}{x} - f(x+1)$. Comme f est continue en 1, $f(x+1)$ converge vers $f(1)$ quand x tend vers 0^+.
Donc $f(x+1)$ (qui converge) est négligeable devant $\dfrac{1}{x}$ (qui tend vers $+\infty$). Ainsi $f(x) \sim \dfrac{1}{x}$ au voisinage de 0^+.

4. Pour tout $t \in [0,1[$, on a $\dfrac{t^{x-1}}{1+t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{x-1+n}$. Comme $x - 1 + n > -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut intégrer :

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{x-1+k} = \sum_{k=0}^{n} \left[(-1)^k \frac{t^{x+k}}{x+k} \right]_0^1 = S_n(x).$$

Donc :

$$\left| \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, \mathrm{d}t - S_n(x) \right| = \left| \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k t^{x-1+k} \right| = \int_0^1 \frac{t^{x+n}}{1+t}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{x+n}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{x+n+1}.$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on a donc bien $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, \mathrm{d}t$ pour tout $x > 0$.

Exercice 1.4

1. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\, \mathrm{d}u$; en donner une expression à l'aide de la fonction Γ.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nt}}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$ est convergente. On la note u_n.
Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Pour tout $t \in]0,1]$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $a_k(t) = \dfrac{(-n)^k t^k}{\sqrt{t} \times k!}$.

a) Établir la convergence de la série $\sum_{k \geqslant 0} a_k(t)$ et préciser sa somme.

b) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de l'intégrale $\int_0^1 \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k(t)\ \mathrm{d}t$. On la note Z_N.

c) Trouver une série convergente $\sum_{k \geqslant 1} A_k$ telle que : $\forall k \geqslant 1,\ \forall t \in]0,1],\ |a_k(t)| \leqslant A_k$.

d) En déduire que la suite $(Z_N)_N$ converge et déterminer sa limite.

e) En déduire que $u_n = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k n^k}{k!(2k+1)}$.

Solution de l'exercice 1.4

1. On reconnaît que : $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}} du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, qui converge bien d'après le cours.

2. Pour $n = 0$ l'intégrale u_0 (usuelle) converge.
Si $n \geqslant 1$, par changement de variable $u = nt$ (C^1 strictement croissant), on a :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u.$$

D'après la question 1, cette intégrale converge et, de plus, on a :

$$u_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, par théorème de comparaison (tout est positif), la série $\sum u_n$ diverge.

3. a) On reconnaît une série exponentielle, donc elle converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(t) = \frac{\mathrm{e}^{-nt}}{\sqrt{t}}$.

b) D'après la question précédente, la série converge, et l'on a :

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k(t) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(t)\right) - a_0(t) - \sum_{k=1}^{N} a_k(t) = \frac{\mathrm{e}^{-nt} - 1}{\sqrt{t}} - \sum_{k=1}^{N} \frac{(-n)^k t^{k-\frac{1}{2}}}{k!}$$

Donc la fonction $t \mapsto \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k(t)$ est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0 (par 0 puisque $\mathrm{e}^{-nt} - 1 \underset{t \to 0}{\sim} -nt$).
Ceci prouve l'existence de son intégrale.

c) Comme $|t^{k-\frac{1}{2}}| \leqslant 1$ pour tout $k \geqslant 1$ et tout $t \in]0,1]$, on voit que $A_k = \frac{n^k}{k!}$ convient (série exponentielle).

d) Par l'inégalité triangulaire on a : $\forall t \in]0,1]$, $\left|\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k(t)\right| \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} A_k$.
Par l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégration, on en déduit que :

$$\left|\int_0^1 \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k(t)\right|\ \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} A_k.$$

Le majorant tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, car c'est le reste d'une série convergente, donc, par le théorème d'encadrement, on a : $\int_0^1 \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k(t)\ \mathrm{d}t \to 0$.

e) Ainsi :

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nt}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(t)\ \mathrm{d}t \text{ (question 3.a)} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{N} a_k(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^1 \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k(t)\ \mathrm{d}t \\ &= 2\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k n^k}{k!(2k+1)} + \int_0^1 \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k(t)\ \mathrm{d}t \longrightarrow 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k n^k}{k!(2k+1)} \text{ (question 3.d).} \end{aligned}$$

Exercice 1.5

Soit f une fonction continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$ dont l'intégrale est divergente sur $[0,+\infty[$. On définit la fonction F sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Justifier que F est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe un unique réel y tel que $y > x$ et tel que :

$$\int_x^y f(t)dt = 1.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on pose $h(x) = y$.

3. Dans cette question, on prend pour f la restriction à $\mathbb{R}_+$ de la fonction exponentielle $u \longmapsto e^u$. Déterminer dans ce cas la fonction h.

4. On note G la fonction réciproque de F.
a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, exprimer $h(x)$ à l'aide des fonctions F et G.
b) En déduire que h est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
c) Étudier les variations de h.
d) On suppose de plus que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que la fonction $\dfrac{1}{f}$ est convexe. Montrer alors que h est convexe.

Solution de l'exercice 1.5

1. Comme F est une primitive d'une fonction continue, elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. La fonction f étant strictement positive, on en déduit que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On a $F(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ puisque l'intégrale de f est divergente sur $\mathbb{R}_+$. Il s'ensuit que F réalise bien une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. Il suffit de considérer la fonction φ donnée par $\varphi(t) = F(t) - F(x)$ qui est continue, strictement croissante, telle que $\varphi(x) = 0$ et telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$. Il en résulte qu'il existe un unique point $y > x$ tel que $\varphi(y) = 1$.

3. Les hypothèses de l'énoncé sont bien vérifiée dans ce cas, et on a $e^{h(x)} - e^x = 1$, d'où $h(x) = \ln(1 + e^x)$.

4. a) Comme $F(h(x)) = 1 + F(x) \in \mathbb{R}_+$, on peut composer par G et on obtient $h(x) = G(1 + F(x))$.

b) On remarque que G est C^1 car $F' = f \neq 0$ est continue. La formule précédente et les règles de dérivation des fonctions composées nous assurent que la fonction h est dérivable. En utilisant l'égalité $F(h(x)) = 1 + F(x)$, on trouve $h'(x) = \dfrac{f(x)}{f(h(x))}$ ce qui entraîne la continuité de h'.

c) Avec la formule précédente, on constate que h' est strictement positive. La fonction h est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

d) La formule donnant la dérivée de h montre que h est deux fois dérivable et que l'on a après simplifications :

$$h"(x) = \frac{f'(x)f(h(x))^2 - f'(h(x))f(x)^2}{f(h(x))^3}.$$

La convexité de la fonction $\dfrac{1}{f}$ nous dit que la fonction $\dfrac{f'}{f^2}$ est décroissante. Comme $x < h(x)$, il vient $\dfrac{f'(x)}{f(x)^2} \geqslant \dfrac{f'(h(x))}{f(h(x))^2}$, ce qui implique la positivité de $h"$ et par suite la convexité de h.

Exercice 1.6

On rappelle que l'application $(g, h) \to \displaystyle\int_a^b g(t)h(t)dt$ définit un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions continues sur le segment $[a, b]$ à valeurs réelles (auquel g et h appartiennent).

On note E l'ensemble des fonctions f définies sur $[0, 1]$, à valeurs réelles, de classe C^2 et telles que $f(0) = 0$.

1. Soit $f \in E$. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$:

$$|f(x)| = \left| \int_0^x f'(y)dy \right|.$$

2. Soit $f \in E$.
a) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\big(f(x)\big)^2 \leqslant x \left(\int_0^1 \big(f'(y)\big)^2 dy \right).$$

b) En déduire que :

$$\int_0^1 \big(f(x)\big)^2 dx \leqslant \frac{1}{2} \int_0^1 \big(f'(y)\big)^2 dy.$$

3. Montrer que l'inégalité précédente peut être fausse si l'on retire l'hypothèse $f(0) = 0$.

4. Soit λ un réel tel que $\lambda < 2$. À l'aide des questions précédentes, montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in E$ non nulle telle que :

$$\forall x \in [0, 1],\ -f''(x) = \lambda f(x) \quad \text{et} \quad f(0) = f(1) = 0.$$

Solution de l'exercice 1.6

1. C'est le théorème fondamental du calcul intégral, en ajoutant que $f(0) = 0$.

2. a) D'après la question 1, on a :

$$\forall x \in [0,1],\ \big(f(x)\big)^2 = \left(\int_0^x f'(y)\,dy\right)^2$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au terme de droite, on obtient :

$$\begin{aligned}\left(\int_0^x f'(y)\,dy\right)^2 &\leqslant \left(\int_0^x 1\,dy\right)\left(\int_0^x \big(f'(y)\big)^2\,dy\right)\\ &\leqslant x\left(\int_0^1 \big(f'(y)\big)^2\,dy\right).\end{aligned}$$

Il s'ensuit donc que pour tout $x \in [0,1]$:

$$\big(f(x)\big)^2 \leqslant x\left(\int_0^1 \big(f'(y)\big)^2\,dy\right)$$

b) En intégrant en x l'inégalité obtenue à la question 2.a), on conclut que :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \big(f(x)\big)^2\,dx &\leqslant \left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_0^1 \big(f'(y)\big)^2 dy\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \big(f'(y)\big)^2\,dy.\end{aligned}$$

3. Pour $f(0) \neq 0$, la fonction constante $f = 1$ sur $[0,1]$ est un contre-exemple immédiat de l'inégalité précédente.

4. Supposons que le couple $(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times C^2([0,1])$, avec f non nulle, satisfait l'équation donnée. Alors en multipliant la première équation par $f(x)$ et en intégrant sur $[0,1]$, on obtient :

$$\int_0^1 -f(x)f''(x)dx = \lambda\int_0^1 \big(f(x)\big)^2 dx.$$

En intégrant par parties le membre de gauche et en utilisant $f(0) = f(1) = 0$, il vient :

$$\int_0^1 \big(f'(x)\big)^2\,dx = \lambda\int_0^1 \big(f(x)\big)^2 dx.$$

En utilisant l'inégalité de la question 2.b), on déduit donc :

$$\int_0^1 \big(f(x)\big)^2 dx \leqslant \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \big(f(x)\big)^2 dx.$$

Comme f est non nulle et $C^2([0,1])$, f^2 est positive, non nulle et continue dans $[0,1]$. Par conséquent, il vient : $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2 dx > 0$ et donc $\lambda/2 \geqslant 1$. Le problème n'admet donc pas de solution pour $\lambda < 2$.

Exercice 1.7

Soit f une fonction définie et continue sur le segment $[0,1]$ à valeurs réelles.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme $B_n(f)$ par :

$$B_n(f)(X) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}$$

1. Soit $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, ..., X_n$, suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre x, et on pose :

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

a) Exprimer $E(\overline{X}_n)$, $V(\overline{X}_n)$ et $E(f(\overline{X}_n))$ en fonction de x, n et du polynôme $B_n(f)$.

b) En déduire l'encadrement :

$$\sum_{k=0}^{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \sqrt{V(\overline{X}_n)} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

2. Soit α un réel vérifiant $0 < \alpha \leqslant 1$.

a) Montrer que pour tout réel $\lambda \geqslant 0$, on a : $\lambda^\alpha \leqslant 1 + \lambda$.

b) Pour tous $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,n]\!]$, établir l'inégalité :

$$\left| x - \frac{k}{n} \right|^\alpha \leqslant n^{-\frac{\alpha}{2}} \left(1 + \sqrt{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \right)$$

3. On suppose que la fonction f vérifie la propriété suivante : il existe $\alpha \in]0,1]$ et $K > 0$ tel que

$$\forall (y,z) \in [0,1]^2, \ |f(y) - f(z)| \leqslant K|y - z|^\alpha$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - B_n(f)(x)| \leqslant \frac{3K}{2} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$$

Solution de l'exercice 1.7

1. a) Par le cours et indépendance, $E(\overline{X}_n) = x$ et $V(\overline{X}_n) = \dfrac{x(1-x)}{n} \leqslant \dfrac{1}{4n}$.

Par le théorème de transfert et puisque les valeurs prises par les $\overline{X}_n$ sont les $\dfrac{k}{n}$ avec $k \in [\![0,n]\!]$, on a :

$$E(f(\overline{X}_n)) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P(n\overline{X}_n = k) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = B_n(f)(x)$$

b) Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, on a :

$$0 \leqslant V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 \Rightarrow \big(E(X)\big)^2 \leqslant E(X^2)$$

En appliquant à $X = |\overline{X}_n - x|$, il vient : $\big(E(|\overline{X}_n - x|)\big)^2 \leqslant E((\overline{X}_n - x)^2) = V(\overline{X}_n)$. On utilise la question précédente pour obtenir :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right)^2 \leqslant V(\overline{X}_n)$$

L'autre inégalité à été démontrée lors de la première question.

2. a) On distingue deux cas :
- si $\lambda \in [0,1]$, alors comme $\alpha > 0$, $\lambda^\alpha \leqslant 1 \leqslant 1 + \lambda$;
- sinon $\lambda > 1$ et donc $\lambda^\alpha \leqslant \lambda$ (car $\alpha \leqslant 1$) et $\lambda^\alpha \leqslant 1 + \lambda$.

On a ainsi, pour tout $\lambda \geqslant 0$, $\lambda^\alpha \leqslant 1 + \lambda$.

b) On utilise la relation précédente, avec $\lambda = \sqrt{n}\left|x - \frac{k}{n}\right|$. Il vient :

$$\left(\sqrt{n}\left|x - \frac{k}{n}\right|\right)^{\alpha} \leqslant 1 + \sqrt{n}\left|x - \frac{k}{n}\right|$$

Ainsi,

$$\forall x \in]0,1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0,n]\!], \left|x - \frac{k}{n}\right|^{\alpha} \leqslant n^{-\frac{\alpha}{2}}\left(1 + \sqrt{n}\left|x - \frac{k}{n}\right|\right)$$

3. En utilisant la formule du binôme avec $(x + (1-x))^n$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

On en déduit que :

$$f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

Par l'inégalité triangulaire puis avec l'hypothèse faite sur f, on a :

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f)(x)| &\leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant K\sum_{k=0}^{n}\left|x - \frac{k}{n}\right|^{\alpha}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\ &\leqslant \frac{K}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\sum_{k=0}^{n}\left(1 + \sqrt{n}\left|x - \frac{k}{n}\right|\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\ &= \frac{K}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\left(1 + \sqrt{n}\sum_{k=0}^{n}\left|x - \frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right) \end{aligned}$$

En utilisant la question 1.b, on peut majorer la somme et obtenir ainsi, $|f(x) - B_n(f)(x)| \leqslant \frac{3K}{2}\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$.
Il suffit de passer à la borne supérieure sur $x \in]0,1[$ (qui est la même que celle sur $[0,1]$ par continuité des fonctions) pour conclure que :

$$\sup_{x\in[0,1]}|f(x) - B_n(f)(x)| = \|f - B_n(f)\|_{\infty} \leqslant \frac{3K}{2}\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$$

Exercice 1.8

1. a) Montrer que pour tout réel t et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

b) En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$(\star) \quad \arctan x = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\left|\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leqslant \frac{1}{2n+3}$.

2. a) Soit $x \in [0,1]$. En utilisant le changement de variable $t = x\cos\theta$, que l'on justifiera, montrer que :

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \frac{x}{1+x^2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta}{1-\frac{x^2}{1+x^2}\sin^2\theta}d\theta$$

b) Soit $x \in [0,1]$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\arctan x = \frac{x}{1+x^2}\Big(\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{x^2}{1+x^2}\Big)^k \int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1}\theta\, d\theta\Big) + R_n(x)$$

avec $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(\theta)d\theta$.

a) Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de I_{2n+1} en fonction de n.

4. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$(\star\star) \quad \arctan x = \frac{x}{1+x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\Big(\frac{x^2}{1+x^2}\Big)^n$$

5. a) Laquelle des relations $(\star)$ et $(\star\star)$ paraît la plus efficace pour calculer une valeur approchée de $\dfrac{\pi}{4}$?

b) La fonction *factorial* de Scilab permet de calculer les factorielles des entiers naturels. Écrire un script Scilab qui donne une valeur approchée de $\dfrac{\pi}{4}$ à 10^{-5} près. On donne : $\dfrac{5\ln 10}{\ln 2} \approx 16,60$.

Solution de l'exercice 1.8

1. a) Il s'agit de l'écriture de la somme partielle d'ordre n d'une série géométrique de raison $-t^2$.

b) On intègre l'égalité précédente entre 0 et x ; il vient, la somme étant finie,

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$$

Or $\Big|\displaystyle\int_0^x (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\Big| \leqslant \int_0^x t^{2n+2}dt = \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leqslant \frac{1}{2n+3}$. Il reste à faire tendre n vers $+\infty$.

c) On prend $x = 1$ pour obtenir l'égalité demandée. L'inégalité demandée a été démontrée ci-dessus.

2. a) Le changement de variable proposé est de classe C^1 de $[0,x]$ sur $[0,\pi/2]$. On obtient :

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\pi/2}\frac{x\sin\theta}{1+x^2\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{x\sin\theta}{1+x^2-x^2\sin^2\theta}d\theta = \frac{x}{1+x^2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta}{1-\frac{x^2}{1+x^2}\sin^2\theta}d\theta$$

b) On écrit, pour $n \geqslant 0$

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{1+x^2}\sin^2\theta} = \sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{x^2}{1+x^2}\Big)^k\sin^{2k}\theta + \Big(\frac{x^2}{1+x^2}\Big)^{n+1}\frac{\sin^{2n+2}\theta}{1-\frac{x^2}{1+x^2}\sin^2\theta}$$

puis, en intégrant

$$\arctan x = \frac{x}{1+x^2}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2k+1}\theta\Big(\frac{x^2}{1+x^2}\Big)^k d\theta + R_n(x)$$

avec

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &= \frac{x}{1+x^2}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{n+1}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{2n+3}\theta}{1-\frac{x^2}{1+x^2}\sin^2\theta}d\theta \\ &\leqslant \frac{x}{1+x^2}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{n+1}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1-\frac{x^2}{1+x^2}}d\theta = \frac{x}{1+x^2}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{n+1}(1+x^2)\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Lorsque x varie sur $[0,1]$, on a $0<\dfrac{x^2}{1+x^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$ ce qui donne $|R_n(x)|\leqslant\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\leqslant\dfrac{1}{2^n}$.

3. Il s'agit des intégrales de Wallis classiques. Il vient $I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n$. Comme $I_1=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta=1$, on obtient :

$$I_{2n+1}=\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}=\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

4. En faisant tendre n vers $+\infty$, les questions précédentes démontrent que :

$$\arctan x=\frac{x}{1+x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n$$

5. a) Au vu des majorations obtenues dans les questions 2 et 4, mieux vaut utiliser la relation $(\star\star)$.

b) On résout l'inéquation $\dfrac{1}{2^n}\leqslant 10^{-5}$ soit $n\geqslant\dfrac{5\ln 10}{\ln 2}\approx 16.60$. On prend donc $n=17$ et on calcule $\frac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{17}\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Voici une proposition :

```
1. s=1 // accumulateur
2. for n=1:17 // boucle
3.   s=s+(2^(n)*factorial(n)^2)/factorial(2*n+1) // définition
4. end
5. disp (s/2) // affichage du résultat
```

Exercice 1.9

On admet que $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1}\frac{(-1)^{p+1}}{p^2}$ converge. Déterminer sa somme.

2. a) Montrer que pour tout $x\in[0,1]$, pour tout entier $p\geqslant 1$, on a :

$$\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}+(-1)^{p+1}\int_0^x\frac{t^{p+1}}{1+t}dt$$

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé. Montrer que pour tout entier $p\geqslant 1$ et tout $x\in[0,1]$, on a :

$$\ln(1+x^n)=\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k+1}\frac{x^{nk}}{k}+R_p(x)\ \text{ avec } |R_p(x)|\leqslant\frac{1}{p+2}$$

3. a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1\ln(1+x^n)dx=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(nk+1)}$.

b) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left| n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(nk+1)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \right| \leqslant \frac{C}{n}$$

c) En déduire un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$.
Déduire de la question précédente que

$$u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Solution de l'exercice 1.9

1. La série $\displaystyle\sum_{p \geqslant 1} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2}$ est absolument convergente, donc convergente. Soit n fixé.

$$S'_{2n+1} = \sum_{p=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2} = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^2}, \quad S_{2n+1} = \sum_{p=1}^{2n+1} \frac{1}{p^2} = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^2}$$

En soustrayant les deux équations puis en prenant la limite lorsque n tend vers $+\infty$, il vient :

$$-S + \frac{\pi^2}{6} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2} \Rightarrow S = \frac{\pi^2}{12}$$

2. a) On utilise simplement :

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{p+1} t^{p+1}}{1+t}$$

puis on intègre cette égalité entre 0 et x.
b) On remplace x par x^n. Ainsi :

$$\ln(1+x^n) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{n(k+1)}}{k+1} + (-1)^{p+1} \int_0^{x^n} \frac{t^{p+1}}{1+t} dt.$$

Comme $0 \leqslant \left| \displaystyle\int_0^1 \frac{(-1)^{p+1} t^{p+1}}{1+t} dt \right| \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^{p+1} dt = \frac{1}{p+2}$, l'égalité demandée vient immédiatement, puisque $0 \leqslant x^n \leqslant 1$.

3. a) On reprend la question 2.b). On a $\ln(1+x^n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \frac{x^{nk}}{k} + R_p(x^n)$, avec $|R_p(x^n)| \leqslant \dfrac{1}{p+2}$.
En intégrant, il vient :

$$\int_0^1 \ln(1+x^n)dx = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \frac{1}{k(nk+1)} + \int_0^1 R_p(x^n)dx, \text{ avec } \left| \int_0^1 R_p(x^n)dx \right| \leqslant \frac{1}{p+2}$$

Il reste à faire tendre p vers $+\infty$.
b) Chacune des séries étant convergente, il vient :

$$\left| n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(nk+1)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \right| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2(nk+1)} \right| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = \frac{C}{n}$$

c) Ainsi, $\left|nI_n - \dfrac{\pi^2}{12}\right| \leqslant \dfrac{C}{n}$, ce qui entraîne que $I_n \sim \dfrac{\pi^2}{12n}$.

4. La suite (u_n) est bien définie. Une intégration par parties donne :

$$I_n = [x\ln(1+x^n)]_0^1 - n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx = \ln 2 - n(1-u_n)$$

Ainsi, $u_n = 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + \dfrac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 1.10

On rappelle que :

- la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall\, x>0,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$;
- pour tout $x>0$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

On admet sans démonstration que la fonction Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que l'on a :

$$\forall\, x>0,\ \forall\, k\in\mathbf{N}^*,\ \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k\, t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad \Gamma^{(0)} = \Gamma\,.$$

1.a) Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Montrer que f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que pour tout $x>0$, on a $\Gamma(x)>0$.

c) Étudier la convexité de la fonction Γ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.a) Établir l'existence d'un réel $\theta \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(\theta) = 0$.

b) Quel est le sens de variation de la fonction Γ sur $\mathbb{R}_+^*$?

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\Gamma(x) = +\infty$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Gamma(x) = +\infty$.

d) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction Γ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. La fonction $\Psi = \dfrac{\Gamma'}{\Gamma}$ est représentée en *Scilab* par `dlgamma`. Le programme suivant renvoie la valeur 1.4616699.

```
function y=Psi(x); y=dlgamma(x); endfunction
a=1; b=2;
while (b-a)> 0.001 do
    if Psi((a+b)/2)> 0 then b=(a+b)/2; end
    if Psi((a+b)/2)< 0 then a=(a+b)/2; end
    if Psi((a+b)/2)==0 then b=(a+b)/2; a=(a+b)/2; end
end
disp ((a+b)/2)
```

Le réel renvoyé par le programme est une valeur approchée d'une certaine quantité. Laquelle ? Expliquer.

Solution de l'exercice 1.10

1.a) Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$. On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{B\to+\infty} F(B) - F(0) = 0$.

Or, pour tout réel $\geqslant 0$, $F'(x) = f(x) \geqslant 0$, donc la fonction F est croissante et puisque $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} F(B) = F(0)$, la fonction F est constante sur $\mathbb{R}_+$ et par suite sa dérivée f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $x > 0$. La fonction $h_x : t \longmapsto t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par suite, $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_x(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. D'après la question précédente, on ne peut avoir $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_x(t)\,\mathrm{d}t = 0$ que si h_x est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui n'est pas le cas. Finalement, pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x) > 0$.

c) Soit $x > 0$. La fonction $t \longmapsto (\ln t)^2\, t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue, positive et non nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc : $\forall x > 0,\ \Gamma''(x) > 0$ et la fonction Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.a) On a $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. La fonction Γ est continue sur $[1, 2]$ et dérivable sur $]1, 2[$; le théorème de Rolle assure alors l'existence d'un réel $\theta \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(\theta) = 0$.

b) On sait que la fonction Γ'' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction Γ' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et puisqu'il existe un réel θ tel que $\Gamma'(\theta) = 0$, le théorème des valeurs intermédiaires assure que θ est l'unique réel qui annule Γ'. Par suite, $\begin{cases} \Gamma'(x) < 0 & \text{si } 0 < x < \theta \\ \Gamma'(x) > 0 & \text{si } x > \theta \end{cases}$. Il en résulte que la fonction Γ est strictement décroissante sur $]\,0, \theta\,[$ et strictement croissante sur $]\,\theta, +\infty[$ et admet donc un minimum global en θ.

c) Au voisinage de 0, on a $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\Gamma(1)}{x} = \dfrac{1}{x}$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = +\infty$.

Au voisinage de $+\infty$, la fonction Γ est croissante donc admet une limite, finie ou infinie.

Or, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ a pour limite $+\infty$, donc on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$.

d) La représentation graphique de la fonction Γ se déduit aisément des questions précédentes.

3. La fonction Ψ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas ($\Gamma(x) > 0$). En particulier, la fonction Ψ est continue sur $[1, 2]$ et d'après la question 2b), la fonction Ψ change de signe sur $[1, 2]$ et s'annule (une et une seule fois) en $\theta \in]1, 2[$. Par suite, le programme *Scilab* proposé permet par un raisonnement dichotomique de renvoyer une valeur approchée de θ.

Exercice 1.11

On note E l'ensemble des fonctions réelles f définies et de classe C^1 sur $[0, 1]$ telles que $f(0) = f(1) = 0$.

1. Donner un équivalent de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sin(\pi t)}$ en $t_0 = 0$ et en $t_0 = 1$.

2. Soit f une fonction de E.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t)\, f'(t)\, dt$ converge. On note alors $I(f)$ la valeur de cette intégrale.

b) Montrer que :

$$I(f) = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{\big(f(t)\big)^2}{\sin^2(\pi t)}dt$$

3. Établir l'inégalité suivante :

$$\int_0^1 \big(f'(t)\big)^2 dt \geqslant \pi^2 \int_0^1 \big(f(t)\big)^2 dt \qquad (*)$$

On pourra considérer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(\pi \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) - f'(t)\right)^2 dt$.

4. a) Montrer que le cas d'égalité dans l'inégalité précédente est obtenu si et seulement si :

$$\forall t \in [0,1], \pi \cos(\pi t) f(t) = f'(t) \sin(\pi t)$$

b) En considérant la fonction λ définie sur $]0,1[$ par :

$$\forall\, t \in]0,1[,\ \lambda(t) = \frac{f(t)}{\sin(\pi t)}$$

déterminer l'ensemble des fonctions de E qui réalisent le cas d'égalité dans l'inégalité $(*)$.

Solution de l'exercice 1.11

1. Au voisinage de 0, $\sin t \sim t$. Donc, $\dfrac{1}{\sin(\pi t)} \sim \dfrac{1}{\pi t}$.
Pour étudier la fonction au voisinage de 1, on effectue le changement de variable $u = 1 - t$ qui nous ramène au voisinage de 0. Ainsi, $\dfrac{1}{\sin(\pi t)} \sim \dfrac{1}{\pi(1-t)}$ au voisinage de 1.

2. a) La fonction $t \longmapsto \dfrac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) f'(t)$ est continue sur $]0,1[$. Au voisinage de 0, elle est équivalente à

$$\frac{f'(t)}{\pi} \times \frac{f(t)}{t}$$

Or, f est dérivable en 0 et $f(0) = 0$, donc $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t)}{t} = f'(0)$. En outre, f est de classe C^1 en 0, donc :

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) f'(t) = \frac{(f'(0))^2}{\pi}$$

De même, $\dfrac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) f'(t) \sim -\dfrac{f'(t)}{\pi} \times \dfrac{f(t)}{t-1}$. Donc : $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) f'(t) = -\dfrac{(f'(1))^2}{\pi}$.
L'intégrale proposée est donc faussement impropre.

b) On intègre par parties sur $[a, 1-a]$, $a \in]0, \frac{1}{2}[$, puis on fait tendre a vers 0. Cela donne le résultat demandé (limite du crochet en faisant apparaître des taux de variation).

$$\int_a^{1-a} \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) f'(t)\, dt = \frac{\cos(\pi(1-a))}{2\sin(\pi(1-a))} f^2(1-a) - \frac{\cos(\pi a)}{2\sin(\pi a)} f^2(a) + \frac{\pi}{2} \int_a^{1-a} \frac{f^2(t)}{\sin^2(\pi t)} dt$$

Or,

$$\lim_{a\to 0} \left(\frac{\cos(\pi(1-a))}{2\sin(\pi(1-a))} f^2(1-a) - \frac{\cos(\pi a)}{2\sin(\pi a)} f^2(a) \right) = -\frac{f'(1) f(1)}{2\pi} + \frac{f'(0) f(0)}{2\pi} = 0$$

3. On développe l'intégrale proposée. La positivité de l'intégrale assure la positivité du tout et l'un des termes est $I(f)$, soit :

$$\int_0^1 \left(\pi \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) - f'(t)\right)^2 dt = \pi^2 \int_0^1 \frac{\cos^2(\pi t)}{\sin^2(\pi t)} f^2(t)\, dt - 2\pi \int_0^1 \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) f'(t)\, dt + \int_0^1 \left(f'\right)^2 (t)\, dt$$

$$\int_0^1 (f'(t))^2 (t)\, dt \geqslant \pi^2 \int_0^1 \frac{f^2(t)}{\sin^2(\pi t)} dt - \pi^2 \int_0^1 \frac{\cos^2(\pi t)}{\sin^2(\pi t)} f^2(t)\, dt = \pi^2 \int_0^1 (f(t))^2 dt.$$

4. a) Le cas d'égalité est obtenu si et seulement si l'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle donc si et seulement si c'est la fonction nulle, soit $\forall t \in]0,1[$, $\pi \cos(\pi t) f(t) = f'(t) \sin(\pi t)$. Par continuité, cette égalité peut être étendue à $[0,1]$.

b) Si $f \in E$ vérifie le cas d'égalité, alors la fonction λ est dérivable sur $]0,1[$ et on a :

$$\forall t \in]0,1[, \lambda'(t) = \frac{-\pi\cos(\pi t) f(t) + \sin(\pi t) f'(t)}{\sin^2(\pi t)} = 0.$$

On en déduit alors que λ est constante sur $]0,1[$. Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in]0,1[,\ f(t) = c\sin(\pi t)$. Cette égalité est encore vraie en 0 et en 1 car $f(0) = f(1) = 0$.
On vérifie aisément la réciproque. En effet, s'il existe $c \in\ R$ tel que : $\forall t \in [0,1]$, $f(t) = c\sin(\pi t)$, alors on a :

$$\int_0^1 \left(\pi\frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) - f^{'}(t)\right)^2 dt = \int_0^1 (\pi\cos(\pi t) - \pi\cos(\pi t))^2\, dt = 0$$

Finalement, les fonctions de E qui réalisent le cas d'égalité dans l'inégalité $(\star)$ sont celles qui sont proportionnelles à $t \mapsto \sin(\pi t)$.

Exercice 1.12

On définit la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$C_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

1. Proposer une fonction Scilab d'en-tête `function y=C(n)` renvoyant la valeur de C_n. On pourra éventuellement utiliser un vecteur u contenant les réels $C_0, \ldots, C_k$.

Soit $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\gamma_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \gamma_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2}\gamma_n$$

Pour tout entier naturel n , on note P_n la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \gamma_{n-k} x^{k+1}$$

2. Pour tout entier naturel n et tout réel x non nul, montrer que $x^{n+2} P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) = P_n(x)$.

3. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $P_n'(1) = \dfrac{n+2}{2} P_n(1)$.

4. Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel x , on a : $P_{n+1}'(x) = \gamma_{n+1} + 4xP_n'(x) - 2P_n(x)$.

5. Montrer alors par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $P_n(1) = \gamma_{n+1}$.

6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \gamma_n$.

7. En déduire enfin que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Solution de l'exercice 1.12

1. Une proposition :

```
function y=C(n)
u(1)=1
for k=1:n
  s=0
  for i=0:k
    s=s+u(i)* u(k-i)
  end
u(k+1)=s
end
y=u(n+1) //Cn est la (n+1)-ème composante du vecteur u
endfunction
```

2. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$x^{n+2} P_n\left(\frac{1}{x}\right) = x^{n+2} \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \gamma_{n-k} x^{-k-1} = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \gamma_{n-k} x^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n} \gamma_{n-k} \gamma_k x^{k+1} = P_n(x)$$

3. On dérive membre à membre puis on évalue en $x = 1$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, (n+2)\, x^{n+1} P_n\left(\frac{1}{x}\right) - x^n P_n'\left(\frac{1}{x}\right) = P_n'(x)$$

Donc, $(n+2)\, P_n(1) - P_n'(1) = P_n'(1)$.

4. Par définition de $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a pour tout $k \geqslant 1$, $(k+1)\,\gamma_k = (4k-2)\,\gamma_{k-1}$, donc pour tout réel x , on a :

$$\begin{aligned} P_{n+1}'(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} (k+1)\,\gamma_k \gamma_{n+1-k} x^k = \gamma_0 \gamma_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (4k-2)\,\gamma_{k-1} \gamma_{n+1-k} x^k \\ &= \gamma_{n+1} + 4x \sum_{k=0}^{n} (k+1)\,\gamma_k \gamma_{n-k} x^k - 2 \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \gamma_{n-k} x^{k+1} = \gamma_{n+1} + 4x P_n'(x) - 2P_n(x) \end{aligned}$$

5. Par récurrence. pour tout x réel, $P_0(x) = \gamma_0^2 x = x$, donc $P_0(1) = 1$. Or, $\gamma_1 = \gamma_0 = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. L'égalité précédente évaluée en 1 donne $P_{n+1}'(1) = \gamma_{n+1} + 4P_n'(1) - 2P_n(1)$ soit, en tenant compte de $\mathcal{P}(n)$: $P_{n+1}'(1) = 4P_n'(1) - \gamma_{n+1}$. Or, on sait que :

$$P_{n+1}'(1) = \frac{n+3}{2} P_{n+1}(1) \text{ et } P_n'(1) = \frac{n+2}{2} P_n(1) = \frac{n+2}{2} \gamma_{n+1}$$

Ainsi, $\dfrac{n+3}{2} P_{n+1}(1) = 4\dfrac{n+2}{2}\gamma_{n+1} - \gamma_{n+1} = (2n+3)\,\gamma_{n+1}$, d'où : $P_{n+1}(1) = \dfrac{2\,(2n+3)}{n+3}\gamma_{n+1} = \gamma_{n+2}$.

6. La formule établie à la question précédente s'écrit : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \gamma_k \gamma_{n-k} = \gamma_{n+1}$. On a en outre $\gamma_0 = 1$.

Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ C_n = \gamma_n$.

7. Notons provisoirement $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$. On a $\alpha_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{4n+2}{n+2}\alpha_n = \frac{4n+2}{n+2}\,\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1} = \alpha_{n+1}$$

Les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont donc le même premier terme et vérifient la même relation de récurrence : elles sont donc égales. Et puisque $(\gamma_n)_{n\in N} = (C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors, $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \gamma_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

Exercice 1.13

On considère l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}dt.$

1. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que cette intégrale est convergente pour tout $x > 0$.
b) Montrer que cette intégrale est convergente pour $x = 0$.

On pose alors, pour tout $x \geqslant 0, f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}dt.$

2. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que :

$$\forall x > 0,\quad f(x) = \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}du - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}du.$$

3. a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
b) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et calculer $f''(x)$ pour tout $x > 0$.
c) En déduire une relation entre $x, f(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x > 0$.
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Solution de l'exercice 1.13

1.a) Soit $x > 0$. L'application $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{x+t}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$. On effectue une intégration par parties, d'où pour $A > 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{\sin(t)}{x+t}dt &= \left[\frac{-\cos(t)}{x+t}\right]_0^A + \int_0^A \frac{\cos(t)}{(x+t)^2}dt \\ &= \frac{-\cos(A)}{A+x} + \frac{1}{x} + \int_0^A \frac{\cos(t)}{(x+t)^2}dt\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(x+t)^2}dt$ est absolument convergente donc convergente puisque

$$\forall t \geqslant 0, \frac{|\cos(t)|}{(x+t)^2} \leqslant \frac{1}{(x+t)^2}.$$

De plus, la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\dfrac{-\cos(A)}{A+x}$ est nulle. On en déduit que f est définie pour $x > 0$.

b) La fonction $t \to \dfrac{\sin t}{t}$ se prolonge continuement sur $[0, +\infty[$. Pour montrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet, on effectue une intégration par parties sur $[1, A]$ en dérivant $t \to 1/t$ et en intégrant $t \to \sin t$.

2. On applique le changement de variable affine $u = x + t$; on obtient :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u}du = \int_x^{+\infty} \left(\frac{\sin(u)\,\cos(x)}{u} - \frac{\cos(u)\,\sin(x)}{u}\right) du$$

Les intégrales étant convergentes, on peut appliquer la linéarité d'où :

$$f(x) = \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}du - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}du.$$

3. a) Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Enfin $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}du$ représente une primitive de $-\dfrac{\sin(u)}{u}$.
On en déduit que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = -\sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}du - \cos(x)\frac{\sin(x)}{x} - \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}du + \sin(x)\frac{\cos(x)}{x}.$$

D'où :

$$\forall x > 0,\ \ f'(x) = -\sin(x)\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du - \cos(x)\int_x^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}du.$$

b) Pour les mêmes raisons, on peut encore dériver d'où :

$$\forall x > 0,\ \ f''(x) = -\cos(x)\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du + \frac{\sin^2(x)}{x} + \sin(x)\int_x^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}du + \frac{\cos^2(x)}{x}.$$

c) Soit $f''(x) = -f(x) + \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

4. Les fonctions sinus et cosinus sont bornées, et les deux intégrales sont convergentes donc de limite nulle en $+\infty$, tout comme f.

Exercice 1.14

1. Soit n et m deux entiers naturels.
a) Établir la formule :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \sin(nt) - \sin(mt) = 2\sin\left(\frac{n-m}{2}t\right)\cos\left(\frac{n+m}{2}t\right)$$

b) Montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(nt)}{\sin(t)}dt$. On la note J_n.

c) Calculer J_n pour $n = 0, 1, 2$.

2. Pour tout réel $\lambda > 0$, on pose :

$$u(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(\lambda t)}{\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)}dt$$

a) Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} u(\lambda) = 0$.

b) En déduire la convergence de la suite $(J_n - J_{n-1})_{n\geqslant 1}$.

3. a) Exprimer $J_n - J_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$.

b) En déduire la convergence de la suite $(J_n)_{n\geqslant 0}$ et déterminer sa limite.

4. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p}{2p+1}$ et calculer sa somme.

Solution de l'exercice 1.14

1.a) En passant en exponentielle complexe, il vient :

$$\sin(nt) - \sin(mt) = \operatorname{Im}\left[e^{i\frac{(n+m)}{2}t}\left(e^{i\frac{(n-m)}{2}t} - e^{-i\frac{(n-m)}{2}t}\right)\right] = 2\sin\left(\frac{n-m}{2}t\right)\cos\left(\frac{n+m}{2}t\right)$$

b) La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(nt)}{\sin(t)}$ se prolonge par continuité en 0 car $\dfrac{\sin(nt)}{\sin(t)} \sim \dfrac{nt}{t} \sim n$.

c) Calculs élémentaires : $J_0 = 0$, $J_1 = \dfrac{\pi}{2}$ et $J_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(t)dt = 2$.

2. a) On intègre par parties :

$$u(\lambda)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(\lambda t)}{\cos(\frac{t}{2})}dt=\Big[\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda\cos(\frac{t}{2})}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}.\frac{\frac{1}{2}\sin(\frac{t}{2})}{\cos^2(\frac{t}{2})}dt$$

d'où :

$$|u(\lambda)|=\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(\lambda t)}{\cos(\frac{t}{2})}dt\right|\leqslant\frac{C}{\lambda}\to 0$$

car sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, les fonctions en jeu sont continues.

b) Donc,

$$J_n-J_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin(\frac{t}{2})\cos((n-\frac{1}{2})t)}{\sin(t)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos((n-\frac{1}{2})t)}{\cos(\frac{t}{2})}dt$$

tend vers 0 grâce à la question précédente.

3. a) On a :

$$\begin{aligned}J_n-J_{n-2}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin(t)\cos((n-1)t)}{\sin(t)}dt=\Big[\frac{2\sin((n-1)t)}{n-1}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\sin((n-1)\frac{\pi}{2})}{n-1}\\&=\begin{cases}0 & \text{si } n=2p+1\\ \dfrac{-2(-1)^p}{2p-1} & \text{si } n=2p\end{cases}\end{aligned}$$

b) Ainsi, $J_{2p+1}=\dfrac{\pi}{2}$ et $J_{2p}=J_{2p-1}+(J_{2p}-J_{2p-1})\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$.

4. D'après la question précédente, $J_{2n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(J_{2k}-J_{2k-2})=2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$, d'où :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$$

Exercice 1.15

Pour tout réel a tel que $|a|\neq 1$, on considère la fonction f_a définie sur $[0,\pi]$ par $f_a(x)=1-2a\cos x+a^2$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln\big(f_a(x)\big)\mathrm{d}x$ est convergente. On pose alors, pour tout $a\in\mathbb{R}, a\neq\pm 1$:

$$g(a)=\int_0^{\pi}\ln\big(f_a(x)\big)\mathrm{d}x$$

2. Montrer que $\pi\ln((1-|a|)^2)\leqslant g(a)\leqslant\pi\ln((1+|a|)^2)$. En déduire $\displaystyle\lim_{a\to 0}g(a)$.

3. Montrer que la fonction g est paire.

4. a) Montrer que $g(a)+g(-a)=\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(1-2a^2\cos(2x)+a^4)\mathrm{d}x$.

b) On pose :

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln(1-2a^2\cos(2x)+a^4)\mathrm{d}x \text{ et } J=\int_{\pi/2}^{\pi}\ln(1-2a^2\cos(2x)+a^4)\mathrm{d}x$$

À l'aide d'un changement de variable dans chaque intégrale, montrer que $g(a)+g(-a)=g(a^2)$.

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $g(a)=\dfrac{1}{2^n}g(a^{2^n})$. En déduire la valeur de $g(a)$ lorsque $|a|<1$.

d) Pour $a\neq 0$, exprimer $g(1/a)$ en fonction de $g(a)$. En déduire l'expression de $g(a)$ pour $|a|>1$.

Solution de l'exercice 1.15

1. Le trinôme du second degré $1-2a\cos x+a^2$ a pour discriminant $\Delta = 4(\cos^2 x - 1) = -4\sin^2 x$. Ainsi, si $x \in]0,\pi[$, $f_a(x) > 0$ et continue et l'intégrale est bien définie.
Au voisinage de 0, $f_a(x) \sim (1-a)^2$ et, comme $a \neq 1$, la fonction $\ln(f_a(x))$ admet un prolongement par continuité en 0.
Au voisinage de π, $f_a(x) \sim (1+a)^2$ et, comme $a \neq -1$, la fonction $\ln(f_a(x))$ admet un prolongement par continuité en π.

2. On a $-2|a| \leqslant 2a\cos x \leqslant 2|a|$ ce qui entraîne que $(1-|a|)^2 \leqslant f_a(x) \leqslant (1+|a|)^2$.
Par encadrement et croissance de l'intégrale, on obtient : $\pi\ln(1-|a|)^2 \leqslant g(a) \leqslant \pi\ln(1+|a|)^2$ et $\lim\limits_{a\to 0} g(a) = 0$.

3. Le changement de variable affine $t = \pi - x$ montre que g est une fonction paire.

4. a) On écrit :

$$\begin{aligned} g(2a) &= g(a)+g(-a) = \int_0^\pi \ln\left((1-2a\cos x+a^2)(1+2a\cos x+a^2)\right)dx \\ &= \int_0^\pi \ln(1+2a^2+a^4-4a^2\cos^2(x))dx = \int_0^\pi \ln(1+2a^2(1-2\cos^2 x)+a^4)dx \\ &= \int_0^\pi \ln(1-2a^2\cos(2x)+a^4)dx \end{aligned}$$

b) On pose $t = 2x$ dans l'intégrale I et $t = 2\pi - 2x$ dans l'intégrale J. Il vient :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\pi \ln(1-2a^2\cos(t)+a^4)\mathrm{d}t \text{ et } I = \frac{1}{2}\int_0^\pi \ln(1-2a^2\cos(t)+a^4)\mathrm{d}t$$

Donc :

$$2g(a) = g(a)+g(-a) = I+J = \int_0^\pi \ln(1-2a^2\cos(t)+a^4)\mathrm{d}t = g(a^2)$$

c) On montre que $g(a) = \dfrac{1}{2^n}g(a^{2^n})$ en utilisant la relation $g(a) = \dfrac{1}{2}g(a^2)$ et par récurrence sur n. Comme $|a|<1$, et par la question 2, $g(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n}g(a^{2^n}) = 0$.

d) On remarque que :

$$g\left(\frac{1}{a}\right) = \int_0^\pi \ln\left(1-\frac{2}{a}\cos x+\frac{1}{a^2}\right)\mathrm{d}x = g(a) - \int_0^\pi \ln(a^2)\mathrm{d}x = g(a) - \pi\ln(a^2)$$

Donc si $|a|>1$, $g(a) = g(1/a)+\pi\ln(a^2) = 2\pi\ln(|a|)$, puisque $g(\dfrac{1}{a}) = 0$ (question précédente).

Exercice 1.16

1. a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -\frac{\ln(1-x)}{1+x}dx$. On note J cette intégrale.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1-x)dx$. On note I_n cette intégrale.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad u_n = \frac{S_n}{n}.$$

a) Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

3. a) Exprimer I_n à l'aide de u_{n+1}.

b) En déduire la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de l'intégrale R_n définie par :

$$R_n = \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}\, x^{n+1}\, \ln(1-x)}{1+x} dx.$$

c) Montrer alors que la série de terme général $(-1)^n\, u_{n+1}$ converge et que :

$$J = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, u_{n+1}$$

Solution de l'exercice 1.16

1. a) La fonction $x \mapsto -\dfrac{\ln(1-x)}{1+x}$ est continue sur $[0,1[$ et au voisinage de 1, $f(x) \sim -\ln(1-x)/2$, d'intégrale de même nature que celle de $\ln(u)$ au voisinage de 0^+. Ainsi J converge.
b) De même, $x \mapsto x^n\, \ln(1-x)$ est continue sur $[0,1[$ et équivalente à $\ln(1-x)$ en 1^-, donc I_n converge.

2. a) Par comparaison série-intégrale et décroissance de la fonction $x \mapsto 1/x$, on a :

$$S_n \sim \ln n \quad \text{et} \quad u_n \sim \frac{\ln n}{n}$$

b) Pour $n \geqslant 3$, on a $u_n > 1/n$ et donc la série $\sum\limits_n u_n$ diverge.

3. a) Par intégration par parties sur $[0,a] \subset [0,1[$, en choisissant une primitive de x^n donnant une limite finie au crochet en 1, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^a x^n\, \ln(1-x) dx &= \left[\frac{x^{n+1}-1}{n+1}\, \ln(1-x)\right]_0^a + \int_0^a \frac{x^{n+1}-1}{(n+1)\,(1-x)} dx \\
&= \frac{a^{n+1}-1}{n+1}\, \ln(1-a) - \frac{1}{n+1}\int_0^a \frac{1-x^{n+1}}{1-x} dx \\
&= \frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=0}^n a^k\right](a-1)\, \ln(1-a) - \frac{1}{n+1}\int_0^a \left(\sum_{k=0}^n x^k\right) dx
\end{aligned}$$

d'où, pour $a \to 1^-$ (permutation justifiée car les sommes sont finies) :

$$I_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n x^k\right) dx = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n \left[\int_0^1 x^k dx\right] = -u_{n+1}$$

b) L'intégrale R_n converge (démonstration identique à celle de la question 1). On majore :

$$|R_n| = \left|\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}\, x^{n+1}\, \ln(1-x)}{1+x} dx\right| \leqslant \int_0^1 x^{n+1}\, |\ln(1-x)| dx = -I_{n+1} = u_{n+2}$$

car $\ln(1-x)$ est de signe constant négatif sur $[0,1[$.
Comme $u_n \sim (\ln n)/n$ qui tend vers 0 en $+\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$.

c) On utilise la série géométrique :

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^1 -\frac{\ln(1-x)}{1+x} dx = -\int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k\, x^k\, \ln(1-x) dx - \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}\, x^{n+1}\, \ln(1-x)}{1+x} dx \\
&= -\sum_{k=0}^n (-1)^k\, I_k - R_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k\, u_{k+1} - R_n
\end{aligned}$$

Comme R_n tend vers 0, la série $\sum\limits_n (-1)^n\, u_{n+1}$ converge vers J. Donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, u_{n+1} = J$.

Chapitre 2

Algèbre

Exercice 2.1

Soit un entier $n \geqslant 3$. Deux urnes U_1 et U_2 contiennent *à elles deux* n boules indiscernables. À chaque étape, on choisit de manière équiprobable un nombre de $[\![1, n]\!]$.

• Si ce nombre est inférieur ou égal au nombre de boules contenues dans U_1, on prend une boule de U_1 que l'on met dans U_2.

• Si ce nombre est strictement supérieur au nombre de boules contenues dans U_1, on prend une boule de U_2 que l'on met dans U_1.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note Z_p la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 à l'étape p. Ainsi Z_0 est la variable égale au nombre de boules initialement contenues dans U_1, Z_1 est la variable égale au nombre de boules contenues dans U_1 après une étape, etc.
Cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. a) On pose : $Y_p = \begin{pmatrix} P(Z_p = 0) \\ \vdots \\ P(Z_p = n) \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $Y_{p+1} = AY_p$.

b) Écrire un script Scilab qui simule le contenu obtenu dans U_1 au bout de 100 étapes en partant de l'état initial où U_1 contient 0 boule (on supposera que la matrice A a été rentrée).

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{n} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \frac{n-1}{n} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{n-1}{n} & 0 \\ \vdots & & \ddots & \frac{2}{n} & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix}$$

2. Montrer que 1 est valeur propre de A.

Dans les questions suivantes, on pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on note T l'endomorphisme de E dont A est la matrice dans la base canonique de E.

3. Déterminer, pour tout $P \in E$, une expression de $T(P)$ comme combinaison linéaire de XP, X^2P' et P'.

4. Soit λ réel et $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \neq \pm 1$, on a :

$$\frac{n(\lambda - x)}{1 - x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$$

b) Soit $P \in E$ tel que $T(P) = \lambda P$. On suppose que P ne s'annule pas sur $]-1,1[$.
Montrer que : $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{P'(x)}{P(x)} = \dfrac{n(\lambda - x)}{1-x^2}$. En déduire l'expression de $P(x)$ pour $x \in]-1,1[$.
c) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de T. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Solution de l'exercice 2.1

1. a) Supposons qu'à l'étape p, U_1 contienne m boules. Alors $P_{[Z_p=m]}(Z_{p+1} = m-1) = \dfrac{m}{n}$ et $P_{[Z_p=m]}(Z_{p+1} = m+1) = \dfrac{n-m}{n}$, les autres probabilités conditionnelles étant nulles.
On utilise le système complet d'événements $(P(Z_p = m))_{0 \leqslant m \leqslant n}$ pour obtenir, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:

$$P(Z_{p+1} = k) = \sum_{m=0}^{n} P_{[Z_p=m]}(Z_{p+1} = k)P(Z_p = m) = \frac{n-k+1}{n}P(Z_p = k-1) + \frac{k+1}{n}P(Z_p = k+1)$$

Ceci correspond à la matrice A de la question suivante. *Remarque :* il s'agit ici d'une chaîne de Markov avec deux barrières réfléchissantes.
b) Une proposition (c'est du cours).

```
1. X=grand(100,'markov',A,1)
2. disp(X)
```

2. Soit on dit que cette matrice est la matrice du processus de la première question, donc que la somme de chaque colonne vaut 1, soit on s'aperçoit que la somme de chaque colonne vaut 1... Ainsi 1 est valeur propre de ${}^tA$ donc de A.

3. On a pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $T(X^k) = \dfrac{k}{n}X^{k-1} + \left(1 - \dfrac{k}{n}\right)X^{k+1}$ (on le vérifie également pour $k = 0$ et $k = n$).
Donc, $T(X^k) = \dfrac{1}{n}\Big(k(X^{k-1} - X^{k+1})\Big) + X^{k+1}$, d'où :

$$T(P) = \frac{1}{n}\left(1 - X^2\right)P' + XP$$

4. a) Après calculs : $\dfrac{n(\lambda - x)}{1-x^2} = \dfrac{n(\lambda - 1)}{2} \times \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{n(\lambda+1)}{2} \times \dfrac{1}{1+x}$.

b) On a $T(P) = \lambda P$ si et seulement si $(1-x^2)P'(x) = n(\lambda - x)P(x)$. On sépare les variables

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{n(\lambda - x)}{1-x^2} = \frac{n(\lambda-1)}{2} \times \frac{1}{1-x} + \frac{n(\lambda+1)}{2} \times \frac{1}{1+x}$$

puis on intègre. Ce qui donne $P(x) = A(1+x)^{\frac{n(1+\lambda)}{2}}(1-x)^{\frac{n(1-\lambda)}{2}}$.

c) Les vecteurs propres sont des polynômes. On remarque que $\dfrac{n(1+\lambda_k)}{2} + \dfrac{n(1-\lambda_k)}{2} = n$. Posons $\dfrac{n(1+\lambda_k)}{2} = k \in [\![0,n]\!]$ soit $\lambda_k = \dfrac{2k}{n} - 1$. On obtient ainsi un polynôme propre $(1+x)^k(1-x)^{n-k}$ associé à la valeur propre $\lambda_k = \dfrac{2k}{n} - 1$, ceci pour $k \in [\![0,n]\!]$.
La matrice A possède $(n+1)$ valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable.

Exercice 2.2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et a et b deux réels distincts. On note id l'application identité de E. Dans tout l'exercice, f désigne un endomorphisme de E vérifiant :

$$f^2 - (a+b)f + ab\,id = 0 \quad (*)$$

1. Quelles sont les homothéties vérifiant la relation $(*)$?

2. a) Déterminer une condition suffisante portant sur les 2 réels a et b pour que f soit bijective. Calculer alors f^{-1}.
b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les 2 réels a et b pour que f soit un projecteur sans être une homothétie.

On suppose désormais que f n'est pas une homothétie.

3. a) Déterminer deux réels λ et μ tels que :

$$f = \lambda(f - a\,id) + \mu(f - b\,id)$$

b) En déduire qu'il existe deux projecteurs p et q tels que : $f = bp + aq$ et $q \circ p = p \circ q = 0$

4. On suppose désormais que a et b sont non nuls.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f^n = b^n p + a^n q \quad (*)$$

Pour tout entier $n > 0$, si f est bijective, on définit f^{-n} par $f^{-n} = (f^{-1})^n$.

La relation $(*)$ est-elle vérifiée pour tout $n \in \mathbb{Z}$?

Solution de l'exercice 2.2

1. On remplace $f = \lambda id$ dans $(*)$ et on obtient une équation du second degré :
$\lambda^2 - (a+b)\lambda + ab = 0$. On en déduit les solutions $f = a.id$ et $f = b.id$.

2. a) Il suffit que a et b soient tous deux non nuls pour affirmer que 0 n'est pas valeur propre et donc que f est bijective.
La relation $(*)$ entraîne : $f^{-1} = \dfrac{1}{ab}[(a+b)id - f]$.
b) Le spectre de f est inclus dans $\{a, b\}$ car $X^2 - (a+b)X + ab$ est un polynôme annulateur.
Si f est un projecteur sans être une homothétie, ses seules valeurs propres sont 0 et 1 d'où il suffit que : $a = 0$ et $b = 1$ ou bien $a = 1$ et $b = 0$
Réciproquement, en reportant dans $(*)$, on obtient : $f^2 = f$ et f est bien un projecteur.

3. a) Par analyse/synthèse :
Si $f = \lambda(f - a.Id) + \mu(f - b.Id)$, on a : $(\lambda + \mu - 1)f = (\lambda a + \mu b)id$.
Alors, $\lambda + \mu - 1 = 0$ sinon f serait une homothétie ce qui est exclus. On a donc aussi : $\lambda a + \mu b = 0$.
On en déduit : $\left\{\begin{array}{lcl} \lambda + \mu & = & 1 \\ a\lambda + b\mu & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{b}{b-a} \\ \mu = \dfrac{a}{a-b} \end{array}\right.$.
La synthèse est maintenant évidente : $\lambda(f - a.Id) + \mu(f - b.Id) = \dfrac{b}{b-a}(f - a.id) - \dfrac{a}{b-a}(f - b.id) = f$.

b) On pose $p = \dfrac{1}{b-a}(f - a.id)$ et $q = \dfrac{1}{a-b}(f - b.id)$
On vérifie :
- $p^2 = \dfrac{1}{(b-a)^2}(f^2 - 2af + a^2.id) = \dfrac{1}{(b-a)^2}((a+b)f - ab.id - 2af + a^2.id) = \dfrac{1}{(b-a)^2}((b-a)f - a(b-a)id) = p$

• De la même façon $q^2 = q$
• Enfin $p \circ q = \dfrac{1}{b-a}(f - a.id) \circ \dfrac{1}{a-b}(f - b.id) = 0$

4. Soit la propriété :$\mathcal{P}_n : f^n = b^n p + a^n q$
Pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété se montre aisément par récurrence.

Pour n entier négatif, D'après 2, si a et b sont non nuls alors f est bijectif et :

$$f^{-1} = \frac{1}{ab}[(a+b)id - f] = \frac{1}{ab}[(a+b)id - bp - aq] = b^{-1}p + a^{-1}q$$

On montre enfin le résultat pour $n \leqslant 0$ par une autre récurrence dont l'initialisation $n = 0$.

Si on suppose la propriété vraie au rang n, on a :

$$f^n = b^{-n}p + a^{-n}q \Rightarrow f^{-(n+1)} = (b^{-1}p + a^{-1}q) \circ (b^{(-n)}p + a^{(-n)}q) = b^{-(n+1)}p + a^{-(n+1)}q + 0 + 0$$

On obtient le résultat souhaité.

Exercice 2.3

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et soit f et g deux endomorphismes de E tels que : $f \circ g - g \circ f = af + bg$.

1. a) Montrer que tout endomorphisme non nul u d'un espace vectoriel de dimension finie n admet un polynôme annulateur.

b) En déduire que tout endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie admet au moins une valeur propre.

2. Dans cette question uniquement, on suppose que $a = b = 0$.

a) Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g.

b) En raisonnant sur un endomorphisme induit, en déduire que f et g ont un vecteur propre commun.

3. Dans cette question uniquement, on suppose que $b = 0$, $a \neq 0$ et $f \neq 0$.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est stable par g.

b) Soit φ_g l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ qui à tout u associe $u \circ g - g \circ u$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\varphi_g(f^n) = anf^n$.

c) En déduire qu'il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que $f^n = 0$.

d) En déduire que f et g ont un vecteur propre commun.

4. Dans cette question, on suppose $b \neq 0$.
Montrer que f et g ont un vecteur propre commun. (on pourra s'intéresser à $h = af + bg$)

Solution de l'exercice 2.3

1. a) La famille $(I, u, u^2, \ldots, u^{n^2})$ est de cardinal $n^2 + 1$. Elle est donc liée : il existe $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n^2}$ telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} a_k u^k = 0$.

On pose $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$.
On remarque que P n'est pas le polynôme constant qui n'est pas annulateur. Enfin $P(u) = 0$.

b) On sait que les éventuelles valeurs propres de u sont parmi les racines de tout polynôme annulateur. Par le théorème de d'Alembert Gauss, tout polynôme non constant se factorise sous la forme

$$P(X) = C \prod_{j=1}^{p} (X - z_j)^{m_j}$$

Si z_j n'est pas valeur propre de u, l'endomorphisme $(u - z_j I)$ est inversible, donc $(u - z_j I)^{m_j}$ également. En composant par son inverse et si, pour tout j, z_j n'est pas valeur propre de u, il vient $0 = I$: contradiction.

2. On a $f \circ g = g \circ f$.
a) Si $u \in E_\lambda(f)$, alors $f(u) = \lambda u$, d'où :

$$f(g(u)) = g(f(u)) = g(\lambda u) = \lambda g(u) \text{ soit, } g(u) \in E_\lambda(f).$$

b) L'endomorphisme induit par g sur $E_\lambda(f)$ a une valeur propre d'après le résultat admis à la question 1. Si v est un vecteur propre de cet endomorphisme, c'est aussi un vecteur propre de g et un élément de $E_\lambda(f)$. Donc v est un vecteur propre commun à f et g.

3. On a $f \circ g - g \circ f = af$.
a) Si $u \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $f(u) = 0$ d'où en évaluant la relation donnée en u, $f(g(u)) - g(0_E) = a0_E$, soit : $f(g(u)) = 0$, soit : $g(u) \in \mathrm{Ker}\, f$.
b) Montrons par récurrence sur $n \geqslant 0$ la relation : $f^n \circ g - g \circ f^n = anf^n$.
• Pour $n = 0$, c'est évident.
• Si c'est vrai pour n, alors :

$$\begin{aligned} f^{n+1} \circ g &= f \circ (f^n \circ g) \\ &= f \circ (g \circ f^n + anf^n) \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= (f \circ g) \circ f^n + anf^{n+1} \\ &= (g \circ f + af) \circ f^n + anf^{n+1} \quad \text{(d'après l'hypothèse de la question 3)} \\ &= g \circ f^{n+1} + a(n+1)f^{n+1}. \end{aligned}$$

c) Par l'absurde, si l'on avait $f^n \neq 0$ pour tout n, alors f^n serait vecteur propre de φ_g pour la valeur propre na. Ainsi φ_g aurait une infinité de valeurs propres distinctes (car $a \neq 0$), ce qui est impossible car $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie, puisque E l'est. d) Comme $f^n = 0$ pour un entier n, l'endomorphisme f ne peut être injectif sinon f^n le serait aussi.
Donc, $\dim \mathrm{Ker}\, f \geqslant 1$. Comme à la question 2. b, l'endomorphisme induit par g sur $\mathrm{Ker}\, f$ possède une valeur propre, le vecteur propre associé est alors un vecteur propre commun à f et à g.

4. Comme $g = \dfrac{1}{b}(h - af)$, le calcul donne : $f \circ g - g \circ f = \dfrac{1}{b}(f \circ h - h \circ f)$. Ainsi on a l'équivalence : $f \circ g - g \circ f = af + bg \iff f \circ h - h \circ f = bh$.
Si l'on remplace a, b, f, g par $-b, 0, h, f$ respectivement, la question 3 donne alors que f et h ont un vecteur propre en commun. Comme $g = \dfrac{1}{b}(h - af)$, ce vecteur est aussi un vecteur propre de g.

Exercice 2.4

Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tout entier $n \geqslant 3$, on note $A_n(a, b)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale qui valent 1 et ceux de la première ligne et de la première colonne qui valent alternativement b puis a. Par exemple, on a :

$$A_5(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & b & a & b & a \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A_6(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & b & a & b & a & b \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que la matrice $A_n(a,b)$ est diagonalisable.

2. Écrire en Scilab une fonction `matriceA(n,a,b)` qui renvoie la matrice $A_n(a,b)$ (*on pourra créer une variable* `x` *qui prend alternativement la valeur* `b` *puis la valeur* `a`).

3. Soit λ et μ deux réels tels que $2\mu - (\lambda-2)^2 > 0$. Résoudre le système d'équations suivant, d'inconnues réelles x et y :

$$\begin{cases} x+y & = \lambda \\ (x-1)^2+(y-1)^2 & = \mu. \end{cases}$$

On suppose désormais que n *est impair* ($n = 2p+1$).

4. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Déterminer le rang de $A_n(a,b) - I_n$. Que peut-on en déduire sur les éléments propres de $A_n(a,b)$?
b) Calculer la trace de $\big(A_n(a,b) - I_n\big)^2$.
c) En déduire les valeurs propres de $A_n(a,b)$.

5. Dans le cas où a et b sont complexes, la matrice $A_n(a,b)$ est-elle toujours diagonalisable ?

Solution de l'exercice 2.4

1. La matrice est symétrique réelle, donc diagonalisable (théorème spectral).

2. Une proposition.

```
function A=matriceA(n,a,b)
A=eye(n,n); //matrice identité d'ordre n
x=b; //initialisation de x
for k = 2:n,
  A(1,k)=x;
  A(k,1)=x;
  if x==a then //mise à jour de x
    x=b;
  else
    x=a;
  end
end
endfunction
```

3. On a :

$$\begin{cases} x+y & = \lambda \\ (x-1)^2+(y-1)^2 & = \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1+y-1 = \lambda-2 \\ (x-1)^2+(y-1)^2 = \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = \lambda-2 \\ 2\alpha\beta = (\lambda-2)^2-\mu \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha, \beta \text{ racines de } X^2 - (\lambda-2)X + \frac{(\lambda-2)^2-\mu}{2} = 0.$$

Le discriminant vaut : $2\mu - (\lambda-2)^2 > 0$.
Donc le polynôme a deux racines α et β et en revenant en x, y, il vient :

$$x_1 = \frac{\lambda + \sqrt{2\mu-(\lambda-2)^2}}{2}, x_2 = \frac{\lambda - \sqrt{2\mu-(\lambda-2)^2}}{2}$$

et il y a deux solutions : $(x,y) = (x_1,x_2)$; $(x,y) = (x_2,x_1)$. 4. a) Si $(a,b) = (0,0)$, la matrice $A_n(a,b) - I_n$ est nulle, donc de rang 0 ; les éléments propres sont évidents.
Si $(a,b) \neq (0,0)$, la matrice $A_n(a,b) - I_n$ a ses colonnes 2 à n qui sont colinéaires à l'une d'entre elles qui est non nulle (colonne 2 si $b \neq 0$; colonne 3 si $b = 0$ et $a \neq 0$) et elles ne sont pas colinéaires à la colonne 1. Comme le rang est la dimension de l'espace engendré par les colonnes, il vaut 2. Comme $n \geqslant 3$ on en déduit que $A_n(a,b) - I_n$ n'est pas inversible, donc 1 est valeur propre de $A_n(a,b)$; d'après le théorème du rang, le sous-espace propre associé est de dimension $n-2$. Comme la matrice est diagonalisable, il y a deux autres valeurs propres λ_1, λ_2 (éventuellement égales).

b) et c) Le calcul des coefficients diagonaux de $\big(A_n(a,b)-I_n\big)^2$ donne : $b^2+a^2+b^2+\cdots$ puis b^2, puis a^2, puis b^2, puis a^2, etc. Ainsi : $\mathrm{tr}\,\big(A_n(a,b)-I_n\big)^2 = 2p(a^2+b^2)$.
Les valeurs propres ont déjà été trouvées lorsque $(a,b)=(0,0)$.
Si $(a,b)\neq(0,0)$, d'après la question précédente $A_n(a,b)$ est semblable à une matrice diagonale $\Delta=\mathrm{diag}(1,\ldots,1,\lambda_1,\lambda_2)$, donc $n=\mathrm{tr}\,\big(A_n(a,b)\big)=(n-2)+\lambda_1+\lambda_2$.
Comme $\big(A_n(a,b)-I_n\big)^2$ est semblable à $\big(\Delta-I_n\big)^2$, on a :

$$2p(a^2+b^2)=\mathrm{tr}\,\big(A_n(a,b)-I_n\big)^2=(\lambda_1-1)^2+(\lambda_1-1)^2.$$

D'après la question 3 avec $\lambda=2$ et $\mu=2p(a^2+b^2)$, comme $\mu-(\lambda-2)^2=2p(a^2+b^2)>0$, on obtient donc :

$$\mathrm{Sp}(A_n(a,b))=\{1,\lambda_1,\lambda_2\}=\{1,1+\sqrt{p(a^2+b^2)},1-\sqrt{p(a^2+b^2)}\}.$$

5. Pour $n=2p+1$ impair, la question précédente indique que si $A_n(a,b)$ est diagonalisable, alors 1 est valeur propre avec un sous-espace propre de dimension $n-2$ et il y deux autres valeurs propres λ_1,λ_2 telles que : $\lambda_1+\lambda_2=2$ et $(\lambda_1-1)^2+(\lambda_1-1)^2=2p(a^2+b^2)$.
Si $a^2+b^2=0$, on en déduit que $0=\big((\lambda_1-1)+(\lambda_2-1)\big)^2=2(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)$, donc $\lambda_1=1$ ou $\lambda_2=1$, ce qui est absurde puisque $\lambda_1,\lambda_2\neq1$. Par exemple, $A_{2p+1}(1,i)$ n'est pas diagonalisable.
N.B : pour $n=2$ on peut voir que $A_2(a,b)$ est diagonalisable pour tout $a,b\in\mathbb{C}$.

Exercice 2.5

Soit n un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. Soit u un endomorphisme de E qui possède n valeurs propres distinctes, notées $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Pour tout entier $i\in[\![1,n]\!]$, on pose $E_i=\mathrm{Ker}(u-\lambda_i Id_E)$.

L'objectif de cet exercice est de décrire puis dénombrer les sous-espaces vectoriels de E stables par u.

1. a) On suppose, uniquement dans cette question, que $n=\dim E=2$. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels F, G et H de E tels que $E=G\oplus H$ et $F\neq(F\cap G)\oplus(F\cap H)$.
b) On note $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $n-1$. Montrer que l'application $\Phi:\mathbb{C}_{n-1}[X]\to\mathbb{C}^n$ définie par :

$$\forall\, P\in\mathbb{C}_{n-1}[X],\ \Phi(P)=(P(\lambda_1),\ldots,P(\lambda_n))$$

est bijective.
c) En déduire que, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, il existe $P_i\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall j\in[\![1,n]\!],\ P_i(\lambda_j)=\delta_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

2. Montrer que, si J est une partie non vide de $[\![1,n]\!]$, alors $\displaystyle\bigoplus_{j\in J}E_j$ est un sous-espace stable par u.

Dans toute la suite, on considère un sous-espace vectoriel F de E stable par u.
3. Soit $x\in F$.
a) Montrer qu'il existe $(x_1,\ldots,x_n)\in E_1\times\cdots\times E_n$ tel que $x=\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i$. b) Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Exprimer $\big(P(u)\big)(x)$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $x_1,\ldots,x_n$.
c) En déduire que $F=\displaystyle\bigoplus_{i=1}^n(F\cap E_i)$.

4.a) On pose : $J = \{i \in [\![1, n]\!] / F \cap E_i \neq \{0\}\}$. Montrer que $F = \bigoplus_{j \in J} E_j$.

b) En déduire le nombre de sous-espaces vectoriels de E stables par u.

Solution de l'exercice 2.5

1. a) On choisit trois droites F, G, H distinctes de $\mathbb{C}^2$. Alors, $G \oplus H = \mathbb{R}^2$ et $F \cap G = F \cap H = \{0\}$.

b) L'application Φ est une application linéaire entre espaces vectoriels de même dimension n. Pour montrer la bijectivité, on montre l'injectivité. Soit $P \in \operatorname{Ker} \Phi$. Alors, $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(\lambda_i) = 0$. Le polynôme P est de degré au plus $n-1$ et possède n racines distinctes, donc P est le polynôme nul. Alors, $\operatorname{Ker} \Phi = \{0\}$ et Φ est un automorphisme.
c) En notant $e_i = (\delta_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{C}^n$, le vecteur e_i possède un antécédent par Φ. On le note P_i.

2. Soit $x = \sum_{j \in J} x_j \in \bigoplus_{j \in J} E_j$. Alors, $u(x) = \sum_{j \in J} \lambda_j x_j$ et, pour tout $j \in J$, $\lambda_j x_j \in E_j$. Ainsi, $u(x) \in \bigoplus_{j \in J} E_j$.

3.a) Comme u est diagonalisable, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. On écrit alors x dans cette décomposition.

b) En reprenant les calculs et notations précédents, $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ et, par une récurrence immédiate, pour tout k entier naturel, $u^k(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k x_i$. Ainsi, pour tout polynôme P, on a :

$$P(u)(x) = \sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i) x_i$$

c) Soit $x \in F$. En utilisant les questions précédentes, on a :

$$P_i(u)(x) = \sum_{j=1}^{n} P_i(\lambda_j) x_j = x_j$$

Ainsi, comme F est stable par u, $P_i(u)(x) \in F$ et $x_j \in F$. Ainsi, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \in \bigoplus_{i=1}^{n} (F \cap E_i)$.

La réciproque étant triviale, $F = \bigoplus_{i=1}^{n} (F \cap E_i)$.

4.a) Comme $\bigoplus_{j=1}^{n} E_j = E$ et $\dim E = n$, alors E_j est de dimension 1. Ainsi, $F \cap E_i \in \{\emptyset, E_i\}$. On utilise alors la question précédente.

b) Finalement, F est stable par u si et seulement s'il existe $J \subset [\![1, n]\!]$ non vide tel que $F = \bigoplus_{j \in J} E_j$. On rajoute $\{0\}$.
Ainsi, il y a 2^n sous-espaces stables par u.

Exercice 2.6

Soit n un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit u un endomorphisme de E de rang 1.

1. Montrer que la trace d'un endomorphisme f de E est indépendante de la matrice qui le représente dans une base choisie. On note ainsi $\operatorname{tr}(f)$ la trace de f.

2. Montrer que, soit $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$, soit $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ (*on pourra discuter en fonction de la dimension de* $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$).

3. Soit e un vecteur non nul de $\operatorname{Im} u$.

a) Montrer qu'il existe des vecteurs $(e_2, \ldots, e_n)$ de E tels que $\mathcal{B} = (e, e_2, \ldots, e_n)$ soit une base E.

b) On suppose que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$. Quelle est la forme de la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$?
Calculer alors $\operatorname{tr}(u)$.

4. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
i) u est diagonalisable.
ii) $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$.
iii) $\operatorname{tr}(u) \neq 0$.

5. Soient A et J deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'application ψ_A définie par, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\psi_A(X) = \operatorname{tr}(AX)J$$

On remarquera que ψ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a) Décrire le noyau de ψ_A. Quelle est l'image de ψ_A ? Quel est le rang de ψ_A ?

b) Exprimer la trace de l'endomorphisme ψ_A en fonction de A et J.

c) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur A et J pour que ψ_A soit diagonalisable.

Solution de l'exercice 2.6

1. On sait que deux matrices semblables ont même trace, puisque $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

2. L'endomorphisme u est de rang 1 donc $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$ est un sous-espace vectoriel de dimension 0 ou 1.
Si $\dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u) = 0$, alors $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$ et d'après le théorème du rang, $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$.
Si $\dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u) = 1$, comme $\operatorname{Im} u \supseteq (\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u)$, alors $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.

3. a) Le vecteur e est non nul, donc (e) est une famille libre de l'espace vectoriel de dimension finie E. D'après le théorème de la base incomplète, (e) peut être complétée en une base de E.

b) Comme $e \in \operatorname{Ker} u$, alors dans une telle base, la première colonne de la matrice de u sera nulle et toutes les autres colonnes seront dans $\operatorname{Im} u$ donc colinéaires à e, d'où une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

La trace de cette matrice est nulle donc, si $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$, alors $\operatorname{tr}(u) = 0$.

4. *i)* $\Longleftrightarrow$ *ii)*. L'endomorphisme u est diagonalisable et, comme u est de rang 1, $\dim E_0(u) = n - 1$. Ainsi, il existe une seconde valeur propre a telle que $\dim E_a(u) = 1$. Dans une base adaptée à la somme directe $E = E_a(u) \oplus E_0(u)$ la matrice de u est $\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
Alors, $\operatorname{Im} u = E_a(u)$ et $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$.
ii) $\Rightarrow$ *iii)*. L'image $\operatorname{Im} u$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1. Soit e un vecteur générateur de $\operatorname{Im} u$. Alors, $u(e) \in \operatorname{Im} u$ donc $u(e)$ est colinéaire à e et il existe un réel a tel que $u(e) = a \cdot e$. De plus, comme $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont en somme directe, $e \notin \operatorname{Ker} u$ et $a \neq 0$. Dans une base adaptée à la somme directe $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$, la matrice de u est $\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $\operatorname{tr} u = a \neq 0$ et u est diagonalisable.

$iii) \Rightarrow ii)$. On suppose que $\mathrm{tr}(u) \neq 0$. D'après la question 2, $\mathrm{Im}\, u \not\subset \mathrm{Ker}\, u$. Alors, d'après la question 3.a), $E = \mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, u$, qui sont les deux sous-espaces propres de u.

5.a) On a $\psi_A(X) = 0$ si et seulement si $\mathrm{tr}(AX)J = 0$, si et seulement si $\mathrm{tr}(AX) = 0$ (car $J \neq 0$ et $\mathrm{tr}(AX) \in \mathbb{C}$). D'où, $\mathrm{Ker}\, \psi_A = \{X \ / \ \mathrm{tr}(AX) = 0\}$.
Comme $f : X \mapsto \mathrm{tr}(AX)$ est une forme linéaire non nulle (prendre $X = {}^tA$) et $J \neq 0$, alors $\mathrm{Im}\, \psi_A = \mathrm{Vect}\{J\}$. Le rang de ψ_A est ainsi égal à 1.

b) D'après la définition, $\psi_A(J) = \mathrm{tr}(AJ)J$.
- Si $\mathrm{tr}(AJ) = 0$, alors $\psi_A(J) = 0$ et $\mathrm{Im}\, \psi_A \subset \mathrm{Ker}\, \psi_A$. Alors, d'après la question 1, $\mathrm{tr}(\psi_A) = 0 = \mathrm{tr}(AJ)$.
- Si $\mathrm{tr}(AJ) \neq 0$, alors $\psi_A(J) = \mathrm{tr}(AJ)J$. D'après le calcul effectué dans la question 1, $\mathrm{tr}(\psi_A) = \mathrm{tr}(AJ)$.

Finalement, $\mathrm{tr}(\psi_A) = \mathrm{tr}(AJ)$.

c) D'après la question 4, ψ_A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(AJ) \neq 0$.

Exercice 2.7

L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n ($n \geqslant 2$) à coefficients réels.
On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique associée au produit scalaire donné par $\langle X|Y\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = {}^tXY$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On note $\|.\|$ la norme euclidienne correspondant au produit scalaire canonique.
On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si elle est symétrique et si l'ensemble $\mathrm{Sp}(A)$ de ses valeurs propres est contenu dans $]0, +\infty[$.

1. Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice $T = {}^tAA$ est définie positive (où ${}^tA$ est la transposée de la matrice A).

2. Soit T une matrice définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Si X et Y sont deux vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $(X|Y) = {}^tXTY$. Montrer que l'on définit ainsi un nouveau produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. On notera $\|.\|_T$ la norme euclidienne associée.
b) On note $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Justifier l'existence d'une base orthonormée $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ pour le nouveau produit scalaire $(.|.)$ telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k\} = \mathrm{Vect}\{e_1, \cdots, e_k\}$. Montrer que l'on peut supposer que $(e_k|\varepsilon_k) > 0$ (ce que l'on supposera désormais).
c) On désigne par P la matrice de l'identité de $\mathbb{R}^n$ dans les bases $\mathcal{B}$ (au départ) et $\mathcal{C}$ (à l'arrivée). Montrer que P est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. Si $(x_1, \cdots, x_n)$ (resp. $(x'_1, \cdots, x'_n)$) sont les coordonnées du vecteur X dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$), justifier que :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

En déduire que $\|X\|_T = \|PX\|$.
d) En utilisant la question précédente, montrer que $T = {}^tPP$.

3. On se place dans le cas où $n = 3$ et T est la matrice définie par :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que T est définie positive (on ne demande pas de calculer explicitement toutes les valeurs propres).
b) Déterminer une matrice A telle que $T = {}^tAA$, où A est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

Solution de l'exercice 2.7

1. Les propriétés de la transposition d'une matrice impliquent facilement que T est symétrique. Soit λ une valeur propre de T et X un vecteur propre unitaire associé à λ. On voit que $\lambda = {}^tXTX = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2 > 0$ puisque A est inversible. La matrice T est donc définie positive.

2. a) Il est clair que l'application $(X, Y) \longrightarrow (X|Y)$ est bilinéaire. Elle est symétrique car T est symétrique. Comme T est symétrique, elle peut s'écrire $T = {}^tQDQ$ où D est une matrice diagonale et Q une matrice orthogonale. On a donc ${}^tXTX = {}^t(QX)D(QX)$. Comme les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs, on voit que ${}^tXTX \geqslant 0$ et que cette quantité est égale à 0 si et seulement si $QX = 0$, c'est-à-dire $X = 0$ puisque Q est inversible. On a donc bien défini un nouveau produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
b) L'existence d'une base orthonormée $\mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ pour le nouveau produit scalaire $(.|.)$ telle que $\operatorname{Vect}\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k\} = \operatorname{Vect}\{e_1, \cdots, e_k\}$ pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$ provient du procédé d'orthonormalisation de Schmidt. On observe déjà que $(e_k|\varepsilon_k) \neq 0$; c'est évident par construction si $k = 1$ et si ce n'était pas le cas pour un entier $k \in [\![2, n]\!]$, on aurait

$$e_k \in \operatorname{Vect}\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{k-1}\} = \operatorname{Vect}\{e_1, \cdots, e_{k-1}\}$$

ce qui est absurde. Il suffit alors de remplacer ε_k par $\operatorname{sgn}((e_k|\varepsilon_k))\varepsilon_k$.

c) Comme $e_k \in \operatorname{Vect}\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k\}$, le vecteur e_k s'écrit sous la forme $e_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i\varepsilon_i$. Or, ses composantes sur la base $\mathcal{C}$ forment la k-ième colonne de la matrice P ; la matrice P est donc triangulaire supérieure. De plus $a_k = (e_k|\varepsilon_k) > 0$, les coefficients diagonaux de P sont donc strictement positifs. La relation matricielle entre les coordonnées du vecteur X dans $\mathcal{B}$ et celles de X dans $\mathcal{C}$ correspond à la formule de changement de base du cours. Comme $x'_1, \cdots, x'_n$ sont les coordonnées de X dans la base orthonormée $\mathcal{C}$, on a $\|X\|_T^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x'_k)^2$. D'un autre côté, la relation matricielle précédente montre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x'_k)^2 = \|PX\|^2$. On a donc bien l'égalité $\|X\|_T = \|PX\|$.
d) L'égalité précédente implique donc que ${}^tXTX = {}^t(PX)PX = {}^tX({}^tPP)X$ pour tout vecteur colonne X. On en déduit que pour tout couple (X, Y) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$:

$$\begin{aligned} {}^tXTY &= \frac{1}{4}\left({}^t(X+Y)T(X+Y) - {}^t(X-Y)T(X-Y)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left({}^t(X+Y)({}^tPP)(X+Y) - {}^t(X-Y)({}^tPP)(X-Y)\right) = {}^tX({}^tPP)Y \end{aligned}$$

D'où $T = {}^tPP$.

3. a) Il est clair que T est symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres, et que e_2 est un vecteur propre associé à la valeur propre 4. On en déduit que les autres vecteurs propres appartiennent à $\operatorname{Vect}\{e_1, e_3\}$ et qu'ils sont les vecteurs propres (avec conservation de la valeur propre associée) d'un endomorphisme symétrique de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

On voit alors facilement que les deux valeurs propres restantes ont pour somme 6 et pour produit 1, elles sont donc strictement positives. Par suite, la matrice T est définie positive.
b) Les coefficients de la matrice triangulaire supérieure A se calculent facilement en commençant par regarder la première ligne du produit ${}^tAA$ et en tenant compte que les coefficients diagonaux de A sont strictement positifs. On trouve que l'on a nécessairement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on note $\|.\|$ la norme euclidienne canonique. On désigne par $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ et par $Id_{\mathbb{R}^n}$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|u(x)\| \leqslant \|x\|.$$

1. Soit $y \in \operatorname{Ker}(u - Id_{\mathbb{R}^n}) \cap \operatorname{Im}(u - Id_{\mathbb{R}^n})$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ y = \frac{1}{k}\,(u^k(x) - x)$$

où $u^k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'endomorphisme $u \circ u \circ \ldots \circ u$ (k fois).

2. En déduire que $\operatorname{Ker}(u - Id_{\mathbb{R}^n}) \cap \operatorname{Im}(u - Id_{\mathbb{R}^n}) = \{0\}$.

3. Conclure que $\operatorname{Ker}(u - Id_{\mathbb{R}^n}) \oplus \operatorname{Im}(u - Id_{\mathbb{R}^n}) = \mathbb{R}^n$.

On dit qu'une suite $(z_N)_N$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ converge vers $z \in \mathbb{R}^n$ (que l'on note $\lim\limits_{N\to+\infty} z_N = z$) si $\lim\limits_{N\to+\infty} \|z_N - z\| = 0$.

4. Soit $y \in \operatorname{Ker}(u - Id_{\mathbb{R}^n})$. Étudier la limite de la suite :

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^k(y)\right)_N$$

5. Soit $y \in \operatorname{Im}(u - Id_{\mathbb{R}^n})$. Étudier la limite de la suite :

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^k(y)\right)_N$$

6. En déduire que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^k(y) = p(y)$$

où p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ que l'on caractérisera.

Solution de l'exercice 2.8

1. Si $y \in \operatorname{Ker}(u - Id_{\mathbb{R}^n}) \cap \operatorname{Im}(u - Id_{\mathbb{R}^n})$ alors $u(y) = y$ et $\exists\, x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = u(x) - x$. Prouvons par récurrence la propriété $y = 1/k\,(u^k(x) - x)$ pour tout entier $k \geqslant 1$ pour ce x fixé. Pour $k = 1$, elle est vérifiée.
Supposons qu'elle soit vraie pour $k \geqslant 1$, c'est-à-dire que $y = \dfrac{1}{k}\,(u^k(x) - x)$. Il vient alors :

$$y = u(y) = \frac{1}{k}\,(u(u^k(x) - x)) = \frac{1}{k}\,(u^{k+1}(x) - u(x)) = \frac{1}{k}\,(u^{k+1}(x) - y - x) \ \text{ car } y + x = u(x).$$

Ainsi, $(k+1)y = u^{k+1}(x) - x$ et il en résulte que :

$$y = \frac{1}{k+1}\,(u^{k+1}(x) - x) \text{ et donc que la propriété est vraie au rang } k+1.$$

2. Si $y \in \mathrm{Ker}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n}) \cap \mathrm{Im}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n})$, alors d'après la question 1, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = 1/k\,(u^k(x) - x)$ pour tout entier $k \geqslant 1$. Ainsi, on en déduit que pour tout $k \geqslant 1$:

$$\|y\| = \frac{1}{k}\|u^k(x) - x\| \leqslant \frac{1}{k}(\|u(u^{k-1}(x))\| + \|x\|) \leqslant \frac{1}{k}(\|u^{k-1}(x)\| + \|x\|) \leqslant \frac{1}{k}(\|x\| + \|x\|) = \frac{2\|x\|}{k},$$

(où pour les seconde et troisième inégalités, on a utilisé $\|u(x)\| \leqslant \|x\|,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$). Par conséquent, on a :

$$0 \leqslant \|y\| \leqslant \frac{2\|x\|}{k} \to 0 \text{ quand } k \to +\infty$$

et il s'ensuit que $y = 0$. Or comme $\{0\} \in \mathrm{Ker}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n}) \cap \mathrm{Im}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n})$, on a $\mathrm{Ker}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n}) \cap \mathrm{Im}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n}) = \{0\}$.

3. D'après la question 2, $\mathrm{Ker}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n})$ et $\mathrm{Im}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n})$ sont en somme directe. Soit $\mathcal{V} = \mathrm{Ker}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n}) \oplus \mathrm{Im}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n})$. On a donc :

$$\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathrm{Ker}(u - Id_{\mathbb{R}^n})) + \dim(\mathrm{Im}(u - Id_{\mathbb{R}^n})) = n,$$

où la dernière égalité est une conséquence du thèorème du rang. Ainsi, $\mathcal{V}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de dimension n, ce qui implique que $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ car $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

4. Soit $y \in \mathrm{Ker}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n})$; on a donc $u(y) = y$. On a ainsi :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^k(y) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y = y \to y \quad \text{lorsque } N \to +\infty.$$

5. Soit $y \in \mathrm{Im}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n})$; il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = u(x) - x$. On a par conséquent $u^k(y) = u^{k+1}(x) - u^k(x)$ pour $k = 0, \ldots, N-1$ et donc :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^k(y) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(u^{k+1}(x) - u^k(x)\right) = \frac{u^N(x) - x}{N} \to 0 \quad \text{lorsque } N \to +\infty.$$

La convergence de $(u^N(x) - x)/N$ vers 0 pour $N \to +\infty$ est justifiée par le fait que $0 \leqslant \|(u^N(x) - x)/N\| \leqslant (\|u^N(x)\| + \|x\|)/N| \leqslant 2\|x\|/N \to 0$ lorsque $N \to +\infty$ (on a utilisé dans la dernière inégalité le fait que $\|u(x)\| \leqslant \|x\|,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$).

6. L'application p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (il est linéaire). Comme $\mathrm{Ker}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n}) \oplus \mathrm{Im}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n}) = \mathbb{R}^n$, $p(y) = y$ sur $\mathrm{Ker}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n})$ et $p(y) = 0$ sur $\mathrm{Im}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n})$. Ainsi, p est le projecteur sur $\mathrm{Ker}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n})$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n})$ (on a utilisé l'inégalité triangulaire pour montrer que la somme de deux suites de matrices convergentes converge elle aussi).

Exercice 2.9

Soit un entier $n \geqslant 2$. Dans tout l'exercice, on note $\mathrm{tr}(M)$ la trace d'une matrice carrée M d'ordre n et on note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que par convention, on a $M^0 = I$.

1. Soit M une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que M est définie positive si, pour tout élément X non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXMX > 0$.

Montrer que M est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Dans la suite, A désigne une matrice symétrique non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I - A$ soit définie positive et on note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, non nécessairement distinctes.

On pose, pour tout entier naturel p non nul, $u_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{2p-1} \mathrm{tr}(A^k)$.

2. a) Justifier que la matrice $I - A$ est inversible et établir, pour tout entier naturel p non nul, la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{2p-1} A^k = (I - A)^{-1} - A^{2p}(I - A)^{-1}$$

b) En déduire que :

$$u_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\lambda_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^{2p}}{1-\lambda_i}$$

c) Montrer que la suite $(u_p)_{p\geq 1}$ est majorée. Est-elle convergente ? 3. On suppose de plus que la matrice A est à coefficients positifs ou nuls.
Montrer que, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on a : $|\lambda_i| < 1$.

Solution de l'exercice 2.9

1. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de M.
• Supposons que M soit définie positive. Soit λ_i une valeur propre de M et X un vecteur propre associé.
On a donc ${}^tXMX > 0$, ce qui donne $\lambda_i {}^tXX > 0$, c'est-à-dire $\lambda_i \|X\|^2 > 0$.
Comme X est un vecteur propre, il est non nul et donc $\lambda_i > 0$.
• Supposons que les valeurs propres de M soient toutes strictement positives.
Comme M est symétrique réelle, il existe une matrice P orthogonale telle que $M = {}^tPDP$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
On a donc ${}^tXMX = {}^tX{}^tPDPX = {}^t(PX)DPX$.
En posant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a donc ${}^tXMX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$. Si X est non nul, alors PX est non nul puisque P est inversible et on a bien ${}^tXMX > 0$.

2. a) Comme $I - A$ est définie positive, d'après la question précédente, ses valeurs propres ne sont pas nulles, donc elle est inversible. De plus ce sont $1-\lambda_1, \ldots, 1-\lambda_n$.
On a : $\left(\sum_{k=0}^{2p-1} A^k\right)(I-A) = I - A^{2p}$. D'où :

$$\sum_{k=0}^{2p-1} A^k = (I-A)^{-1}(I-A^{2p}) = (I-A)^{-1} - A^{2p}(I-A)^{-1}$$

b) Comme la trace est linéaire, on a : $\sum_{k=0}^{2p-1} \mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}\left((I-A)^{-1}\right) - \mathrm{tr}\left(A^{2p}(I-A)^{-1}\right)$.
La matrice A est diagonalisable et semblable à $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
La matrice $I - A$ est semblable à $\mathrm{diag}(1-\lambda_1, \ldots, 1-\lambda_n)$.
La matrice $(I-A)^{-1}$ est semblable à $\mathrm{diag}(\frac{1}{1-\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{1-\lambda_n})$ et sa trace est donc $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\lambda_i}$.
Et enfin, la matrice A^{2p} est semblable à $\mathrm{diag}(\lambda_1^{2p}, \ldots, \lambda_n^{2p})$ et comme les matrices de passage sont les mêmes pour toutes les matrices en jeu, on $\mathrm{tr}\left(A^{2p}(I-A)^{-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^{2p}}{1-\lambda_i}$.
Finalement : $u_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\lambda_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^{2p}}{1-\lambda_i}$.
On a $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^{2p}}{1-\lambda_i} \geq 0$ (grâce à la puissance paire des λ_i et car $1-\lambda_i > 0$) et donc : $u_p \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\lambda_i}$.
La suite (u_p) ne converge pas forcément, par exemple lorsque $A = \mathrm{diag}(-1, 0, \ldots, 1)$.

3. Si on suppose que A est à coefficients positifs, on a $\mathrm{tr}(A^k)$ est positif. La suite des sommes partielles de la série de terme général $\mathrm{tr}(A^k)$ est croissante et, d'après la question précédente, on a :

$$\sum_{k=1}^{p} \mathrm{tr}(A^k) \leqslant \sum_{k=1}^{2p-1} \mathrm{tr}(A^k) = u_p \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\lambda_k}$$

La suite des sommes partielles est croissante et majorée, donc convergente. La série de terme général $\mathrm{tr}(A^k)$ étant convergente, son terme général tend vers 0. Ainsi, comme $0 \leqslant \lambda_j^{2k} \leqslant \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i)^{2k} \to 0$, ceci prouve que $|\lambda_i| < 1$.

Exercice 2.10

Soit un entier $p \geqslant 2$. On considère l'espace $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée notés respectivement $\langle\ ,\ \rangle$ et $\|.\|$. On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de E. La transposée d'une matrice M est notée ${}^tM$.
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les valeurs propres de la matrice ${}^tAA$ sont toutes réelles positives.
On note c la plus grande des valeurs propres de ${}^tAA$.

2. a) Montrer que pour tout $X \in E, ||AX||^2 \leqslant c||X||^2$.
b) Établir pour tout couple (X, Y) de vecteurs de E et tout entier naturel k non nul, l'inégalité suivante :

$$|\langle A^k X, Y\rangle| \leq c^{\frac{k}{2}} \|X\| \times \|Y\|$$

On dit qu'une suite de matrices $(U_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une matrice U si chacun des coefficients de U_n converge vers le coefficient de U correspondant.

3. a) Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{\langle A^k e_j, e_i\rangle}{k!}$.
b) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice B_n par :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$$

Montrer que la suite (B_n) converge vers une matrice notée C.
c) Exprimer les valeurs propres de C en fonction des valeurs propres de A.

Solution de l'exercice 2.10

1. La matrice ${}^tAA$ est symétrique, donc ses valeurs propres sont réelles.
De plus, pour tout vecteur propre X, on a ${}^tAAX = \lambda X$. En multipliant par ${}^tX$:

$${}^tX{}^tAAX = \lambda{}^tXX \text{ soit } \|AX\|^2 = \lambda\|X\|^2$$

Comme X est non nul, on a : $\lambda = \dfrac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \geqslant 0$.

2. a) De plus ${}^tAA$ est diagonalisable dans une base orthonormale $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$, où les ε_i sont associés aux valeurs propres λ_i.
Tout vecteur X s'écrit donc $X = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \varepsilon_k$. On a donc ${}^tAAX = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \lambda_k \varepsilon_k$ D'où :

$${}^tX{}^tAAX = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k^2 \lambda_k \text{ soit } \|AX\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k^2 \lambda_k$$

En notant c la plus grande des valeurs propres, on a bien : $\|AX\|^2 \leq c\|X\|^2$.
b) On a donc, par une simple récurrence : $\|A^k X\|^2 \leq c^k \|X\|^2$.
Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\Big(\langle A^k X, Y\rangle\Big)^2 \leqslant \|A^k X\|^2 \|Y\|^2$$

Ce qui donne bien : $\Big(\langle A^k X, Y\rangle\Big)^2 \leq c^k \|X\|^2 \|Y\|^2$.

Et en prenant la racine : $|\langle A^k X, Y\rangle| \leq c^{\frac{k}{2}} \|X\| \|Y\|$.

3. a) En appliquant l'inégalité précédente, on obtient :

$$\left| \frac{\langle A^k e_j, e_i\rangle}{k!} \right| \leqslant c^{\frac{k}{2}} \frac{\|e_j\| \|e_j\|}{k!}$$

Et comme la base canonique est orthonormale pour le produit scalaire canonique, on a :

$$\left| \frac{\langle A^k e_j, e_i\rangle}{k!} \right| \leqslant \ c^{\frac{k}{2}} \frac{1}{k!}$$

Le critère de comparaison des séries à termes positifs permet de conclure à la convergence absolue et donc à la convergence de la série considérée.

b) On constate que le terme général de la matrice $\dfrac{1}{k!} A^k$ n'est autre que $\dfrac{\langle A^k e_j, e_i\rangle}{k!}$. La série de somme partielle B_n est donc convergente.

c) Si $AX = \lambda X$, on a alors :

$$B_n X = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k X = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \lambda^k X = \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}\Big) X$$

On montre que si la suite de matrices $(B_n)_n$ converge vers une matrice C, alors pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$, la suite de vecteurs $(B_n X)_n$ converge vers le vecteur CX.
En passant ainsi à la limite, il vient $CX = e^{\lambda} X$.

Exercice 2.11

Soit x un réel strictement positif et n un entier naturel non nul. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et on note E_n l'ensemble défini par :

$$E_n = \{A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \ ; \ A^2 + x^2 I = 0 \, ; \ {}^t\!AA = A\,{}^t\!A\}$$

1. a) Soit $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique (e_1, e_2) et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$f(e_1) = -xe_2, \quad f(e_2) = xe_1$$

Calculer $f \circ f$.

b) En déduire que $E_n \neq \emptyset$.

2. Soit S une matrice symétrique réelle. On note $\mathrm{Sp}(S)$ l'ensemble des valeurs propres de S. Établir l'équivalence suivante :

$$\big(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^t\!XSX \geqslant 0\big) \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$$

Dans la suite, A désigne une matrice de E_n.

3. On pose $S = {}^t\!AA$. Montrer que $S^2 = x^4 I$, puis que $S = x^2 I$.

4. a) On pose $B = \dfrac{1}{x} A$. Calculer $\big({}^t\!B + B\big)B$.

b) Montrer que l'ensemble E_n est constitué des matrices de la forme xB où B est à la fois orthogonale et antisymétrique.

Solution de l'exercice 2.11

1. a) Un calcul immédiat donne $f^2 + x^2 Id = 0$.

b) On généralise en dimension $2n$ en considérant l'endomorphisme f par son action sur la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. On a donc :

$$\begin{cases} f(e_1) = -xe_2 \\ f(e_2) = xe_1 \\ \vdots \\ f(e_{2k-1}) = -xe_{2k} \\ f(e_{2k}) = xe_{2k-1} \\ \vdots \\ f(e_{2n-1}) = -xe_{2n} \\ f(e_{2n}) = xe_{2n-1} \end{cases}$$

On constate alors que, pour tout $j \in [\![1, 2n]\!]$, on a $f^2(e_j) = -x^2 e_j$ et donc $f^2 = -x^2 Id$.

Ainsi, la matrice A suivante (matrice de f dans la base canonique) est élément de E_n :

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

2. • Supposons que pour tout X, ${}^tXSX \geq 0$. On applique cette relation à un vecteur propre X (donc non nul) associé à la valeur propre λ. On obtient : $\lambda \|X\|^2 \geqslant 0$. Comme $X \neq 0$, on en déduit bien $\lambda \geq 0$.
• Supposons $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$. La matrice S est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres. Il existe donc une matrice $D = \mathrm{diag}(\lambda_1 \dots, \lambda_n)$ et une matrice P orthogonale telles que :

$${}^tXSX = {}^tX{}^tPDPX = {}^t(PX)DPX$$

En posant : $PX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a donc : ${}^tXSX = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_i y_i^2$.
Comme les λ_i sont positifs, on a bien ${}^tXSX \geq 0$.

3. La matrice S est symétrique et comme ${}^tXSX = {}^tX{}^tAAX = \|AX\|^2$, S est positive. De plus :

$$S^2 = {}^tAA{}^tA{}^tAA = ({}^tA)^2 A^2 = {}^t(A^2)A^2 = (-x^2 I)(-x^2 I) = x^4 I$$

Ainsi S s'écrit $S = PD{}^tP$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1 \dots, \lambda_n)$ et $\lambda_i \geq 0$. On a : $S^2 = P(D^2){}^tP = x^4 I$ d'où $D^2 = x^4 I$.
Les λ_i vérifient donc tous $\lambda_i^2 = x^4$. Comme les λ_i sont des réels positifs, on a $\lambda_i = x^2$ et donc $S = x^2 I$.

4. a) La matrice B est orthogonale puisque ${}^tBB = \dfrac{1}{x^2} S = I$ et elle vérifie $B^2 = \dfrac{1}{x^2} A^2 = -I$. On a donc : $({}^tB + B)B = {}^tBB + B^2 = 0$.

b) Comme B est inversible, les relations précédentes montrent que B est orthogonale et antisymétrique. Réciproquement, soit B une matrice orthogonale et antisymétrique. Posons $A = xB$. On vérifie facilement que ${}^tAA = A{}^tA$ et que $A^2 + x^2 I = 0$.
Conclusion : E_n est constitué des matrices de la forme xB où B est à la fois orthogonale et antisymétrique.

Exercice 2.12

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée.
Soit T l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ T(M) = AM$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que T est bijectif si et seulement si la matrice A est inversible.

3. Dans cette question, on suppose que la matrice A est diagonalisable. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres et $(X_1, \ldots, X_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.
Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on pose $M_{i,j} = X_i{}^tX_j$.
Montrer que la famille $(M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de vecteurs propres de T.

4. Dans cette question, on suppose que A admet au moins une valeur propre μ et donc un vecteur propre X associé. On suppose que T est diagonalisable. Soit $(M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de vecteurs propres de T.
a) Soit Φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \Phi(M) = MX$.
Montrer que Φ est surjective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
b) En déduire que A est diagonalisable.

Solution de l'exercice 2.12

1. L'application T est manifestement un endomorphisme de E.

2. Si A est inversible, l'équation $AM = N$ admet une unique solution $M = A^{-1}N$ et T est bijective.
Si T est bijective, la matrice identité I de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet un unique antécédent par T : il existe une unique matrice B telle que $AB = I$, ce qui entraîne que A est inversible.

3. Quel que soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, la matrice $M_{i,j}$ est de rang 1 et ce n'est pas la matrice nulle. On a :

$$T(M_{i,j}) = AX_i{}^tX_j = \lambda_i X_i{}^tX_j = \lambda_i M_{i,j}$$

Ainsi, $M_{i,j}$ est un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ_i. Il reste à montrer que la famille $(M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est libre.
Soit $\sum_{i,j} \alpha_{i,j} X_i{}^tX_j = 0$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Multiplions à gauche par ${}^tX_k$. Il vient :

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j}({}^tX_k X_i){}^tX_j = 0 \Rightarrow \sum_j \left(\sum_i \alpha_{i,j}({}^tX_k X_i)\right){}^tX_j = 0$$

Par liberté de la famille (X_j), on a, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\sum_i \alpha_{i,j}{}^tX_k X_i = {}^tX_k\left(\sum_i \alpha_{i,j} X_i\right) = 0$$

Donc, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\sum_i \alpha_{i,j} X_i = 0$, donc $\alpha_{i,j} = 0$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

4. a) Soit $X \neq 0$ tel que $AX = \mu X$. Soit $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(M_{i,j}X)$. La famille $(M_{i,j})$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il existe une matrice M telle que $MX = Y$ puisque $X \neq 0$. Ainsi $\mathcal{F} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
En effet, si $(X, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et si g est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M, on pose $g(X) = Y$ et pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $g(e_i) = e_i$ (par exemple).
b) On peut donc extraire de la famille $(M_{i,j}X)$, une base $(M_1X, \ldots, M_nX)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a alors

$$\lambda_i M_i = T(M_i) \Rightarrow \lambda_i M_i X = AM_i X$$

ce qui montre que A est diagonalisable.

Exercice 2.13

Soit un entier $n \geqslant 2$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique et de la norme euclidienne $|| \ ||$ associée. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que la matrice $I_n - {}^tAA$ est de rang 1 et que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $||AX|| \leqslant ||X||$.

1. Montrer que la matrice ${}^tAA$ est diagonalisable et que ses valeurs propres appartiennent à l'intervalle $[0,1]$.

2. Montrer que la matrice $I_n - {}^tAA$ est diagonalisable. Que peut-on dire de ses valeurs propres ?

3. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. On pose, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\Phi_Y(X) = ({}^tYX)\ Y$$

a) Montrer que Φ_Y est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de rang 1.
b) Montrer qu'il existe $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(I_n - {}^tAA)X = \Phi_{Y_0}(X)$.
c) Déterminer l'ensemble des vecteurs $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ (I_n - {}^tAA)X = \Phi_Z(X).$$

d) Comparer $||Y_0||$ et 1.

e) Montrer que l'égalité $||AX|| = ||X||$ est vérifiée si et seulement si $X \in \big(\mathrm{Vect}(Y_0)\big)^{\perp}$.

4. Soit une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ (I_n - {}^tBB)X = \Phi_Y(X).$$

Trouver en fonction de Y un majorant et un minorant de l'ensemble des valeurs absolues des valeurs propres réelles de B. Pour Y donné, existe-t-il une matrice B qui a pour valeurs propres le majorant et le minorant trouvés ?

Solution de l'exercice 2.13

1. La matrice ${}^tAA$ est symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Si λ est valeur propre associée au vecteur propre X, alors ${}^tX{}^tAAX = ||AX||^2$ et ${}^tX{}^tAAX = \lambda|XX||^2$, donc $\lambda \geqslant 0$. Comme $||AX|| \leqslant ||X||$, on a de même $\lambda \leqslant 1$.

2. Les vecteurs propres de ${}^tAA$ sont vecteur propres de $I_n - {}^tAA$ et si λ est une valeur propres de ${}^tAA$, alors $1-\lambda$ est valeur propre de $I_n - {}^tAA$. Ainsi d'après la question précédente les valeurs propres de $I_n - {}^tAA$ appartiennent aussi à $[0,1]$.
De plus comme $I_n - {}^tAA$ est de rang 1 il y a une seule valeur propre non nulle (élement de $]0,1]$).

3. a) Le fait que Φ_Y soit un endomorphisme est évident.
On a $\mathrm{rg}(\Phi_Y) = 1$, puisque pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\Phi_Y(X) \in \mathrm{Vect}(Y)$ et puisque $\Phi_Y(Y) = ||Y||^2Y \neq 0$.

b) Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormée de vecteurs propres de ${}^tAA$ où $e_1, \ldots, e_{n-1}$ sont associé à la valeur propre 1 et e_n à la valeur propre $\lambda \neq 1$. Par analyse/synthèse.
Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!], (I_n - {}^tAA)(e_i) = 0$ entraîne que $e_i \in \mathrm{Vect}(Y)^{\perp}$.
$(I_n - {}^tAA)(e_n) = (1-\lambda)e_n$ entraîne que $(1-\lambda)e_n = \langle Y, e_n\rangle Y$. Si l'on pose $Y = \alpha e_n$, alors $(1-\lambda)e_n = \langle Y, e_n\rangle Y$ entraîne que $\alpha^2 = 1-\lambda$, soit $\alpha = \pm\sqrt{1-\lambda}$.
La synthèse est désormais évidente.

c) La démonstration précédente montre qu'il existe deux vecteurs répondant à la question qui sont $\pm(\sqrt{1-\lambda})e_n$.

d) Comme $\lambda \in [0,1[$, on a $||Y_0|| \leqslant 1$.

e) On a les équivalences suivantes :

$$||AX||^2 = ||X||^2 \Leftrightarrow \langle X, (I_n - {}^tAA)(X)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle X, \Phi_{Y_0}(X)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle X, Y_0\rangle^2 = 0$$

4. Soit B une telle matrice et (μ, X) tels que $BX = \mu X$ et $X \neq 0$. Alors :

$$\langle X, (I_n - {}^tBB)(X)\rangle = \langle X, \Phi_Y(X)\rangle = \langle X, Y\rangle^2$$

Or :

$$\langle X, (I_n - {}^tBB)(X)\rangle = ||X||^2 - ||BX||^2 = ||X||^2(1-\mu^2)$$

Alors, par Cauchy Schwarz, on a :

$$0 \leqslant ||X||^2(1-\mu^2) = \langle X, Y\rangle^2 \leqslant ||X||^2\ ||Y||^2 \Leftrightarrow 1 - ||Y||^2 \leqslant \mu^2 \leqslant 1$$

Ainsi $|\mu| \in [\sqrt{1-||Y||^2}, 1]$.

Pour montrer que ces bornes sont atteintes, on choisit $e_n = \dfrac{Y}{||Y||}$ qu'on complète en une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$.

On définit la matrice qui est la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme qui a pour matrice $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \sqrt{1-||Y||^2})$ dans la base $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$. On a :

$$I_n - {}^tBB = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, ||Y||^2) = M_{\Phi_Y(e_1,\ldots,e_n)}$$

Exercice 2.14

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E. On note $\mathrm{rg}(f)$ et $\mathrm{rg}(g)$ leurs rangs respectifs.
Montrer que $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} = i + j$.
Soit $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $b_{i,j} = i$.

2. a) Déterminer une relation entre A, B et ${}^tB$.

b) En déduire le rang de A.

c) En déduire une valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé.

d) Justifier que A est diagonalisable et exprimer $\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}(A^2)$ en fonction des valeurs propres de A.

3. a) Exprimer $\mathrm{tr}(A^2)$ en fonction de $\mathrm{tr}(B^2)$ et $\mathrm{tr}({}^tBB)$.

b) En déduire $\mathrm{tr}(A^2)$ en fonction de n.

c) Déterminer toutes les valeurs propres de A.

Solution de l'exercice 2.14

1. On montre facilement que $\mathrm{Im}(f+g) \subseteq \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.
La formule de Grassmann permet de conclure que $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
a) On a :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & \cdots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Un calcul immédiat donne : $B + {}^tB = A$.

b) On remarque que B et ${}^tB$ sont des matrices de rang 1. Par la question 1, et (éventuellement) les endomorphismes canoniquement associés aux matrices, on a : $\mathrm{rg}(A) \leqslant \mathrm{rg}(B) + \mathrm{rg}({}^tB) = 1 + 1 = 2$.

Enfin en remarquant que les deux premières colonnes de A ne sont pas proportionnelles, on peut écrire : $\mathrm{rg}(A)=2$.

c) Ainsi 0 est valeur propre de A de sous-espace propre associé $\operatorname{Ker} A$ qui est de dimension $n-2 \geqslant 1$ car $n \geqslant 3$.

d) La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Il manque donc deux valeurs propres λ_1 et λ_2 et $\mathrm{tr}(A)=\lambda_1+\lambda_2$ et $\mathrm{tr}(A^2)=\lambda_1^2+\lambda_2^2$.

3. a) On utilise les questions précédentes pour écrire :

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A^2) &= \mathrm{tr}\big((B+{}^tB)^2\big)=\mathrm{tr}(B^2)+\mathrm{tr}(B\,{}^tB)+\mathrm{tr}({}^tBB)+\mathrm{tr}(({}^tB)^2)\\ &= 2\,\mathrm{tr}(B^2)+2\,\mathrm{tr}({}^tBB)\end{aligned}$$

Cette dernière propriété est obtenue soit par un calcul direct, soit en utilisant la propriété (hors programme) $\mathrm{tr}(CD)=\mathrm{tr}(DC)$.
b) On calcule :

$$\mathrm{tr}(B^2)=\mathrm{tr}\left(\frac{n(n+1)}{2}B\right)=\frac{n(n+1)}{2}\,\mathrm{tr}(B)=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Et $\mathrm{tr}({}^tBB)=\dfrac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}$, d'où $\mathrm{tr}(A^2)=\dfrac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$.

c) On peut alors écrire : $S=\lambda_1+\lambda_2=2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=n(n+1)$ et $\lambda_1^2+\lambda_2^2=\dfrac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$.

Donc $P=\lambda_1\lambda_2=\dfrac{n^2(1-n^2)}{12}$.
Finalement, λ_1 et λ_2 sont solutions de l'équation :

$$X^2-SX+P=0 \Longleftrightarrow X^2-n(n+1)X+\frac{n^2(1-n^2)}{12}=0.$$

On calcule le discriminant associé à l'équation précédente et on trouve :

$$\lambda_1=\frac{n(n+1)+\sqrt{2n^2(n+1)(2n+1)/3}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2=\frac{n(n+1)-\sqrt{2n^2(n+1)(2n+1)/3}}{2}.$$

Exercice 2.15

Soit $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On rappelle que la forme quadratique q associée à A est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R}^2,\quad q(x)={}^tXAX$$

où X est la matrice de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ dont les composantes sont les coordonnées du vecteur x dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
La forme quadratique q est définie positive si pour tout $x\in\mathbb{R}^2$, $x\neq 0 \Rightarrow q(x)>0$.

Pour tout $r\in\mathbb{R}$, on note q_r la forme quadratique associée à la matrice $\begin{pmatrix}1 & -r\\ -r & 1\end{pmatrix}$.

1.a) Montrer que q_r est définie positive si et seulement si $|r|<1$.

b) Soit Q_1 et Q_2 deux formes quadratiques définies positives sur $\mathbb{R}^2$.
Justifier l'existence d'un réel $c>0$ qui vérifie : $\forall x\in\mathbb{R}^2,\ Q_1(x)\leqslant c\times Q_2(x)$.

2. Soit a un réel tel que $0<a\leqslant 1$. Soit z_1 et z_2 deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans l'intervalle $[a,+\infty[$.

On suppose que pour tout réel $t\geqslant 0$, on a : $\begin{cases} z_1'(t)=z_1(t)\big(z_2(t)-2z_1(t)\big)\\[2mm] z_2'(t)=z_2(t)\big(z_1(t)-2z_2(t)\big)\end{cases}$.

On pose : $\forall\, t \geqslant 0,\ z(t) = \big(z_1(t), z_2(t)\big)$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que :

$$\forall\, t \geqslant 0,\ f(t) = q_{\frac{1}{2}}\big(z(t)\big)$$

On admet sans démonstration que pour tout $t \geqslant 0$, on a : $f'(t) = -z_1(t)\big(2z_1(t) - z_2(t)\big)^2 - z_2(t)\big(2z_2(t) - z_1(t)\big)^2$.

a) Établir l'inégalité : $\forall\, t \geqslant 0,\ f'(t) \leqslant -5\,a \times q_{\frac{4}{5}}\big(z(t)\big)$.

b) Montrer qu'il existe un réel $\theta > 0$ tel que pour tout $t \geqslant 0$, on a : $f'(t) \leqslant -\theta\, f(t)$.

c) À l'aide de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi(t) = f(t)\,\mathrm{e}^{\theta\, t}$, montrer que : $\forall\, t \geqslant 0,\ f(t) \leqslant f(0)\,\mathrm{e}^{-\theta\, t}$.

d) En déduire la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Solution de l'exercice 2.15

1.a) On note $x = (x_1, x_2)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Alors $\forall\, x \in \mathbb{R}^2,\ q_r(x) = x_1^2 - 2\,r x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 - r x_2)^2 + (1 - r^2)\, x_2^2$,

Donc : $(\forall x \neq 0, q_r(x) > 0) \iff 1 - r^2 > 0 \iff |r| < 1$.

b) D'après le cours, on sait qu'il existe deux réels strictement positifs α_1 et β_1 tels que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^2,\ \alpha_1(x_1^2 + x_2^2) \leqslant Q_1(x) \leqslant \beta_1(x_1^2 + x_2^2) \qquad (1)\,.$$

De même, il existe deux réels strictement positifs α_2 et β_2 tels que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^2,\ \alpha_2(x_1^2 + x_2^2) \leqslant Q_2(x) \leqslant \beta_2(x_1^2 + x_2^2) \qquad (2)\,.$$

Les relations (1) et (2) entraînent que $\forall\, x \in \mathbb{R}^2,\ Q_1(x) \leqslant \beta_1(x_1^2 + x_2^2) \leqslant \dfrac{\beta_1}{\alpha_2}\, Q_2(x)$.

On voit qu'en posant $c = \dfrac{\beta_1}{\alpha_2}$, l'inégalité proposée est vérifiée.

2. Pour tout $t \geqslant 0,\ f(t) = q_{\frac{1}{2}}\big(z(t)\big) = q_{\frac{1}{2}}\big(z_1(t), z_2(t)\big) = z_1^2(t) - z_1(t)z_2(t) + z_2^2(t)$. En dérivant par rapport à t, on a : $f'(t) = \big(2z_1(t) - z_2(t)\big)z_1'(t) + \big(2z_2(t) - z_1(t)\big)z_2'(t)$. D'après la définition de $z_1'(t)$ et $z_2'(t)$, on obtient :

$$\forall\, t \geqslant 0,\ f'(t) = -z_1(t)\big(2z_1(t) - z_2(t)\big)^2 - z_2(t)\big(2z_2(t) - z_1(t)\big)^2$$

a) Pour tout $t \geqslant 0,\ z_1(t) \geqslant a$ et $z_2(t) \geqslant a \Longrightarrow f'(t) \leqslant -a\big(2z_1(t) - z_2(t)\big)^2 - a\big(2z_2(t) - z_1(t)\big)^2$,
soit encore : $\forall\, t \geqslant 0,\ f'(t) \leqslant -a\big(5z_1^2(t) - 8z_1(t)z_2(t) + 5z_2^2(t)\big) = -5\,a\,q_{\frac{4}{5}}\big(z(t)\big)$

b) Puisque $\left|\dfrac{4}{5}\right| < 1$ et $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$, les formes quadratiques $q_{\frac{4}{5}}$ et $q_{\frac{1}{2}}$ sont définies positives.

Par suite, il existe un réel $c > 0$ tel que $q_{\frac{4}{5}}\big(z(t)\big) \geqslant c\,q_{\frac{1}{2}}\big(z(t)\big)$, ce qui conduit à : $\forall\, t \geqslant 0,\ f'(t) \leqslant -5\,acf(t)$, soit en posant $\theta = 5\,ac > 0$, $\forall\, t \geqslant 0,\ f'(t) \leqslant -\theta f(t)$.

c) L'étude de la fonction φ donne : $\forall\, t \geqslant 0,\ \varphi'(t) = \mathrm{e}^{\theta\, t}\big(f'(t) + \theta f(t)\big) \leqslant 0$ d'après ce qui précède.
Donc, φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et on a : $\forall\, t \geqslant 0,\ \varphi(t) \leqslant \varphi(0) = f(0)$. En définitive, $\forall\, t \geqslant 0,\ \varphi(t) \leqslant f(0) \iff \forall\, t \geqslant 0,\ f(t)\,\mathrm{e}^{\theta\, t} \leqslant f(0) \iff \forall\, t \geqslant 0,\ f(t) \leqslant f(0)\,\mathrm{e}^{-\theta\, t}$.

d) On a $\forall\, t \geqslant 0,\ f(t) = q_{\frac{1}{2}}\big(z(t)\big) > 0$ puisque $q_{\frac{1}{2}}$ est définie positive.
Ainsi : $0 < f(t) \leqslant f(0)\,\mathrm{e}^{-\theta\, t} \Longrightarrow \lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$ (par encadrement).

Exercice 2.16

Soient deux entiers $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 2$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Le rang d'un endomorphisme f de E est noté $\mathrm{rg}(f)$ et id_E désigne l'endomorphisme identité de E.
On note $0_{\mathcal{L}(E)}$ l'endomorphisme nul de E.

1. Soit $F_1, F_2, \ldots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E vérifiant $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_k$. Pour chaque $i \in [\![1,k]\!]$, on note p_i le projecteur de E sur F_i parallèlement au sous-espace $G_i = \displaystyle\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} F_j$.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathrm{rg}(p_i) = n$.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i = \mathrm{id}_E$.

c) Montrer que pour tout couple $(i,j) \in [\![1,k]\!]^2$ vérifiant $i \neq j$, on a : $p_j \circ p_i = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2. Dans cette question, soit $q_1, q_2, \ldots, q_k$ des endomorphismes de E tous non nuls et tels que :

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_k = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rg}(q_1) + \mathrm{rg}(q_2) + \cdots + \mathrm{rg}(q_k) \leqslant n\,.$$

a) Montrer que $E = \mathrm{Im}(q_1) \oplus \mathrm{Im}(q_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(q_k)$.

b) Montrer que pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, l'endomorphisme q_i est un projecteur de E et que pour tout couple $(i,j) \in [\![1,k]\!]^2$ vérifiant $i \neq j$, on a : $q_i \circ q_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

c) Montrer que pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, q_i est le projecteur sur $\mathrm{Im}(q_i)$ parallèlement à $K_i = \displaystyle\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} \mathrm{Im}(q_j)$.

Solution de l'exercice 2.16

1.a) Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $\mathrm{Im}(p_i) = F_i$, donc $\mathrm{rg}(p_i) = \dim F_i$. Par suite, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathrm{rg}(p_i) = \sum_{i=1}^{k} \dim F_i = \dim E$.

b) Soit $x \in E$. Notons $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ l'unique k-uplet appartenant à $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_k$ tel que $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_j$.

Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $x = x_i + \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} x_j$. De plus, $x_i \in F_i$ et $\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} x_j \in G_i$, donc $x_i = p_i(x)$.

Il s'ensuit que pour tout $x \in E$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i(x) = x$, c'est-à-dire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i = \mathrm{id}_E$.

c) Soit un couple $(i,j) \in [\![1,k]\!]^2$ vérifiant $i \neq j$. Comme $\mathrm{Im}(p_i) = F_i \subset G_j = \mathrm{Ker}(p_j)$, on a $p_j \circ p_i = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2.a) $E = \mathrm{Im}(q_1 + q_2 + \cdots + q_k) \subset \mathrm{Im}(q_1) + \mathrm{Im}(q_2) + \cdots + \mathrm{Im}(q_k) \subset E \Longrightarrow E = \mathrm{Im}(q_1) + \mathrm{Im}(q_2) + \cdots + \mathrm{Im}(q_k)$.
D'autre part, $\dim(\mathrm{Im}\, q_1) + \dim(\mathrm{Im}\, q_2) + \cdots + \dim(\mathrm{Im}\, q_k) \geqslant \dim\big(\mathrm{Im}(q_1) + \mathrm{Im}(q_2) + \cdots + \mathrm{Im}(q_k)\big) = \dim E = n$.
Donc, $\dim(\mathrm{Im}\, q_1) + \dim(\mathrm{Im}\, q_2) + \cdots + \dim(\mathrm{Im}\, q_k) = n$ et la somme $\mathrm{Im}(q_1) + \mathrm{Im}(q_2) + \cdots + \mathrm{Im}(q_k)$ est directe.

b) Soit $j \in [\![1,k]\!]$. Pour tout $x \in E$, on a $q_1 \circ q_j(x) + q_2 \circ q_j(x) + \cdots + q_k \circ q_j(x) = q_j(x)$, relation que l'on peut également écrire : $\displaystyle\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} q_i \circ q_j(x) + \big(q_j^2(x) - q_j(x)\big) = 0_E$.

Or, pour tout $i \in [\![1,k]\!]\backslash\{j\}$, $q_i \circ q_j(x) \in \mathrm{Im}\,(q_i)$ et $\left(q_j^2(x) - q_j(x)\right) \in \mathrm{Im}\,(q_j)$. La somme $\mathrm{Im}(q_1) + \mathrm{Im}(q_2) + \cdots + \mathrm{Im}(q_k)$ étant directe, on en déduit d'une part que pour tout $i \in [\![1,k]\!]\backslash\{j\}$ et $\forall\, x \in E$, on a $q_i \circ q_j(x) = 0_E$ et d'autre part que, pour tout $x \in E$, on a $q_j^2(x) - q_j(x) = 0_E$.

c) Soit $i \in [\![1,k]\!]$. Comme q_i est un projecteur, il projette sur $\mathrm{Im}(q_i)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(q_i)$. Il faut donc juste prouver que $\mathrm{Ker}(q_i) = K_i$.

On a, pour tout $j \in [\![1,k]\!]\backslash\{i\}$, $\mathrm{Im}(q_j) \subset \mathrm{Ker}(q_i)$ (car $q_i \circ q_j = 0$). Donc : $K_i \subset \mathrm{Ker}(q_i)$.
Or, d'après la définition de K_i, puis 2. b, puis le théorème du rang, on a :

$$\mathrm{dim} K_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} \mathrm{rg}(q_j) = n - \mathrm{rg}(q_i) = \mathrm{dim}(\mathrm{ker}(q_i)).$$

Comme $K_i \subset \mathrm{Ker}(q_i)$ et $\mathrm{dim} K_i = \mathrm{dim}(\mathrm{ker}(q_i))$, on a bien $\mathrm{Ker}(q_i) = K_i$.

Exercice 2.17

Soit E un espace vectoriel de dimension n, où $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

1. Soit u un endomorphisme de E. Le but de cette question est de montrer qu'il existe un endomorphisme w de E tel que $u = u \circ w \circ u$. On note r le rang de u .
a) Traiter les cas $r = 0$ et $r = n$.

b) On suppose maintenant que $r \in [\![1, n-1]\!]$.
i) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ soit libre et telle que, pour tout entier $i \in [\![r+1, n]\!]$, $u(e_i) = 0$.
ii) En déduire l'existence de w.

Pour tout endomorphisme f de E , on note Φ_f l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\forall g \in \mathcal{L}(E), \Phi_f(g) = f \circ g - g \circ f$$

On suppose que f est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$.

2. a) Montrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$ que pour tout endomorphisme g de E, on a :

$$(\Phi_f)^m(g) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f^{m-k} \circ g \circ f^k$$

b) Montrer que Φ_f est nilpotent.

3. Montrer que $f^{p-1} \in \mathrm{Im}\left((\Phi_f)^{2p-2}\right)$.

4. Préciser l'indice de nilpotence de Φ_f , c'est-à-dire le plus petit entier q tel que $(\Phi_f)^q = 0$.

Solution de l'exercice 2.17

1. a) Si $r = 0$, alors $u = 0$ et donc tout endomorphisme w convient. Si $r = n$, alors u est bijectif et $w = u^{-1}$ convient.
b) On suppose maintenant que $r \in [\![1, n-1]\!]$.
i) Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}\, u) = n - r > 0$. On considère $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}\, u$. Le théorème de la base incomplète assure qu'il existe r vecteurs $e_1, \ldots, e_r$ tels que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. Puisque, pour tout $i \in [\![r+1, n]\!]$, $e_i \in \mathrm{Ker}\, u$, alors $u(e_i) = 0$. Par ailleurs, considérons r réels $a_1, \ldots, a_r$ tels que $a_1 u(e_1) + \ldots + a_r u(e_r) = 0$. Alors $a_1 e_1 + \ldots + a_r e_r \in \mathrm{Ker}\, u$. Or, $\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_r)$ et $\mathrm{Ker}\, u$ sont en somme directe, donc $a_1 e_1 + \ldots + a_r e_r = 0$, d'où $a_1 = \ldots = a_r = 0$: la famille est libre.

ii) On remarque que la restriction de u à $\mathrm{Vect}\,(e_1,\ldots,e_r)$ est un isomorphisme de $\mathrm{Vect}\,(e_1,\ldots,e_r)$ sur $\mathrm{Vect}\,(u\,(e_1)\,,\ldots,u\,(e_r))$ (la surjectivité est évidente et l'égalité des dimensions aussi). Notons u cette restriction et considérons N un supplémentaire de $\mathrm{Vect}\,(u\,(e_1)\,,\ldots,u\,(e_r))$ dans E. On définit alors l'endomorphisme w de E de la façon suivante : w est nul sur N et w coïncide avec $(u)^{-1}$ sur $\mathrm{Vect}\,(u\,(e_1)\,,\ldots,u\,(e_r))$, de sorte que $w\,(u\,(e_i)) = e_i$ si $i \in [\![1,r]\!]$. On a alors : $\forall i \in [\![r+1,n]\!]$, $(u\circ w\circ u)\,(e_i) = 0 = u\,(e_i)$ et : $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $(u\circ w\circ u)\,(e_i) = u\,(e_i)$, donc $u\circ w\circ u = u$.

2. a) L'égalité est vraie pour $m=1$: il s'agit de la définition de Φ_f. Soit m tel que l'égalité soit vraie au rang m. On a alors, pour tout endomorphisme g de E :

$$\begin{aligned}
(\Phi_f)^{m+1}(g) &= \Phi_f\left((\Phi_f)^m(g)\right) = f\circ(\Phi_f)^m(g) - (\Phi_f)^m(g)\circ f\\
&= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}f^{m-k+1}\circ g\circ f^k - \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}f^{m-k}\circ g\circ f^{k+1}\\
&= f^{m+1}\circ g + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k\left[\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}\right]f^{m-k+1}\circ g\circ f^k + g\circ f^{m+1}\\
&= \sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k\binom{m+1}{k}f^{m+1-k}\circ g\circ f^k
\end{aligned}$$

b) Pour tout $g\in\mathcal{L}(E)$, $(\Phi_f)^{2p-1}(g) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2p-1}(-1)^k\binom{2p-1}{k}f^{2p-1-k}\circ g\circ f^k$.

Or, $f^{2p-1-k}=0$ si $k\leqslant p-1$ et $f^k=0$ si $k\geqslant p$, donc $(\Phi_f)^{2p-1}(g)=0$. Ceci est vrai pour tout $g\in\mathcal{L}(E)$ donc $(\Phi_f)^{2p-1}=0$. Ainsi, Φ_f est nilpotent.

3. Soit w un endomorphisme tel que $f^{p-1}\circ w\circ f^{p-1} = f^{p-1}$. On a :

$$(\Phi_f)^{2p-2}(w) = \sum_{k=0}^{2p-2}(-1)^k\binom{2p-2}{k}f^{2p-2-k}\circ w\circ f^k$$

Or, $f^{2p-2-k}=0$ si $k\leqslant p-2$ et $f^k=0$ si $k\geqslant p$, donc il ne reste que le terme correspondant à $k=p-1$:

$$(\Phi_f)^{2p-2}(w) = (-1)^{p-1}\binom{2p-2}{p-1}f^{p-1}\circ w\circ f^{p-1} = (-1)^{p-1}\binom{2p-2}{p-1}f^{p-1}$$

On en déduit que :

$$f^{p-1} = (\Phi_f)^{2p-2}\left(\frac{(-1)^{p-1}}{\binom{2p-2}{p-1}}w\right) \Rightarrow f^{p-1}\in\mathrm{Im}\left((\Phi_f)^{2p-2}\right)$$

4. Si l'on prend pour p l'indice de nilpotence de f, on a vu à la question 2.b) que $(\Phi_f)^{2p-1}=0$. Or, $f^{p-1}\neq 0$ donc d'après la question 3, $(\Phi_f)^{2p-2}\neq 0$ et donc l'indice de nilpotence de Φ_f est égal à $2p-1$.

Exercice 2.18

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n à coefficients réels. On considère l'espace vectoriel $E=\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique noté $\langle\,,\rangle$ tel que pour tout $(X,Y)\in E^2$, on a $\langle X,Y\rangle = {}^tXY$. Pour toute matrice $A\in\mathcal{S}_n$, on pose :

$$\forall\, X\in E,\ q_A(X) = {}^tXAX$$

L'ensemble $\mathcal{S}_n^+$ désigne l'ensemble des matrices A de $\mathcal{S}_n$ telles que $q_A(X)\geqslant 0$ pour tout X de E. On pose :

$$C(q_A) = \{X\in E,\ \ q_A(X)=0\}.$$

1. Calculer le gradient de q_A, noté $\nabla q_A(X)$, en tout point X de E.

2. Dans cette question, on suppose que $A \in \mathcal{S}_n^+$.

a) Montrer que q_A présente un minimum global sur E en tout $X \in C(q_A)$.

b) En déduire que $C(q_A) = \operatorname{Ker} A$.

3. On suppose qu'il existe $U \in E$ et $V \in E$ tels que $q_A(U) > 0$ et $q_A(V) < 0$.

a) Montrer que (U, V) est une famille libre de E et qu'il existe deux réels λ_1 et λ_2 distincts vérifiant :

$$q_A(U + \lambda_1 V) = q_A(U + \lambda_2 V) = 0$$

b) Dans ce cas, $C(q_A)$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $A \in \mathcal{S}_n$ pour que $C(q_A)$ soit un sous-espace vectoriel de E.

Solution de l'exercice 2.18

Afin de simplifier les notations, on pose : $q_A = q$.

1. Pour tout H de E, on a :

$$q(X + H) - q(X) = 2\,{}^tXAH + {}^tHAH = < 2AX, H > + q(H)$$

Or, par l'inégalité de Cauchy Schwarz, $|q(H)| \leqslant C||H||^2 = o(||H||)$. On reconnaît le développement limité à l'ordre 1 ; on en déduit par unicité du développement limité d'ordre 1 que

$$\nabla q(X) = 2AX$$

2. a) Si A est une matrice de $\mathcal{S}_n^+$, alors pour tout $X \in C(q)$, $q(X) = 0$ et pour tout $Y \in E$, $q(Y) \geqslant 0 = q(X)$, donc q présente un minimum global sur E en tout $X \in C(q)$.

b) On en déduit que q étant C^1 sur $\mathbb{R}^n$, le gradient de q en X est nul, donc :

$$2AX = 0.$$

Par conséquent, si $X \in C(q)$, alors $X \in \operatorname{Ker} A$. La réciproque est immédiate donc $C(q) = \operatorname{Ker} A$.

3. On suppose qu'il existe U et V de E tels que $q(U) > 0$ et $q(V) < 0$.

a) Si (U, V) est une famille liée, alors les deux vecteurs sont colinéaires et $q(U)$ et $q(V)$ sont de même signe. Par conséquent, (U, V) est une famille libre.
On a pour tout réel λ :

$$q(U + \lambda V) = q(U) + 2\lambda\,{}^tUAV + \lambda^2 q(V).$$

C'est un polynôme de degré 2 ; en notant Δ le discriminant, on a :

$$\Delta = 4({}^tUAV)^2 - 4q(U)q(V).$$

Le produit $q(U)q(V)$ est négatif et donc le discriminant est positif. De plus $q(U)q(V)$ est non nul donc $\Delta > 0$. Par conséquent il existe deux racines distinctes λ_1 et λ_2 telles que $q(U + \lambda_1 V) = q(U + \lambda_2 V) = 0$.

b) Dans ce cas, $C(q)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E. En effet

$$(U + \lambda_1 V) - (U + \lambda_2 V) = (\lambda_1 - \lambda_2)V \notin C(q)$$

4. Le cône $C(q)$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si A est une matrice positive ou négative.

Exercice 2.19

On note $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

1. Montrer que pour tout $f \in E$ et tout x réel, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x+t)e^t dt$ existe.

On pose alors : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x+t)e^t dt$.

2. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer g' en fonction de g et f.

Soit Φ l'application définie sur E par : $\forall\, f \in E,\ \Phi(f) = g$.
Soit un entier $n \geqslant 2$ et $F_n = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, \ldots, f_n)$, où $\forall k \in [\![0, n]\!], f_k : x \mapsto e^{-kx}$.

3. a) Montrer que la dimension de F_n est égale à $n + 1$.

b) Montrer que la restriction de Φ à F_n induit un endomorphisme de F_n qu'on notera Φ_n.

c) L'endomorphisme Φ_n est-il bijectif ? Est-il diagonalisable ?

4. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que $h \in E$.

b) Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire la dimension de chaque sous-espace propre de Φ_n.

Solution de l'exercice 2.19

1. Pour tout x réel, la fonction $t \to f(x+t)e^t$ est continue sur $[0, 1]$. Ainsi, g est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Effectuons le changement de variable $u = x + t$. Il vient $g(x) = e^{-x} \displaystyle\int_x^{x+1} f(u)e^u du$.

Par le théorème fondamental du calcul intégral, g est dérivable et pour tout x réel, on a :

$$g'(x) = e^{-x}(f(x+1)e^{x+1} - f(x)e^x) - g(x) = ef(x+1) - f(x) - g(x)$$

3. a) La famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre. Cela se montre par récurrence sur n. De manière informelle, supposons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k e^{-kx} = 0$. Alors en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $\alpha_0 = 0$, puis en factorisant par e^{-x}, il vient $\alpha_1 = 0$ etc... Ainsi $\dim(F_n) = n + 1$.

b) On a $\Phi_n(f_0) = (e-1)f_0$ et $\Phi_n(f_1) = f_1$.
Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Alors :

$$\Phi_n(f_k) = \int_0^1 e^{-k(x+t)}e^t dt = e^{-kx}\int_0^1 e^{(1-k)t}dt = \frac{1-e^{k-1}}{k-1}e^{-kx} = \frac{1-e^{k-1}}{k-1}f_k$$

Ceci montre la stabilité de F_n par Φ.

c) On vient de trouver les valeurs propres de Φ_n. Ce sont les réels $e-1, 1, \ldots, \dfrac{1-e^{k-1}}{k-1}, \ldots, \dfrac{1-e^{n-1}}{n-1}$, les vecteurs propres associés étant les fonctions f_k.
Aucune valeur propre n'est nulle ; l'endomorphisme Φ_n est bijectif. Il est diagonalisable puisqu'on a obtenu une base de vecteurs propres.

4. a) La fonction h est continue en 0 en effectuant un développement limité à l'ordre 1 de la fonction exponentielle.

b) Une étude rapide des variations de h donne :

$$h'(x) = \frac{xe^{-x} - 1 + e^{-x}}{x^2} = \frac{N(x)}{D(x)},\ \text{avec } N'(x) = -xe^{-x}$$

Ceci montre que N est croissante sur $\mathbb{R}^-$ puis décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $N(0) = 0$, ceci montre que $h'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}^*$, donc que h est décroissante sur $\mathbb{R}$.
La fonction h est donc bijective, ce qui entraîne que les valeurs propres de Φ_n sont deux à deux distinctes car ce sont les images des réels $-1, 0, 1, \ldots, n-1$ par la fonction bijective h.

c) Chaque sous-espace propre est de dimension 1.

Exercice 2.20

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $s = a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice A dans la base canonique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & -c \\ -a & c & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$ et montrer que $\operatorname{Im}(f) = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.

2. a) Vérifier que $P(X) = X^3 + s\,X$ est un polynôme annulateur de A.

b) La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

3. On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $C = A^2 + s\,I_3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer $\operatorname{Ker}(g)$ et $\operatorname{Im}(g)$.

b) Dans cette question uniquement, on suppose $s = 1$. Quelle est la nature de l'endomorphisme g ?

c) À quelle condition (nécessaire et suffisante) sur $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $B = A + \lambda\,I_3$ est-elle inversible ?
Dans ce cas, expliciter B^{-1}, matrice inverse de B, comme un polynôme en A.

Solution de l'exercice 2.20

1. Déterminons le noyau de f. Comme $(a, b, c) \neq 0$, on a :

$$A\,Z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} az & = by \\ bx & = cz \\ cy & = ax \end{cases} \Leftrightarrow Z \in D = \operatorname{Vect}(U) \text{ où } U = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

Les cas particuliers où un ou deux des nombres a, b, c sont nuls sont inclus dans le cas général que nous venons de traiter.

Pour l'image de f, par le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$; les trois colonnes de A vérifient l'équation de plan

$${}^t\!U\,Z = cx + ay + bz = 0$$

donc $\operatorname{Im}(f) = D^{\perp}$.

2. a) On a :

$$C = A^2 + s\,I_3 = \begin{pmatrix} -b^2 - a^2 & ac & bc \\ ac & -c^2 - b^2 & ab \\ bc & ab & -a^2 - c^2 \end{pmatrix} + s\,I_3 = \begin{pmatrix} c^2 & ac & bc \\ ac & a^2 & ab \\ bc & ab & b^2 \end{pmatrix} = U\,{}^t\!U$$

d'où $A^3 + s\,A = A\,U\,{}^t\!U = 0$.

b) On sait que les valeurs propres d'une matrice sont parmi les racines de tout polynôme annulateur, d'où $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subseteq \operatorname{Rac}_{\mathbb{R}}(P) = \{0\}$; donc $A \neq 0$ ne peut être diagonalisable su $\mathbb{R}$.

3. a) Commençons par le noyau de g. On a :

$$CZ = 0 \Leftrightarrow U\,{}^t\!U\,Z = 0 \Leftrightarrow Z \in D^{\perp} = \mathrm{Ker}(g)$$

Passons à l'image de g. Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}\,g) = 1$; les trois colonnes de $C = U\,{}^t\!U$ sont colinéaires à U, donc $\mathrm{Im}(g) = D$.

b) On a $s = 1 \Rightarrow {}^t\!U\,U = 1 \Rightarrow CU = U$, donc g est la projection orthogonale sur D.

c) La matrice $B = A + \lambda\, I_3$ est inversible si et seulement si $-\lambda \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \Leftrightarrow \lambda \neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned} 0 = \quad & A\,(A^2 + s\,I_3) = B\,(A^2 + s\,I_3) - \lambda\left[B^2 - 2\,\lambda\,B + (\lambda^2 + s)\,I_3\right] \\ & \Leftrightarrow B\left[A^2 + s\,I_3 - \lambda\,B + 2\lambda^2\,I_3\right] = \lambda\,(\lambda^2 + s)\,I_3 \\ & \Leftrightarrow B^{-1} = \frac{A^2 - \lambda\,A + (\lambda^2 + s)\,I_3}{\lambda\,(\lambda^2 + s)} \end{aligned}$$

Exercice 2.21

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé.

1. a) Déterminer un polynôme annulateur (non nul) d'une matrice scalaire $M = \lambda\,I_n$, où $\lambda \in \mathbb{C}$ et I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale. Déterminer un polynôme annulateur (non nul) de D.

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme (non constant) à coefficients complexes. Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que P soit un polynôme annulateur de M.

Dans la suite, on considère le polynôme $Q(X) = X^2 + 1$ et on note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{C}^n$. 3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Q(M) = 0$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M.

a) Montrer que :

$$\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}(f - i\,Id) \oplus \mathrm{Ker}(f + i\,Id)$$

où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

b) Que peut-on en déduire concernant la matrice M ?

c) On note $\overline{z}$ le conjugué d'un nombre complexe z.

Montrer que si $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre complexe de M associé à la valeur propre i, alors

$\overline{Z} = \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \vdots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre complexe de M associé à la valeur propre $-i$.

d) En déduire que n est nécessairement pair.

4. a) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $Q(M) = 0$.

b) En déduire, lorsque n est un entier pair, une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Q(M) = 0$.

Solution de l'exercice 2.21

1. a) Le polynôme $P(X) = X - \lambda$ répond à la question.

b) Si l'on note $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors le polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ convient.

2. Le polynôme P étant à coefficients complexes, il admet au moins une racine λ et $M = \lambda\, Id$ convient.

3. a) Pour tout $u \in \mathbb{C}^n$, on a $u = \dfrac{1}{2i}\Big[\big(i\,Id + f\big)(u) + \big(i\,Id - f\big)(u)\Big] \in \operatorname{Ker}(f - i\,Id) + \operatorname{Ker}(f + i\,Id)$, et les sous-espaces vectoriels propres sont en somme directe.

$$\mathbb{C}^n = \operatorname{Ker}(f - i\,Id) \oplus \operatorname{Ker}(f + i\,Id)$$

b) On en déduit que la matrice M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

c) La matrice M est réelle ; il suffit de conjuguer les éléments de l'équation $MZ = iZ$.

d) La matrice M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Toute base (X_j) de vecteurs propres de $\operatorname{Ker}(f - iId)$ donnera par conjugaison, une base $(\overline{X_j})$ de vecteurs propres de $\operatorname{Ker}(f + iId)$. Ces deux sous-espaces sont de même dimension et supplémentaires. Donc n est pair.

4. a) Effectuons un petit calcul :

$$M^2 + I = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + bc & (a+d)\,b \\ (a+d)\,c & bc + d^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on peut prendre $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Il reste à construire une matrice d'ordre pair formée de blocs diagonaux de J, soit :

$$M = \begin{pmatrix} J & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J \end{pmatrix}$$

Exercice 2.22

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, où $n \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme de E.

1. On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Montrer que si $u \neq 0$, alors u est une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que $u = \lambda Id_E$.

On rappelle (ou on admet) que la trace de la matrice d'un endomorphisme u est indépendante de la base dans laquelle l'endomorphisme est écrit. On la note $\operatorname{tr}(u)$.

Dans toute la suite, u désigne un endomorphisme non nul de E, de trace nulle.

2. Montrer qu'il existe un vecteur x_0 tel que $(x_0, u(x_0))$ soit libre, puis un sous-espace F de E, supplémentaire de $\operatorname{Vect}(x_0)$ dans E et contenant $u(x_0)$.

On note p la projection de E sur F parallèlement à $\operatorname{Vect}(x_0)$.

3. a) Montrer que F est stable par $p \circ u$ et que l'endomorphisme induit par $p \circ u$ sur F est de trace nulle.

b) En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u a tous ses éléments diagonaux nuls.

c) En déduire que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

Solution de l'exercice 2.22

1. Pour tout $x \in E$ non nul, il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$. Soit $(x, y) \in E^2$ quelconques non nuls. Suivant la liberté de la famille (x, y) et en utilisant $z = x + y$, on montre que $\lambda_x = \lambda_y$. On termine en utilisant une base de E. On peut également traiter le cas où x et y sont liés.

2. Par l'absurde. Si, pour tout x de E, $(x, u(x))$ est liée, alors u est une homothétie. Alors, il existe λ tel que $u = \lambda Id$ et $\mathrm{tr}(u) = n\lambda$. Comme $\mathrm{tr}(u) = 0$ alors $\lambda = 0$ et u est l'endomorphisme nul. Absurde.
La famille $(x_0, u(x_0))$ étant libre, on peut la compléter en une base de E. Donc il existe des vecteurs $x_3, \ldots, x_n$ de E tels que $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), x_3, \ldots, x_n)$ est une base de E. Enfin $F = \mathrm{Vect}(u(x_0), x_3, \ldots, x_n)$ vérifie ce qui est demandé.

3. a) Soit $y \in F$. On a $p \circ u(y) \in \mathrm{Im}(p)$. Or $\mathrm{Im}(p) \subset F$, donc $p \circ u(y) \in F$. Donc F est stable par $p \circ u$.

Soit $M = M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 1 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ et $N = M_{\mathcal{B}}(p \circ u)$. On a :
$p \circ u(x_0) = u(x_0)$, car $u(x_0) \in F$, $p \circ u(u(x_0)) \in F$. En procédant ainsi, il vient :

$N = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 1 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}_F}(p \circ u) = \begin{pmatrix} a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

Or $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(N) = 0 \Rightarrow \mathrm{tr}(p \circ u) = 0$.

b) Pour $n = 1$. si u est de trace nulle, u est l'endomorphisme nul, donc sa matrice dans n'importe quelle base est nulle. Soit $n \geq 1$. Supposons le résultat établi pour tout espace vectoriel de dimension n. Soit E un espace vectoriel de dimension $n + 1$ et u un endomorphisme de trace nulle. On utilise la question précédente pour déterminer F et une base de F dans laquelle la matrice de $p \circ u$ a des coefficients diagonaux nuls. Notons $\mathcal{B}'$ cette base. La concaténation de x_0 et de $\mathcal{B}'$ est une base notée $\mathcal{B}$ de E qui donne le résultat annoncé.
En effet si $y \in \mathcal{B}'$, alors $u(y) = \lambda_0 x_0 + (p \circ u)(y)$.

c) Soit A une matrice de trace nulle et u l'endomorphisme canoniquement associé. D'après ce qui précède, il existe une base dans laquelle la matrice de u a ses coefficients diagonaux tous nuls, ce qui signifie exactement que A est semblable à une matrice A' à coefficients diagonaux tous nuls.

Exercice 2.23

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal 3.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice carrée d'ordre n définie par :

$$\forall\, (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout élément $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $q(X) = {}^tXAX$.

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $q(X) = 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$.

2. a) Établir pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'encadrement : $-2{}^tXX \leqslant q(X) \leqslant 2{}^tXX$. Montrer l'équivalence suivante :

$$|q(X)| = 2{}^tXX \Leftrightarrow X = 0$$

b) Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $-2 < \lambda < 2$.

3. Pour tout $\lambda \in]-2,2[$, on pose $\lambda = 2\cos t$, avec $t \in]0,\pi[$ et on note E_λ l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+2} = (2\cos t)u_{k+1} - u_k$$

Soit F_λ le sous-espace vectoriel de E_λ constitué des éléments $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de E_λ vérifiant $u_0 = u_{n+1} = 0$. Déterminer F_λ.

4. Déterminer les éléments propres de la matrice A.

Solution de l'exercice 2.23

1. On a $AX = \begin{pmatrix} 0 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} + x_n \\ x_{n-1} + 0 \end{pmatrix}$. Donc :

$$q(X) = x_1x_2 + \sum_{i=2}^{n-1} x_i(x_{i-1} + x_{i+1}) + x_{n-1}x_n = x_1x_2 + \sum_{i=1}^{n-2} x_ix_{i+1} + \sum_{i=2}^{n-1} x_ix_{i+1} + x_{n-1}x_n = 2\sum_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}$$

2. a) Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $-(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leqslant 2x_ix_{i+1} \leqslant x_i^2 + x_{i+1}^2$. (*)

Donc :

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{n-1} & (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} 2x_ix_{i+1} \leqslant \sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2 + x_{i+1}^2) \\
& \Leftrightarrow -\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leqslant q(X) \leq \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \\
& \Leftrightarrow -x_1^2 - x_n^2 - 2\sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 \leqslant q(X) \leqslant x_1^2 + x_n^2 + 2\sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 \ \Leftrightarrow -2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant q(X) \leq 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\
& \Leftrightarrow -2{}^tXX \leqslant q(X) \leqslant 2{}^tXX
\end{aligned}$$

Ainsi, $|q(X)| = 2{}^tXX$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a l'égalité dans (*), soit $x_i = x_{i+1}$ ou $x_i = -x_{i+1}$ et $x_1 = 0$ et $x_n = 0$, donc si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!], x_i = 0$, c'est-à-dire $X = 0$.

b) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. On a $q(X) = \lambda{}^tXX$. Donc, $-2{}^tXX < q(X) < 2{}^tXX$ car $X \neq 0$, donc on n'a pas l'égalité. D'où $-2 < \lambda < 2$.

3. En résolvant la relation de récurrence double donnée, on trouve $u_k = \lambda e^{ikt} + \mu e^{-ikt}$. La suite $(u_k)_k$ appartient à F_λ si et seulement si $u_0 = u_{n+1} = 0$, soit :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda e^{i(n+1)t} + \mu e^{-i(n+1)t} = 0 \end{cases}$$

Ainsi, la suite $(u_k)_k \in F_\lambda$ si et seulement si $\sin((n+1)t) = 0$, soit $t = t_\ell = \dfrac{\ell\pi}{n+1}$, avec $\ell \in [\![1, n]\!]$ (car $t \in]0, \pi[$).

En conclusion :

- si $t \notin \{t_1, \ldots, t_n\}$, alors $(u_k) \in F_\lambda \Leftrightarrow (u_k) = 0_{E_\lambda}$;
- si $t \in \{t_1, \ldots, t_n\}$, alors $(u_k) \in F_\lambda$ et $(u_k) \neq 0_{E_\lambda}$.

4. On vient de montrer que si $\lambda = 2\cos t$ est valeur propre de A, alors $t = \dfrac{\ell\pi}{n+1}$, avec $\ell \in [\![1, n]\!]$.

Réciproquement, soit $t = \dfrac{\ell\pi}{n+1}, \ell \in [\![1, n]\!]$ et $\lambda = 2\cos t$. Donc, $F_\lambda \neq \{0_{E_\lambda}\}$. Soit $(u_k)_k \in F_\lambda$, une suite non nulle. On pose : $\forall i \in [\![1, n]\!], x_i = u_i$. On a alors $AX = \lambda X$.

On a forcément $x_1 \neq 0$ sinon $(u_k)_k$ serait la suite nulle. Donc $X \neq 0$ et X est un vecteur propre de la matrice A et $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. En posant $\theta_\ell = \dfrac{\ell\pi}{n+1}$, le vecteur propre associé à la valeur propre $2\cos\left(\dfrac{\ell\pi}{n+1}\right)$ est $X = \begin{pmatrix} \sin(\theta_\ell) \\ \sin(2\theta_\ell) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_\ell) \end{pmatrix}$.

Ainsi, A possède n valeurs propres distinctes et la dimension de chaque sous-espace propre est 1.

Chapitre 3

Probabilités

Exercice 3.1

Soit μ un réel supérieur ou égal à 1 que l'on cherche à estimer.
Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que les suites de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ sont mutuellement indépendantes, que chaque X_n suit la loi uniforme sur $[0, \mu]$ et que chaque Y_n suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose : $Z_n = \min(X_n, Y_n)$. On pose alors, pour $n \in \mathbb{N}^\star$: $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Z_k$.

1. Montrer que Z_1 est une variable aléatoire à densité ; déterminer sa loi et calculer son espérance.

2. Écrire une fonction Scilab d'entête `simulation(n,mu)` qui, pour un entier $n \geqslant 1$ et un réel mu donnés, renvoie une simulation de la variable aléatoire T_n.

3. a) Montrer que la suite de variables aléatoires $(T_n)_n$ converge en probabilité vers un réel que l'on déterminera.

b) Déterminer un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour lequel $\widetilde{T_n} = aT_n + b$ est un estimateur sans biais de $\dfrac{1}{\mu}$.
Est-il convergent ?

4. a) Montrer que $V(Z_1) \leqslant \dfrac{1}{12}$.

b) Soit α un réel de $]0, 1[$. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, construire, pour n assez grand, à l'aide de $\widetilde{T_n}$, un intervalle de confiance pour $\dfrac{1}{\mu}$ au niveau de confiance $1 - \alpha$ de la forme $[U_n, V_n]$.

c) Construire alors, pour n assez grand, un intervalle de confiance pour μ au niveau de confiance $1 - \alpha$ à l'aide de U_n et V_n

---

Solution de l'exercice 3.1

1. Le support de Z_1 vaut $[0, 1]$. Donc si $x < 0$, $F_{Z_1}(x) = 0$ et si $x > 1$, $F_{Z_1}(x) = 1$. Puis si $x \in [0, 1]$, $P(Z_1 > x) = P([X_1 > x] \cap [Y_1 > x])$.
Ces deux événements sont indépendants, $P(Z_1 > x) = (1 - x)(1 - x/\mu)$. Et $\forall x \in [0, 1]$, $F_{Z_1}(x) = 1 - (1 - x)(1 - x/\mu)$.
En résumé

$$F_{Z_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1 - x)(1 - x/\mu) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La fonction F_{Z_1} est continue en 0 et en 1, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé de 0 et de 1, la variable est à densité.

$$f_{Z_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu}(\mu + 1 - 2x) & \text{si } x \in [0,1] \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme Z_1 est bornée, $E(Z_1)$ existe et, après calcul $E(Z_1) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6\mu}$.

2. Une proposition :

```
function T=simulation(n,mu)
T=0
for i=[1..n]
  y=rand()
  z=rand()*mu
  T=T+min([y,z])
end
T=T/n;
endfunction
```

3. a) Les variables $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions et de même loi.
D'après la loi des grands nombres, la suite $(T_n)_n$ converge en probabilité vers $E(Z_1) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6\mu}$.
b) Comme $E(T_n) = E(Z_1) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6\mu}$, $\widetilde{T_n} = 3 - 6T_n$ est un estimateur sans biais de $\dfrac{1}{\mu}$. On a :

$$V(\widetilde{T_n}) = \frac{36\, V(Z_1)}{n} \to 0$$

Aussi, $\widetilde{T_n}$ est convergent.
4. a) On a $E(Z_1^2) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6\mu}$, donc $V(Z_1) = E(Z_1^2) - E^2(Z_1) = \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{36\mu^2} \leqslant \dfrac{1}{12}$.
b) Construisons un événement de probabilité $1 - \alpha$ avec Bienaymé-Tchebychev :
$P(|\widetilde{T_n} - 1/\mu| > \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(\widetilde{T_n})}{\varepsilon^2}$. Or, $V(\widetilde{T_n}) = \dfrac{36}{n} V(Z_1) \leqslant \dfrac{3}{n}$. Donc :

$$P(|\widetilde{T_n} - 1/\mu| > \varepsilon) \leqslant \frac{3}{n\varepsilon^2} \text{ et } P(|\widetilde{T_n} - 1/\mu| \leqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{3}{n\varepsilon^2}$$

Il suffit donc de prendre $\dfrac{3}{n\varepsilon^2} = \alpha$ soit $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{3}{n\alpha}}$.
Pour s'assurer que $0 < \alpha < 1$, il faut choisir $n > \dfrac{3}{\varepsilon^2}$. Ainsi $P(|\widetilde{T_n} - 1/\mu| \leqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \alpha$.

Donc avec une probabilité supérieure à $1 - \alpha$, on a : $\widetilde{T_n} - \sqrt{\dfrac{3}{n\alpha}} \leqslant \dfrac{1}{\mu} \leqslant \widetilde{T_n} + \sqrt{\dfrac{3}{n\alpha}}$.
Or, $\dfrac{1}{\mu} \in]0,1]$. Ainsi : $U_n = \max(0, \widetilde{T_n} - \sqrt{\dfrac{3}{n\alpha}})$ et $V_n = \min(1, \widetilde{T_n} + \sqrt{\dfrac{3}{n\alpha}})$.
c) On sait déjà que $\mu \geqslant 1$ et $U_n \leqslant \dfrac{1}{\mu} \leqslant V_n$.

- Si $0 < U_n < V_n < 1$, on prend comme intervalle de confiance pour μ : $\left[\dfrac{1}{V_n}, \dfrac{1}{U_n}\right]$.
- Si $U_n = 0$ et $V_n = 1$, on prend comme intervalle de confiance pour μ : $[1, +\infty[$.
- Si $0 = U_n < V_n < 1$, on prend comme intervalle de confiance pour μ $\left[\dfrac{1}{V_n}, +\infty\right[$.
- Si $0 < U_n < 1 = V_n$, on prend comme intervalle de confiance pour μ $\left[1, \dfrac{1}{U_n}\right]$.

Exercice 3.2

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit $R \in \mathbb{N}^*$. On dispose de R pièces de monnaie numérotées de 1 à R qui donnent chacune « pile » avec la probabilité p. On effectue une suite de manches avec ces pièces de la manière suivante :

- lors de la première manche, on lance chaque pièce une fois ;
- aux manches suivantes, on ne relance que les pièces qui n'ont pas donné « pile » aux manches précédentes ;
- on s'arrête lorsque toutes les pièces ont donné « pile ».

Pour tout $k \in [\![1, R]\!]$, on note X_k le nombre total de lancers effectués avec la k-ième pièce.
On note Y le nombre de manches effectuées.

1. Déterminer la loi de X_k, son espérance et sa variance.

2. Déterminer la loi de Y.

3. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_n P(Y > n)$.

On admet alors que Y admet une espérance et que $E(Y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y > n)$.

4. Soit la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 - (1-q^x)^R$.

Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = -\frac{1}{\ln q}\sum_{k=0}^{R-1}\frac{1}{k+1}$.

5. Établir l'encadrement : $\displaystyle -\frac{1}{\ln q}\sum_{k=0}^{R-1}\frac{1}{k+1} \leqslant E(Y) \leqslant 1 - \frac{1}{\ln q}\sum_{k=0}^{R}\frac{1}{k+1}$.

En déduire un équivalent de $E(Y)$ lorsque R tend vers $+\infty$.

On pourra admettre sans démonstration que $\displaystyle\sum_{k=0}^{R-1}\frac{1}{k+1}$ *est équivalent à* $\ln R$ *lorsque* R *tend vers* $+\infty$.

Solution de l'exercice 3.2

1. La variable aléatoire X_k est le nombre de coups nécessaires pour obtenir le premier « pile » lors d'une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès p.
Donc, X_k suit la loi géométrique de paramètre p, d'où $E(X_k) = \dfrac{1}{p}$ et $V(X_k) = \dfrac{q}{p^2}$.

2. On reconnaît que $Y = \max(X_1, \ldots, X_R)$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par indépendance, on a :

$$P(Y \leqslant n) = P(X_1 \leqslant n, \ldots, X_R \leqslant n) = \prod_{k=1}^{R} P(X_k \leqslant n) = (1-q^n)^R.$$

Ceci reste valable pour $n = 0$. Donc : $P(Y = n) = P(Y \leqslant n) - P(Y \leqslant n-1) = (1-q^n)^R - \left(1-q^{n-1}\right)^R$.

3. Comme $|q| < 1$, on a : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Par ailleurs on sait que $(1-x)^R \underset{x\to 0}{=} 1 - Rx + o(x)$, d'où :

$$(1-q^n)^R = 1 - Rq^n + o(q^n), \text{ soit } P(Y > n) = 1 - (1-q^n)^R \underset{n\to+\infty}{\sim} Rq^n$$

Comme la série géométrique $\sum Rq^n$ converge et est à termes positifs, par théorème de comparaison pour les séries, on en déduit que la série $\sum P(Y > n)$ converge.

4. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^A \left(\sum_{k=0}^{R-1} q^x\,(1-q^x)^k\right)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{R-1}\int_0^A \mathrm{e}^{x\ln q}\left(1-\mathrm{e}^{x\ln q}\right)^k\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=0}^{R-1}\left[-\frac{\left(1-\mathrm{e}^{x\ln q}\right)^{k+1}}{(k+1)\ln q}\right]_0^A = \sum_{k=0}^{R-1} -\frac{\left(1-\mathrm{e}^{A\ln q}\right)^{k+1}}{(k+1)\ln q} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{R-1}\frac{-1}{(k+1)\ln q}.\end{aligned}$$

5. On a : $\forall x \geqslant 0, \quad f(x) = 1-(1-q^x)^R = 1-(1-\mathrm{e}^{x\ln q})^R$. Comme $\ln q < 0$, on voit que f est décroissante sur $[0,+\infty[$ (composée de fonctions monotones). Par encadrement d'une somme par des intégrales, on en déduit :

$$\int_0^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=0}^{N} \underbrace{f(n)}_{=P(Y>n)} \leqslant \int_0^N f(x)\,\mathrm{d}x + 1.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ dans les inégalités ci-dessus, puisque tous les termes convergent, on obtient :

$$\frac{-1}{\ln q}\sum_{k=0}^{R-1}\frac{1}{(k+1)} = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant E(Y) \leqslant \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x + 1 = \frac{-1}{\ln q}\sum_{k=0}^{R-1}\frac{1}{(k+1)} + 1.$$

Par théorème d'encadrement, grâce à l'indication, on en déduit que $E(Y)$ est équivalent à $\dfrac{-\ln(R)}{\ln q}$ lorsque R tend vers $+\infty$.

Exercice 3.3

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit N un entier naturel impair. Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent toutes la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_i$.

1. Calculer les espérances $m = E(U_1)$ et $E(S_n)$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note : $u_n = P(S_n \leqslant nm),\ v_n = P(S_n > nm)$ et $w_n = P(S_n = nm)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de la variable aléatoire $N + 1 - U_n$. En déduire que $u_n = v_n + w_n$.

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$.

4. En déduire la convergence et les limites respectives des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

5. Trouver un polynôme Q_N tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, w_n soit le coefficient de degré mn du polynôme $(Q_N)^n$. (*on pourra calculer* $E\big(t^{S_n}\big)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$)

Solution de l'exercice 3.3

1. Par définition de l'espérance : $m = E(U_1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} kP(U_1 = k) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N+1}{2}$.
Par linéarité de l'espérance, on obtient : $E(S_n) = nm$.

2. On trouve facilement que $N + 1 - U_n$ suit aussi la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$. Comme la loi d'une somme de variables aléatoires indépendantes ne dépend que de la loi de ces variables, on en déduit que les variables $U_1 + \cdots + U_n = S_n$ et $(N + 1 - U_1) + \cdots + (N + 1 - U_n) = n(N + 1) - S_n$ suivent la même loi, donc :

$$u_n = P(S_n \leqslant mn) = P(n(N+1) - S_n \leqslant mn) = P(S_n \geqslant n(N+1) - mn) = P(S_n \geqslant mn) = v_n + w_n.$$

3. On reconnaît que $w_n = P(U_n^* = 0)$, où U_n^* est la variable centrée réduite associée aux variables aléatoires $U_1, \dots, U_n$ qui sont indépendantes, de même loi, loi qui possède une espérance et une variance (car le support est fini). D'après le

théorème central limite, on a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = P(T=0)$, où T suit la loi normale centrée réduite. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n)=0$, car T est à densité.

4. Comme $u_n+v_n=1$ et $u_n=v_n+w_n$, on en déduit que $u_n=\dfrac{1+w_n}{2}$ et $v_n=\dfrac{1-w_n}{2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

5. On peut écrire :

$$\begin{aligned} E\big(t^{S_n}\big) &= E\big(t^{U_1}\cdots t^{U_n}\big)\\ &= E\big(t^{U_1}\big)\cdots E\big(t^{U_n}\big) \text{ (indépendance de } t^{U_1},\dots,t^{U_n})\\ &= \Big(E\big(t^{U_1}\big)\Big)^n\\ &= \left(\sum_{k=1}^{N}\frac{t^k}{N}\right)^n \text{ (théorème de transfert).}\end{aligned}$$

Par ailleurs, le théorème de transfert donne aussi directement : $E\big(t^{S_n}\big)=\sum\limits_{k=n}^{nN} t^k P(S_n=k)$. Ainsi :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \left(\sum_{k=1}^{N}\frac{t^k}{N}\right)^n=\sum_{k=n}^{nN} t^k P(S_n=k).$$

Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux, donc $w_n=P(S_n=nm)$ est le coefficient de degré mn du polynôme $(Q_N)^n$ avec $Q_N=\sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{X^k}{N}$.

EXERCICE 3.4

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$.
Une variable aléatoire X est dite *symétrique* si X et $-X$ suivent la même loi.

1. Donner un exemple de variable aléatoire discrète symétrique.

2. a) Soit X une variable aléatoire à densité f_X. Montrer que X est symétrique si et seulement si f_X est paire.
b) Donner un exemple de variable aléatoire à densité qui soit symétrique.

On suppose dorénavant que les variables aléatoires considérées sont symétriques et à densité bornée.

3. Soit X et Y deux telles variables aléatoires indépendantes.
Montrer que $X+Y$ et $X-Y$ sont symétriques.

Pour n entier supérieur ou égal à 2, soit $X_1,X_2,\dots,X_n$ des variables aléatoires à densité bornée, indépendantes, symétriques et de même loi, centrées et de variance σ^2. Pour tout entier $k\in[\![1,n]\!]$, on pose $T_k=X_1+\cdots+X_k$.

4. Pour tout entier $k\in[\![1,n]\!]$, calculer $P(T_n-T_k\geqslant 0)$.

Soit x un réel positif. Pour tout entier $k\in[\![1,n]\!]$, on pose

$$A_k=\left[\max_{i<k} T_i\leqslant x\right]\cap[T_k>x]$$

c'est-à-dire

$$A_k=\begin{cases} (T_1>x) & \text{si } k=1\\ (T_1\leqslant x)\cap\cdots\cap(T_{k-1}\leqslant x)\cap(T_k>x) & \text{si } k\geqslant 2\end{cases}$$

5. Pour tout entier $k\in[\![1,n]\!]$ comparer les événements suivants :

a) $B = \left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} T_i > x\right)$ et $C = \bigcup\limits_{1\leqslant k\leqslant n} A_k$.

b) $D = (T_n - T_k \geqslant 0) \cap A_k$ et $E = (T_n > x) \cap A_k$.

6.a) Montrer que $P([T_n - T_k \geqslant 0] \cap A_k) \geqslant \dfrac{1}{2} P(A_k)$.

b) En déduire l'inégalité suivante :

$$P(\max_{1\leqslant i\leqslant n} T_i > x) \leqslant 2P(T_n > x)$$

Solution de l'exercice 3.4

1. Soit X suivant une loi de Rademacher, *i.e.* $P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$. Alors, X est symétrique. On peut également citer la variable certaine nulle.

2. a) Soit X une variable aléatoire à densité. La variable aléatoire X est symétrique si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(X \geqslant -x) = 1 - F_X(-x),$$

i.e. si et seulement si $f_X(x) = f_X(-x)$.

b) La loi normale centrée admet une densité paire. Elle est donc symétrique.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme X et Y sont symétriques, alors f_X et f_Y sont paires. Ensuite, comme les variables aléatoires sont indépendantes,

$$f_{X+Y}(-x) = \int_{\mathbb{R}} f_X(-x-t) f_Y(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f_X(-x+u) f_Y(-u)du = \int_{\mathbb{R}} f_X(x-u) f_Y(u)du = f_{X+Y}(x)$$

Ainsi, $X + Y$ est symétrique.
Comme $-Y$ est symétrique, d'après le calcul précédent, $X + (-Y) = X - Y$ est symétrique.

4. D'après les questions précédentes, $T_n - T_k$ est la somme de variables aléatoires indépendantes symétriques, donc $T_n - T_k$ est symétrique. Ainsi,

$$P(T_k - T_n \geqslant 0) = P(T_n - T_k \leqslant 0)$$

Comme $T_n - T_k$ est à densité, alors $P(T_n - T_k = 0) = 0$ et $P(T_n - T_k \leqslant 0) + P(T_n - T_k \geqslant 0) = 1$. Ainsi, $P(T_n - T_k \geqslant 0) = \frac{1}{2}$.

5. a) Si $\omega \in [\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} T_i > x]$, alors il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $T_i(\omega) > x$. En notant i_0 le plus petit de ces entiers,

$$(T_1(\omega) \leqslant x) \cap \cdots \cap (T_{i_0-1}(\omega) \leqslant x) \cap (T_{i_0} > x)$$

Ainsi, $\omega \in C$ et $B \subset C$.
Réciproquement, si $\omega \in C$, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\omega \in A_k$ et alors $T_k(\omega) > x$. Ainsi, $\omega \in B$.
Finalement, $B = C$.

b) Si $\omega \in D$, alors $\omega \in A_k$ et $T_k(\omega) > x$. Ainsi, $T_n(\omega) \geqslant T_k(\omega) > x$ et $\omega \in E$.
L'inclusion réciproque est fausse car on peut avoir $T_k = 2x$ et alors $T_n - T_k \leqslant 0$.
Finalement, $D \subset E$.

6.a)b) Comme $B \subset C$, et les (A_k) sont deux à deux disjoints, alors

$$P(\max_{1\leqslant i\leqslant n}(T_i > x)) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

Ainsi, comme $P(T_n - T_k \geqslant 0) = 1/2$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}P(\max_{1\leqslant i\leqslant n}(T_i > x)) &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(T_n - T_k \geqslant 0)\\
&= \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap T_n - T_k \geqslant 0), \ \text{ par indépendance (lemme des coalitions)}\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} P((T_n > x) \cap A_k)\\
&\leqslant P(T_n > x),
\end{aligned}$$

car $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset \Omega$ est une réunion disjointe.

Exercice 3.5

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

- X_n est à valeurs dans $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\}$;
- $\forall\, k \in [\![0, n-1]\!],\ \ P(X_n = \frac{k}{n}) = \alpha_n \left(e^{\frac{k}{n}} - 1\right)$, où $\alpha_n = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{k/n} - 1\right)}$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\alpha_n}$. En déduire un équivalent de α_n.

2. On note F_n la fonction de répartition de X_n.
Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$, $F_n(x) = \alpha_n\left[\dfrac{e^{\frac{\lfloor nx\rfloor+1}{n}} - 1}{e^{1/n} - 1} - (\lfloor nx\rfloor + 1)\right]$.

3. Montrer que la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité X que l'on précisera.

4. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
a) Déterminer la limite en loi de la suite $\big(f(X_n)\big)_n$.
b) La suite $\big(E(f(X_n))\big)_n$ admet-elle une limite lorsque n tend vers l'infini ?

Solution de l'exercice 3.5

1. La fonction exponentielle étant continue sur $[0, 1]$, d'après le théorème de convergence des sommes de Riemann, on a :

$$\frac{1}{n\alpha_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{k/n} - 1\right) \to \int_0^1 (e^x - 1)dx = e - 2.$$

Ainsi, $\alpha_n \sim \dfrac{1}{n(e-2)}$.

2. Si $x < 0$, alors $F_n(x) = 0$ et si $x \geqslant 1$, alors $F_n(x) = 1$. Ensuite, si $x \in [0, 1[$;

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \alpha_n \sum_{k/\frac{k}{n}\leqslant x} P(X_n = k/n)\\
&= \alpha_n \sum_{j=0}^{\lfloor nx\rfloor}\left(e^{j/n} - 1\right)\\
&= \alpha_n\left[\frac{e^{(k+1)/n} - 1}{e^{1/n} - 1} - (k+1)\right]\\
&= \alpha_n\left[\frac{e^{\frac{\lfloor nx\rfloor+1}{n}} - 1}{e^{1/n} - 1} - (\lfloor nx\rfloor + 1)\right].
\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, si $x < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$; si $x > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 1$ et si $x \in [0,1]$, en utilisant les équivalents classiques, on a

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \frac{1}{(e-2)}\left[e^x - 1 - x\right] = \int_0^x \frac{e^t-1}{e-2}dt,$$

qui est bien une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont une densité vaut $g : t \mapsto \dfrac{e^t-1}{e-2}\mathbf{1}_{[0,1]}$.

4.a) Le cours assure que $(f(X_n))_n$ converge en loi vers $f(X)$.

b) On revient alors à la définition :

$$E(f(X_n)) = \alpha_n \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(e^{k/n}-1\right) \sim \frac{1}{e-2}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(e^{k/n}-1\right)$$

Ainsi, d'après le théorème de convergence des sommes de Riemann, $(E(f(X_n)))_n$ converge vers

$$\frac{1}{e-2}\int_0^1 f(t)(e^t-1)dt$$

(qui vaut par ailleurs $E\big(f(X)\big)$).

Exercice 3.6

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$ et on suppose que :

$$\forall\,(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \begin{cases} P(X=m) & = & \alpha\, m\, q^{m-1} \\ P_{[X=m]}(Y=n) & = & \begin{cases} \dfrac{1}{m} & \text{si } \ 1 \leqslant n \leqslant m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

où α est un réel strictement positif que l'on déterminera par la suite.

1.a) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) en fonction de α et q.

b) En déduire la loi de la variable aléatoire Y. Trouver la valeur de α et reconnaître cette loi.

2. Soient $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Déterminer $P_{[Y=n]}(X=m)$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $B_n = [Y=n]$.

a) Justifier l'existence de l'espérance conditionnelle $E(X \mid B_n)$ et la calculer. En déduire l'existence de l'espérance de X et la déterminer.

b) On considère la variable aléatoire $Z = X + XY$. Montrer que l'espérance conditionnelle $E(Z \mid B_n)$ existe et la calculer. En déduire que Z admet une espérance et déterminer $E(Z)$.

Solution de l'exercice 3.6

1.a) Avec la formule des probabilités conditionnelles, il vient :
$P(X = m \cap Y = n) = P_{[X=m]}(Y = n)P(X = m)$, d'où $P(X = m \cap Y = n) = \dfrac{1}{m}\alpha m q^{m-1} = \alpha q^{m-1}$ si $n \in [\![1, m]\!]$ et $P(X = m \cap Y = n) = 0$ dans le cas contraire.

b) On a :

$$P(Y = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i \cap Y = j) = \sum_{i=j}^{+\infty} P(X = i \cap Y = j) = \alpha \sum_{i=j}^{+\infty} q^{i-1} = \alpha \frac{q^{j-1}}{p}.$$

On doit donc avoir $1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \alpha \frac{q^{j-1}}{p}$, d'où $\alpha = p^2$. Donc, Y suit une loi géométrique de paramètre p.

2. Avec la formule des probabilités conditionnelles, on obtient :
$P_{[Y=n]}(X = m) = pq^{m-n}$ si $m \geqslant n$ et $P_{[Y=n]}(X = m) = 0$ sinon.

3.a) Il est clair que l'espérance conditionnelle $E(X \mid B_n)$ existe puisque la série associée est à termes positifs et est convergente d'après les critères usuels. On a donc :

$$E(X \mid B_n) = \sum_{m=n}^{+\infty} mpq^{m-n} = \sum_{k=1}^{+\infty}(k - 1 + n)pq^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1} + (n - 1)\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} = E(Y) + n - 1 = \frac{1}{p} + n - 1$$

en reconnaissant l'espérance et la somme des probabilités d'une loi géométrique de paramètre p . Comme la série à termes positifs $\sum E(X \mid B_n)P(B_n)$ est convergente, la variable aléatoire X admet une espérance et avec la formule de l'espérance totale il vient :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} E(X \mid B_n)P(B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p} + n - 1\right) pq^{n-1} = \frac{1}{p} - 1 + E(Y) = \frac{2 - p}{p}$$

b) Posons $g(x, y) = x + xy$ et $I = (\mathbb{N}^*)^2$. La série $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I} g(i, j)P_{B_n}(X = i \cap Y = j)$ est à termes positifs et converge ; par suite l'espérance conditionnelle $E\left(Z \mid B_n\right)$ existe. De plus, la formule de transfert pour une fonction d'un couple de variable aléatoires discrètes nous conduit à :

$$\begin{aligned} E(Z \mid B_n) &= E(X \mid B_n) + E(XY \mid B_n) = E(X \mid B_n) + nE(X \mid B_n) \\ &= (n + 1)E(X \mid B_n) = (n + 1)\left(\frac{1}{p} + n - 1\right) = \frac{(n + 1)}{p} + n^2 - 1 \end{aligned}$$

Comme la série à termes positifs $\sum \left(\dfrac{(n + 1)}{p} + n^2 - 1\right) P(B_n)$ converge, on voit avec le théorème de l'espérance totale que l'espérance de Z existe et que :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(n + 1)}{p} + n^2 - 1\right) pq^{n-1} = \frac{1}{p}E(Y) + \left(\frac{1}{p} - 1\right) + E(Y^2) \\ &= \frac{1}{p}E(Y) + \left(\frac{1}{p} - 1\right) + V(Y) + E(Y)^2 \\ &= \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p} - 1 + \frac{q}{p^2} = \frac{3}{p^2} - 1 \end{aligned}$$

Exercice 3.7

On considère une variable aléatoire réelle discrète X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une fonction f qui est convexe et continue sur $\mathbb{R}$.

On admet que pour tout n-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ $(n \geqslant 2)$ de réels et tout n-uplet $(t_1, \cdots, t_n)$ de réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$, la fonction f vérifie :

$$f(t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n) \leqslant t_1 f(x_1) + \cdots + t_n f(x_n)$$

1. On suppose dans cette question que la variable aléatoire X ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
Montrer que $f(E(X)) \leqslant E(f(X))$.

2. On revient au cas général et on pose : $X(\Omega) = \{(x_k)_{k \geqslant 1}\}$. On suppose que les variables aléatoires X et $f(X)$ admettent une espérance.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit l'événement $A_n = (X = x_1) \cup (X = x_2) \cup \ldots \cup (X = x_n)$. On note X_n la variable aléatoire $\mathbf{1}_{A_n} X$, où $\mathbf{1}_{A_n}$ désigne la variable aléatoire indicatrice de A_n.
a) Étudier la convergence des suites $(E(X_n))_n$ et $(E(f(X_n))_n$.
b) En déduire que $f(E(X)) \leqslant E(f(X))$.

3. On considère n variables aléatoires discrètes X_1, ..., X_n $(n \geqslant 2)$ qui admettent toutes une espérance. On suppose que les espérances des variables e^{tX_k} existent pour tout réel positif t et qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $E(\mathrm{e}^{tX_k}) \leqslant \mathrm{e}^{\alpha t^2}$.
On pose $Y = \max(X_1, \cdots, X_n)$.
a) Montrer que Y admet une espérance.
b) Pour tout $t \geqslant 0$, justifier l'inégalité $\mathrm{e}^{tY} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{tX_k}$.
c) Soit $t \geqslant 0$. Montrer que $\mathrm{e}^{tE(Y)} \leqslant n\mathrm{e}^{\alpha t^2}$. En déduire que $E(Y) \leqslant 2\sqrt{\alpha \ln(n)}$.

Solution de l'exercice 3.7

1. Ici $X(\Omega)$ est de la forme $\{x_1, \cdots, x_n\}$. En posant $t_k = P(X = x_k) \geqslant 0$, on a bien $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$ et la relation de convexité de f admise implique que :

$$f(E(X)) = f(t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n) \leqslant t_1 f(x_1) + \cdots + t_n f(x_n) = E(f(X))$$

(la dernière égalité provient du théorème de transfert).

2. a) Comme $X_n(\Omega) = \{0, x_1, \cdots, x_n\}$, on voit que :

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k) \longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} x_k P(X = x_k) = E(X)$$

Comme $P\left(\overline{A_n}\right) \longrightarrow 0$, on obtient, avec le théorème du transfert,

$$E(f(X_n)) = f(0) P\left(\overline{A_n}\right) + \sum_{k=1}^{n} f(x_k) P(X = x_k) \longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} f(x_k) P(X = x_k) = E(f(X))$$

b) Comme X_n ne prend qu'un nombre fini de valeurs, avec la question 1, il vient $f(E(X_n)) \leqslant E(f(X_n))$. La continuité de f et la question précédente nous permettent d'obtenir $f(E(X)) \leqslant E(f(X))$ par passage à la limite.

3. a) Les variables X_k admettant des espérances, on a $0 \leqslant |Y| \leqslant |X_1| + \cdots + |X_n|$. La variable aléatoire Y admet donc une espérance par domination.

b) Si $\omega \in \Omega$, on observe que $\mathrm{e}^{tY(\omega)}$ est l'un des $\mathrm{e}^{tX_k(\omega)}$, il est donc inférieur à la somme de termes positifs $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{tX_k(\omega)}$.

c) On déduit facilement de l'inégalité précédente que l'espérance de la variable aléatoire positive e^{tY} existe pour tout $t > 0$. On est donc en position pour appliquer l'inégalité obtenue en 2. b). On choisit la fonction f_t en posant $f_t(x) = \mathrm{e}^{tx}$ qui est convexe sur $\mathbb{R}$. On obtient alors $\mathrm{e}^{tE(Y)} \leqslant E(\mathrm{e}^{tY})$, puis $\mathrm{e}^{tE(Y)} \leqslant n\mathrm{e}^{\alpha t^2}$ avec la question 3. b) et les données. On en déduit que $E(Y) \leqslant \dfrac{\ln(n)}{t} + \alpha t$ pour tout $t > 0$. On étudie la fonction g de t, correspondant au membre de droite, sur $]0, +\infty[$. On voit qu'elle admet un minimum global au point $t_0 = \sqrt{\dfrac{\ln(n)}{\alpha}}$. L'inégalité $E(Y) \leqslant g(t_0)$ permet de conclure.

Exercice 3.8

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit z_1 et z_2 deux réels distincts strictement positifs. Soit Z une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

$$Z(\Omega) = \{z_1, z_2\} \text{ et } P([Z = z_1]) = p_1, \quad P([Z = z_2]) = p_2$$

où : $0 < p_1 < 1, \quad 0 < p_2 < 1, \quad p_1 + p_2 = 1, \quad E(Z) = 1$. On pose $V(Z) = \rho^2$, avec $\rho > 0$.

Soit α un paramètre strictement positif inconnu que l'on désire estimer. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que la loi conditionnelle de N sachant $[Z = z_1]$ est la loi Poisson de paramètre αz_1 et la loi conditionnelle de N sachant $[Z = z_2]$ est la loi de Poisson de paramètre αz_2.
On suppose que les paramètres $z_1,\ z_2,\ p_1,\ p_2$ sont connus.

On considère un échantillon $(N_1, \ldots, N_n)$ de n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que N et on pose : $\overline{N}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} N_k$
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et on prendra $\Phi(1,96) = 0,975$.

1. a) Donner la loi de N.
b) Calculer $E(N)$.
c) Vérifier que $V(N) = \alpha + \alpha^2\rho^2$.

2. a) Justifier que, pour n assez grand, on a : $P\left(\alpha \in \left[\overline{N}_n - 1,96\sqrt{\dfrac{V(N)}{n}}, \overline{N}_n + 1,96\sqrt{\dfrac{V(N)}{n}}\right]\right) \geqslant 0,95.$

b) Pourquoi l'inégalité précédente ne suffit-elle pas à déterminer un intervalle de confiance pour α ?

3. a) Montrer que si une suite de variables aléatoires $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire W, alors la suite $(W_n + \dfrac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également en probabilité vers W.

b) Justifier que la suite $\left(\sqrt{\dfrac{V(N)}{\dfrac{1}{n} + \overline{N}_n(1 + \rho^2\overline{N}_n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à 1.

c) On pose, pour tout entier naturel n non nul : $T_n = \sqrt{\dfrac{n}{\dfrac{1}{n} + \overline{N}_n(1 + \rho^2\overline{N}_n)}} \times \big(\overline{N}_n - \alpha\big).$

Établir que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

d) En déduire que l'intervalle I suivant est, pour n assez grand, un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 pour α :

$$I=\left[\overline{N}_n-1,96\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{\overline{N}_n(1+\rho^2\overline{N}_n)}{n}},\overline{N}_n+1,96\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{\overline{N}_n(1+\rho^2\overline{N}_n)}{n}}\right]$$

Solution de l'exercice 3.8

1. a) En utilisant la formule des probabilités totales et le système complet d'événements $\{[Z=z_1],[Z=z_2]\}$, on a : $P(N=k)=P_{[Z=z_1]}\big([N=k]\big)P([Z=z_1])+P_{[Z=z_2]}\big([N=k]\big)P([Z=z_2])$.

Soit ici : $P([N=k])=\dfrac{e^{-z_1\alpha}(z_1\alpha)^k}{k!}p_1+\dfrac{e^{-z_2\alpha}(z_2\alpha)^k}{k!}p_2$.

b) On utilise la formule de l'espérance totale (on constate que toutes les séries manipulées sont convergentes). On a : $E(N)=E\big(N/[Z=z_1]\big)P([Z=z_1])+E\big(N/[Z=z_2]\big)P([Z=z_2])$.

Or les lois conditionnelles de N sachant z_1 et z_2 sont des lois de Poisson de paramètres respectifs αz_1 et αz_2. On a donc : $E\big(N/[R=z_i]\big)=\alpha z_i$. D'où : $E(N)=\alpha z_1p_1+\alpha z_2p_2=\alpha(z_1p_1+z_2p_2)=\alpha E(Z)=\alpha$.

c) De même : $E(N^2)=E\big(N^2/[Z=z_1]\big)P([Z=z_1])+E\big(N^2/[Z=z_2]\big)P([Z=z_2])$.

Or, $E\big(N^2/[Z=z_i]\big)$ est le moment d'ordre 2 d'une loi de Poisson de paramètre αz_i, d'où : $E\big(N^2/[Z=z_i]\big)=\alpha z_i+\alpha^2z_i^2$ et $E(N^2)=(\alpha z_1+\alpha^2z_1^2)p_1+(\alpha z_2+\alpha^2z_2^2)p_2=\alpha+\alpha^2E(Z^2)$. En conclusion : $V(N)=\alpha+\alpha^2\rho^2$.

2. a) On applique à la variable $\overline{N}_n$ le théorème limite central : $\dfrac{\overline{N}_n-\alpha}{\sqrt{\frac{V(N)}{n}}}\xrightarrow{L}\mathcal{N}(0,1)$.

En supposant que, pour n assez grand, on puisse approcher le loi précédente par la loi normale centrée réduite, on obtient bien : $P\left(\alpha\in\left[\overline{N}_n-1,96\sqrt{\frac{V(N)}{n}},\overline{N}_n+1,96\sqrt{\frac{V(N)}{n}}\right]\right)\geqslant 0,95$.

b) Comme les bornes de l'intervalle dépendent de $V(N)$, qui dépend de α, l'intervalle précédent n'est pas un intervalle de confiance pour α.

3. a) On écrit : $|W_n+\dfrac{1}{n}-W|\leq|W_n-W|+\dfrac{1}{n}$. On en déduit que, pour tout réel $\varepsilon>0$:

$$\big[|W_n+\frac{1}{n}-W|\geqslant\varepsilon\big]\subset\big[|W_n-W|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\big]\cup[\frac{1}{n}\geqslant\frac{\varepsilon}{2}]$$

En utilisant la croissance de la probabilité et le fait que $P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$, on a donc :

$$P\Big(\big[|W_n+\frac{1}{n}-W|\geqslant\varepsilon\big]\Big)\leqslant P\Big(\big[|W_n-W|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\big]\Big)+P([\frac{1}{n}\geqslant\frac{\varepsilon}{2}])$$

Or, il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, $P([\dfrac{1}{n}\geqslant\dfrac{\varepsilon}{2}])=0$. Pour $n\geqslant n_0$, on a donc :

$$P\Big(\big[|W_n+\frac{1}{n}-W|>\varepsilon\big]\Big)\leqslant P\Big(\big[|W_n-W|>\frac{\varepsilon}{2}\big]\Big)$$

Enfin, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}P\Big(\big[|W_n-W|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\big]\Big)=0$, on a bien : $\lim\limits_{n\to+\infty}P\Big(\big[|W_n+\frac{1}{n}-W|\geqslant\varepsilon\big]\Big)=0$.

b) En appliquant la loi faible des grands nombres, on a : $\overline{N}_n\xrightarrow{P}\alpha$. On a alors successivement :
- par continuité : $\overline{N}_n(1+\rho^2\overline{N}_n)\xrightarrow{P}\alpha(1+\alpha\rho^2)$;
- grâce au résultat démontré à la question précédente : $\dfrac{1}{n}+\overline{N}_n(1+\rho^2\overline{N}_n)\xrightarrow{P}\alpha(1+\alpha\rho^2)$;
- puis par continuité : $\left(\sqrt{\dfrac{V(N)}{\frac{1}{n}+\overline{N}_n(1+\rho^2\overline{N}_n)}}\right)\xrightarrow{P}\sqrt{\dfrac{V(N)}{V(N)}}=1$.

c) On écrit : $T_n=\left(\sqrt{\dfrac{V(N)}{\frac{1}{n}+\overline{N}_n(1+\rho^2\overline{N}_n)}}\right)\times\dfrac{\overline{N}_n-\alpha}{\sqrt{\frac{V(N)}{n}}}$. Dans le produit précédent, la première des deux variables converge en probabilité vers 1 et la seconde en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Le théorème de

Slutsky permet alors d'affirmer que le produit converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On a donc bien : $T_n \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,1)$.

d) On construit alors un intervalle de confiance pour α au niveau de confiance 0.95 en supposant que n est assez grand pour pouvoir approcher la loi de T_n par une loi normale centrée réduite.

$$\left[\overline{N}_n - 1,96\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{\overline{N}_n(1+\rho^2\overline{N}_n)}{n}}, \overline{N}_n - 1,96\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{\overline{N}_n(1+\rho^2\overline{N}_n)}{n}}\right]$$

Exercice 3.9

On rappelle que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit r un entier naturel non nul. Une variable aléatoire X suit la loi de χ^2 à r degrés de liberté si une densité f_X de X est donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(r/2)\,2^{r/2}}\, x^{(r/2)-1}\,\mathrm{e}^{-x/2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de χ^2 à r degrés de liberté. On pose $Z = \dfrac{X}{2}$ et $\nu = \dfrac{r}{2}$.

a) Déterminer la loi de Z.

b) En déduire l'espérance et la variance de X.

2. a) Montrer que pour tout $\lambda > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathrm{e}^{\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^{\lambda} \mathrm{e}^{\lambda - t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt$$

b) Soit Y_λ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Soit X_{2n} une variable aléatoire suivant la loi de χ^2 à $2n$ degrés de liberté.
Montrer que $P(X_{2n} > 2\lambda) = P(Y_\lambda < n)$.

c) Écrire une fonction Scilab de paramètres n entier et $x > 0$ réel qui retourne la valeur de $P(X_{2n} > x)$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_k$ des variables aléatoires indépendantes suivant toute la loi normale centrée réduite.

a) Déterminer la loi de X_1^2.

b) En déduire la loi de $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i^2$.

c) Soit r et s deux entiers vérifiant $2 < r < s$. Soit T_r et T_s deux variables aléatoires qui suivent respectivement la loi de χ^2 à r degrés de liberté et la loi de χ^2 à s degrés de liberté.
Tracer sur un même graphique l'allure des fonctions de répartition de T_r et T_s.

Solution de l'exercice 3.9

1. a) On utilise la fonction de répartition. On a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ P(Z \leqslant x) = P(X \leqslant 2x) = F_X(2x)$$

Une densité de Z est donc :

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{2}{\Gamma(\nu)2^{\nu}}(2x)^{\nu-1}\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\Gamma(\nu)}x^{\nu-1}\mathrm{e}^{-x} & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi Z suit la loi $\gamma(\nu)$ ou encore la loi $\gamma(r/2)$.

b) Par le cours et les propriétés de l'espérance et de la variance, on a : $E(X) = 2\nu = r$ et $V(X) = 4\nu = 2r$.

2. a) Il s'agit de la formule de Taylor avec reste intégral, intégrale dans laquelle on effectue le changement de variable $t \to \lambda - t$ (on peut également faire une intégration par parties et une récurrence).

b) On a : $P(X_{2n} > 2\lambda) = P(2Z > 2\lambda) = P(Z > \lambda)$ où $Z = \dfrac{1}{2}X_{2n} \hookrightarrow \gamma(n)$.

Donc, $P(X_{2n} > 2\lambda) = \dfrac{1}{\Gamma(n)}\displaystyle\int_{\lambda}^{+\infty} t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}dt$.

Et $P(Y_\lambda < n) = \mathrm{e}^{-\lambda}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!} = 1 - \int_0^{\lambda}\mathrm{e}^{-t}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}dt = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_{\lambda}^{+\infty} t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}dt$, d'après la question 2.a).

On a bien : $P(X_{2n} > 2\lambda) = P(Y_\lambda < n)$.

c) Une proposition

```
function res=P(n,x)
lambda=x/2
pois=exp(-lambda)
res=pois
for k=1: n-1
  pois=pois*lambda/k
  res=res+pois
end
endfunction
```

3. a) Avec la méthode de la fonction de répartition, on a $X_1^2(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et pour $x \geqslant 0$:

$$F_{X_1^2}(x) = P(X_1^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X_1 \leqslant \sqrt{x}) = F_{X_1}(\sqrt{x}) - F_{X_1}(-\sqrt{x})$$

Une densité est donc :

$$f_{X_1^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}f_{X_1}(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}\mathrm{e}^{-x/2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, pour $x \geqslant 0$, $f_{X_1^2}(x) = \dfrac{1}{\Gamma(1/2)2^{1/2}}x^{(1/2)-1}\mathrm{e}^{-x/2}$. Donc, X_1^2 suit la loi de χ^2 à 1 degré de liberté. Autrement dit, $Z_1 = \dfrac{1}{2}X_1^2 \hookrightarrow \gamma(1/2)$.

b) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_k$ sont indépendantes et de même loi de χ^2 à 1 degré de liberté ; donc, $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i^2 \hookrightarrow \gamma(k/2)$, c'est-à-dire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i^2$ suit la loi de χ^2 à k degrés de liberté.

c) On a : $T_r = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} X_i^2$ et $T_s = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} X_i^2$ et puisque $r < s$, on a $T_r(\omega) \leqslant T_s(\omega)$. Par suite, pour tout x réel, on a $[T_s \leqslant x] \subset [T_r \leqslant x]$; donc, $F_{T_s}(x) \leqslant F_{T_r}(x)$. Bien entendu, si $x \leqslant 0$, on a $F_{T_s}(x) = F_{T_r}(x) = 0$.

Exercice 3.10

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Soit f la fonction définie sur $D =]0,1[\times]0,1[$ par :

$$\forall (x,y) \in]0,1[\times]0,1[,\ f(x,y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}$$

a) Montrer que f est de classe C^1 sur D.

b) Déterminer les éventuels extremums locaux de f sur D.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2 \\ \dfrac{1}{\alpha \times 3^t} & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$$

a) Déterminer le réel α pour que g soit une densité d'une variable aléatoire Y.

b) Déterminer la loi de $Z = \lfloor Y \rfloor$.

3. Une urne contient des boules blanches en proportion b, des boules vertes en proportion v et des boules rouges en proportion r. On suppose $0 < b < 1, 0 < v < 1, 0 < r < 1$ et $b + v + r = 1$.

On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise et on s'arrête au premier changement de couleur. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

a) Déterminer la loi de X.

b) Déterminer l'espérance $E(X)$ de X.

c) Que peut-on déduire de la question 1 pour $E(X)$?

d) Comparer la loi de Z à celle de X lorsque $b = v = r = 1/3$.

Solution de l'exercice 3.10

1. a) La fonction f est de classe C^1 sur l'ouvert D comme somme de fractions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pas.

On calcule le gradient de f :

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(x+y)^2}, \frac{1}{(1-y)^2} - \frac{1}{(x+y)^2} \right)$$

b) Les points critiques sont donnés par : $\begin{cases} (1-x)^2 = (x+y)^2 \\ (1-y)^2 = (x+y)^2 \end{cases}$. Par positivité de x et y, il vient $x = y = 1/3$.

Pour vérifier si c'est un minimim ou pas, on utilise la Hessienne. Il vient

$$r = t = 27/2, s = 27/4 \Rightarrow s^2 - rt < 0$$

Ainsi, $(1/3, 1/3)$ est un minimum local de f sur D.

2. a) La fonction g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Elle est positive si $\alpha > 0$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t\ln 3}}{\alpha} dt = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{9\ln 3}$$

b) On a $Z(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$ et pour tout $k \geqslant 2$:

$$P(Z = k) = \int_k^{k+1} g(t)dt = \frac{2}{3^{k-1}}$$

3. On a $X(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$. Notons pour tout $i \geqslant 1$, B_i (resp. V_i et R_i) l'événement « le i-ième tirage a amené une boule blanche (resp. verte ou rouge) ». Alors :

$$[X = k] = \left[\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i \cap \overline{B_k}\right] \cup \left[\bigcap_{i=1}^{k-1} V_i \cap \overline{V_k}\right] \cup \left[\bigcap_{i=1}^{k-1} R_i \cap \overline{R_k}\right]$$

Ces événements sont disjoints. Par indépendance des tirages, il vient :

$$P(X = k) = b^{k-1}(1-b) + v^{k-1}(1-v) + r^{k-1}(1-r)$$

b) Le calcul de l'espérance de X se fait en utilisant la dérivée de la série géométrique. Il vient :

$$\begin{aligned} E(X) &= (1-b) \times \left(\frac{1}{(1-b)^2} - 1\right) + (1-v) \times \left(\frac{1}{(1-v)^2} - 1\right) + (1-r) \times \left(\frac{1}{(1-r)^2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-v} + \frac{1}{1-r} - 2 \end{aligned}$$

c) D'après la question 1, $E(X) = f(b, r) - 2$ (car $1 - v = b + r$) et $E(X)$ est minimale pour $b = r = v = 1/3$.

d) Lorsque $b = v = r = 1/3$, la loi de X est celle de Z.

Exercice 3.11

Soit f une application définie sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel k vérifiant $0 < k < 1$ tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y| \qquad (*)$$

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $u_0 = x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n |u_1 - u_0|$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge vers une limite λ qui vérifie $f(\lambda) = \lambda$ (λ s'appelle un point fixe de f).

c) Montrer que f admet un unique point fixe.

2. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à densité définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} = f(T_n)$$

où la fonction f vérifie la propriété $(*)$.

Soit λ le point fixe de f et $\varepsilon > 0$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $A_n = [k^n|T_0 - \lambda| > \varepsilon]$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$.

b) En déduire que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à λ.

c) Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers λ (on pourra distinguer les valeurs de la variable $x \in \mathbb{R}$ selon que $x > \lambda$ ou $x < \lambda$).

3. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de variables aléatoires définie par T_0 et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \omega \in \Omega,\ T_{n+1}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{T_n(\omega)} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t\,.$$

Étudier les convergences en probabilité et en loi de la suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Solution de l'exercice 3.11

1. a) Par récurrence, on montre que $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n |u_1 - u_0|$.

b) Comme $0 < k < 1$, la série $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente, donc convergente. Par télescopage, la suite $(u_n)_n$ admet une limite λ.
Ce réel vérifie $f(\lambda) = \lambda$ par continuité de f (d'après $(*)$) car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lambda$.

c) Soit λ et λ' deux réels distincts tels que $f(\lambda) = \lambda$ et $f(\lambda') = \lambda'$. On a $|f(\lambda) - f(\lambda')| = |\lambda - \lambda'| \leqslant k\,|\lambda - \lambda'|$ si et seulement si $k \geqslant 1$, ce qui contredit l'hypothèse $0 < k < 1$. Donc, λ est unique.

2.a) On a $P(A_n) = P(k^n|T_0 - \lambda| > \varepsilon) = 1 - F_{T_0}\Big(\lambda + \dfrac{\varepsilon}{k^n}\Big) + F_{T_0}\Big(\lambda - \dfrac{\varepsilon}{k^n}\Big)$, en notant F_{T_0} la fonction de répartition de T_0. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\varepsilon}{k^n} = +\infty$ $(0 < k < 1)$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{T_0}\Big(\lambda + \dfrac{\varepsilon}{k^n}\Big) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{T_0}\Big(\lambda - \dfrac{\varepsilon}{k^n}\Big) = 0$.
Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(k^n|T_0 - \lambda| > \varepsilon) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = 1 - 1 + 0 = 0$.

b) Soit λ l'unique solution de l'équation $f(x) = x$. On a : $|T_{n+1}(\omega) - \lambda| = |f\big(T_n(\omega)\big) - f(\lambda)| \leqslant k\,|T_n(\omega) - \lambda|$.

Par suite, $|T_n(\omega) - \lambda| \leqslant k^n |T_0(\omega) - \lambda|$ et donc $[\,|T_n - \lambda| > \varepsilon\,] \subset [\,k^n|T_0 - \lambda| > \varepsilon\,] = A_n$.

Il en résulte que $0 \leqslant P(|T_n - \lambda| > \varepsilon) \leqslant P(A_n)$ et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|T_n - \lambda| > \varepsilon) = 0$.

Finalement, la suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à λ.

c) • Si $x > \lambda$, on pose $x = \lambda + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

On a $1 \geqslant P(T_n \leqslant x) = P(T_n \leqslant \lambda + \varepsilon) = P(T_n - \lambda \leqslant \varepsilon) \geqslant P(|T_n - \lambda| \leqslant \varepsilon)$. Or, la suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en probabilité vers λ, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|T_n - \lambda| \leqslant \varepsilon) = 1$ et par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n \leqslant x) = 1$.

• Si $x < \lambda$, on pose $x = \lambda - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

On a $0 \leqslant P(T_n \leqslant x) = P(\lambda - T_n \geqslant \varepsilon) = 1 - P(\lambda - T_n \leqslant \varepsilon) \leqslant 1 - P(|\lambda - T_n| \leqslant \varepsilon)$. La convergence en probabilité de la suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers λ se traduit par l'égalité $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|\lambda - T_n| \leqslant \varepsilon) = 1$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n \leqslant x) = 0$.

Il est inutile d'étudier le cas $x = \lambda$ car c'est un point de discontinuité de la fonction de répartition de la variable certaine λ.

• Bilan : en notant F_{T_n} la fonction de répartition de T_n, on a : $\forall\, x \in \mathbf{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} F_{T_n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > \lambda \\ 0 & \text{si } x < \lambda \end{cases}$.

Donc, la suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en loi vers la variable certaine λ.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x \exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)\,\mathrm{d}t$. En notant Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on a : $\forall\, x \in \mathbf{R},\ f(x) = \Phi(x) - \dfrac{1}{2}\cdot$ Les propriétés de Φ permettent de dire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante. En particulier, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\dfrac{x^2}{2}\Big)$.

Par suite, $\forall\, x \in \mathbf{R},\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} < 1$ et l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ est $\lambda = 0$.

L'inégalité des accroissements finis permet d'écrire $\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|$ avec $k = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ par exemple.
D'après les questions 2. b) et 2. c), on peut déduire que la suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en loi et en probabilité vers la variable certaine nulle.

Exercice 3.12

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à densité indépendantes de même loi, positives telles que $E(X_1) = 1$ et admettant une variance non nulle.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $Y_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$.

1. a) Montrer que $E(\sqrt{X_1})$ existe et appartient à $]0,1[$.

b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n} E(\sqrt{X_i}) = 0$.

c) Montrer que la suite (Y_n) converge en probabilité vers 0.

2. On note $\mathbf{1}_A$ la variable aléatoire indicatrice d'un événement A.
Soit X une variable aléatoire positive, à densité, admettant un moment d'ordre 2 non nul. Soit $\theta \in]0,1[$.
a) Montrer que $E(X\mathbf{1}_{[X\leqslant\theta E(X)]}) \leqslant \theta E(X)$.
b) Montrer que $E(X\mathbf{1}_{[X\geqslant\theta E(X)]}) \leqslant \sqrt{E(X^2)}\sqrt{P(X\geqslant\theta E(X))}$.
c) En déduire que $P\big(X \geqslant \theta E(X)\big) \geqslant \dfrac{(1-\theta)^2\big(E(X)\big)^2}{E(X^2)}$.

3. Déduire de la question précédente que

$$P\left(\sqrt{Y_n} \geqslant \frac{1}{2}E(\sqrt{Y_n})\right) \geqslant \frac{1}{4}(E(\sqrt{X_1}))^{2n}$$

4. Dans cette question, on suppose que $E(\sqrt{X_1}) \geqslant 1$ (et donc on ne suppose plus que $E(X_1) = 1$). Montrer que la suite (Y_n) ne converge pas en probabilité vers 0.

Solution de l'exercice 3.12

1. a) Comme $E(X_1)$ existe, la variable aléatoire $\sqrt{X_1}$ admet un moment d'ordre 2, donc un moment d'ordre 1. De plus, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $0 \leqslant E(\sqrt{X_1}) \leqslant E(X_1)^{1/2} = 1$.

- Comme $\sqrt{X_1} \geqslant 0$, si $E(\sqrt{X_1}) = 0$, alors $X_1 = 0$ presque sûrement en contradiction avec $V(X_1) \neq 0$.
- Si $E(\sqrt{X_1}) = 1$, comme $E(X_1) = 1$, il vient $V(\sqrt{X_1}) = 0$ et $\sqrt{X_1} = 1$ presque sûrement et $V(X_1) = 0$.

b) Evident par la question précédente et l'indépendance des variables aléatoires en jeu.

c) Par l'inégalité de Markov, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$P(Y_n \geqslant \varepsilon) = P(\sqrt{Y_n} \geqslant \sqrt{\varepsilon}) \leqslant \frac{E(\sqrt{Y_n})}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\prod_{i=1}^{n} E(\sqrt{X_i})}{\sqrt{\varepsilon}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. a) Comme X est positive, on a : $X\mathbf{1}_{[X\leqslant\theta E(X)]} \leqslant \theta E(X)$, puis l'on prend l'espérance.

b) On utilise l'inégalité de Cauchy Schwarz, ce qui donne :

$$E(X\mathbf{1}_{[X\geqslant\theta E(X)]}) \leqslant E(X^2)^{1/2}(E(\mathbf{1}^2_{[X\geqslant\theta E(X)]}))^{1/2} = E(X^2)^{1/2}(P(X \geqslant \theta E(X)))^{1/2}$$

c) Il reste à écrire que $E(X) = E(X\mathbf{1}_{[X\leqslant\theta E(X)]}) + E(X\mathbf{1}_{[X\geqslant\theta E(X)]})$ et à utiliser les deux questions précédentes (Inégalité de Paley-Zigmund).

3. On prend $X = \sqrt{Y_n}$ et $\theta = 1/2$. Il vient :

$$P\left(\sqrt{Y_n} \geqslant \frac{1}{2}E(\sqrt{Y_n})\right) \geqslant \frac{1}{4}\frac{(\prod_{i=1}^{n} E(\sqrt{X_i}))^2}{1} = \frac{1}{4}\prod_{i=1}^{n}(E(\sqrt{X_i}))^2 = \frac{1}{4}(E(\sqrt{X_1}))^{2n}$$

4. Si $E(\sqrt{X_1}) \geqslant 1$, alors $E(\sqrt{Y_n}) \geqslant 1$. Donc, d'après la question précédente :

$$P(\sqrt{Y_n} \geqslant \frac{1}{2}) \geqslant P(\sqrt{Y_n} \geqslant \frac{1}{2}E(\sqrt{Y_n})) \geqslant \frac{1}{4}.$$

Ainsi, pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$, la probabilité $P(|\sqrt{Y_n} - 0| \geqslant \varepsilon)$ ne peut tendre vers 0.

Exercice 3.13

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, de même loi et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

$$R_n(\omega) = \text{card}\{X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$$

On admet que R_n est une variable aléatoire.

1.a) Soit $a \in \mathbb{N}^*$. En séparant les variables aléatoires X_i telles que $X_i(\omega) < a$ de celles X_j telles que $X_j(\omega) \geqslant a$, montrer que :

$$R_n \leqslant a + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{[X_i \geqslant a]}.$$

b) Montrer que R_n admet une espérance.

c) Déduire du 1.a) que $E(R_n) = o(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

On suppose désormais que $E(X_1)$ existe.

2. Montrer que $P(X_1 \geqslant m) = o\left(\dfrac{1}{m}\right)$ quand l'entier m tend vers $+\infty$.

3. Montrer que $E(R_n) = o(\sqrt{n})$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.
Indication : pour $\varepsilon > 0$ donné, on pourra choisir $m = \lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor$.

Solution de l'exercice 3.13

1.a) Comme proposé par l'énoncé, on écrit :

$$R_n(\omega) = \text{card}\left(\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\} \cap [\![0, a[\![\right) + \text{card}\left(\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\} \cap [\![a, +\infty[\![\right).$$

Ainsi :

$$R_n(\omega) \leqslant a + \text{card}\{i \in [\![1, n]\!] / X_i(\omega) \geqslant a\} = a + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{[X_i \geqslant a]}(\omega).$$

b) Comme R_n est bornée (par 1 et n) et qu'elle est positive, elle admet une espérance.
c) Les questions précédentes donnent :

$$E(R_n) \leqslant a + \sum_{i=1}^{n} P([X_i \geqslant a]) = a + nP(X_1 \geqslant a) \quad (\star)$$

Ainsi : $0 \leqslant \dfrac{E(R_n)}{n} \leqslant \dfrac{a}{n} + P(X_1 \geqslant a)$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, en choisissant a assez grand, on a $P(X_1 \geqslant a) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, et pour ce a fixé, pour n assez grand ($n \geqslant n_0$), on a $\dfrac{a}{n} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Longrightarrow \left|\frac{E(R_n)}{n}\right| \leqslant \varepsilon$$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{E(R_n)}{n} = 0$.

2. On a :

$$mP(X_1 \geqslant m) = m\sum_{k=m}^{+\infty} P(X_1 = k) \leqslant \sum_{k=m}^{+\infty} kP(X_1 = k)$$

qui représente le reste d'une série convergente et qui tend donc vers 0.
Remarque : l'inégalité de Markov ne donne que : $P(X_1 \geqslant m) = O\left(\dfrac{1}{m}\right)$ ou $P(X_1 \geqslant m) = o\left(\dfrac{1}{m^2}\right)$, et à condition qu'il existe un moment d'ordre 2.

3. On sait que $E(X_1)$ existe. On choisit $m = \lfloor \varepsilon\sqrt{n}\rfloor$ et on reprend l'inégalité $(\star)$ avec $a = m$.

$$0 \leqslant E(R_n) \leqslant m + nP(X_n \geqslant m) = \lfloor \varepsilon\sqrt{n}\rfloor + n\, o\left(\frac{1}{\lfloor \varepsilon\sqrt{n}\rfloor}\right) = \lfloor \varepsilon\sqrt{n}\rfloor + o(\sqrt{n}).$$

En effet, par encadrement, on a facilement : $\lfloor \varepsilon\sqrt{n}\rfloor \sim \varepsilon\sqrt{n}$.
Pour n assez grand, on a $o(\sqrt{n}) \leqslant \varepsilon\sqrt{n}$. On a donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Longrightarrow |E(R_n)| \leqslant 2\varepsilon\sqrt{n}$$

c'est-à-dire : $E(R_n) = o(\sqrt{n})$.

Exercice 3.14

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Pour toute partie finie S de $\mathbb{N}$, on note $|S|$ ou $\mathrm{card}(S)$ son cardinal.
Soit un entier $m \geqslant 2$ et $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme discrète sur $[\![1, m]\!]$.
Pour tout $n \geqslant 1$, on note U_n la variable aléatoire égale au nombre de valeurs distinctes prises par les variables $X_1, \ldots, X_n$, c'est à dire :

$$\forall \omega \in \Omega, U_n(\omega) = \mathrm{card}(\{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\})$$

1. a) Préciser $U_n(\Omega)$ en fonction de n et m.

b) Calculer la probabilité $P(U_n = 1)$.

c) Calculer la probabilité $P(U_n = n)$ en fonction de n et m.

2. Expliquer ce qu'affiche le script Scilab suivant :

```
m=100
n=50
x=grand(1,n,'uin',1,m)
T=[]
for k=1: n
  z=members(x(k),T) // z est un entier donnant le nombre de fois où x(k) est dans T
  if z==0 then
    T=[T,x(k)]
  end
end
disp(gsort(T,'lc','i')) // gsort permet de trier un vecteur
```

3. a) Montrer que $P([X_1 \neq X_n] \cap [X_2 \neq X_n] \cap \cdots \cap [X_{n-1} \neq X_n]) = \left(\dfrac{m-1}{m}\right)^{n-1}$.

b) On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties non vides de $[\![1,m]\!]$. Pour $S \in \mathcal{P}$, on pose :

$$A_S = \{\omega \in \Omega / \{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\} = S\}$$

Montrer que :

$$P([X_1 \neq X_n] \cap [X_2 \neq X_n] \cap \cdots \cap [X_{n-1} \neq X_n]) = \sum_{S \in \mathcal{P}} P(A_S) \left(\frac{m - |S|}{m}\right)$$

4. a) En déduire une expression de $E(U_{n-1})$ en fonction de n et m.
b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(U_n)$. Expliquer le résultat.
c) Déterminer $\lim\limits_{m \to +\infty} E(U_n)$. Expliquer le résultat.

Solution de l'exercice 3.14

1. a) $U_n(\Omega) = [\![1, \min(n,m)]\!]$.
b) On a : $[U_n = 1] = \bigcup\limits_{k=1}^{m} ([X_1 = k] \cap \cdots \cap [X_n = k])$. Par incompatibilité puis par indépendance des (X_i), on en déduit : $P(U_n = 1) = m \left(\dfrac{1}{m}\right)^n$.
c) • si $n > m$, l'événement $[U_n = n]$ est impossible, donc $P(U_n = n) = 0$.
• si $n \leqslant m$, l'événement $[U_n = n]$ correspond à tirer n valeurs distinctes parmi les m valeurs proposées. Ainsi de manière analogue au 1.b), on a : $P(U_n = n) = \dbinom{m}{n} \left(\dfrac{1}{m}\right)^n$.
2. Ce script simule le tirage de $X_1, \ldots, X_n$ et renvoie la liste des valeurs prises par U_n, sans répétition (la boucle permet d'ajouter au vecteur T une valeurs qui n'apparaît pas auparavant dans T), triées par ordre croissant.
3. a) Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet $(X_n = a)_{a \in [\![1,m]\!]}$:

$$\begin{aligned} P(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) &= \sum_{a=1}^{m} P\Big((X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) \Big/ X_n = a\Big) P(X_n = a) \\ &= \sum_{a=1}^{m} P(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a) P(X_n = a) \quad \text{(indépendance)} \\ &= \sum_{a=1}^{m} \left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-1} \times \frac{1}{m} = \left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

b) On a $(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) = \bigcup\limits_{S \in \mathcal{P}} \Big(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S\Big) \cap (X_n \notin S)$ (réunion disjointe). Donc,

$$\begin{aligned} P(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) &= \sum_{S \in \mathcal{P}} P\Big((\{X_1, \ldots, X_{n-1} = S) \cap (X_n \notin S)\Big) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{P}} P\Big(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S\Big) P\Big((X_n \notin S)\Big) \quad \text{(indépendance)} \\ &= \sum_{S \in \mathcal{P}} P\Big(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S\Big) \Big(\frac{m - |S|}{m}\Big) \end{aligned}$$

4. a) On partitionne $\mathcal{P}$ en réunion disjointe de sous-ensembles de cardinal k.
En remarquant que $\sum\limits_{S \in \mathcal{P}, |S| = k} P(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S) = P(U_{n-1} = k)$, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{S \in \mathcal{P}} P\Big(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S\Big) \Big(\frac{m - |S|}{m}\Big) &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{S \in \mathcal{P}, |S| = k} P\Big(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S\Big) \Big(\frac{m-k}{m}\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{m} P(U_{n-1} = k) \Big(\frac{m-k}{m}\Big) = 1 - \frac{1}{m} E(U_{n-1}) \end{aligned}$$

Ainsi, $E(U_{n-1}) = m(1 - P(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n)) = m\left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{m}\right)^{n-1}\right)$.

b) La suite $((1 - \dfrac{1}{m})^n)$ est géométrique de raison $q \in]0,1[$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} E(U_n) = m$. Si n est très grand par rapport à m, alors pour chaque valeur de $[\![1, m]\!]$ la famille des X_i prendra toutes les valeurs de $[\![1, m]\!]$ et on aura $U_n = m$ presque sûrement à chaque tirage.

c) De l'équivalent $1 - (1 - x)^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$, on déduit que $E(U_n) \underset{m\to+\infty}{\sim} m \times \dfrac{n}{m}$. On en conclut : $\lim\limits_{m\to+\infty} E(U_n) = n$. Si m est très grand face à n, les $X_1, \ldots, X_n$ se placeront sur n valeurs du grand intervalle $[\![1, m]\!]$ et ces valeurs seront presque sûrement deux à deux distinctes.

Exercice 3.15

On suppose que toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On rappelle que la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall\, x > 0,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$.

On admet sans démonstration que la fonction Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$, on a $\Gamma''(x) > 0$.

Dans tout l'exercice, on note X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.
On pose : $Y = |X|$ et $T = \sqrt{Y} = \sqrt{|X|}$.

1.a) Montrer que la variable aléatoire Y est à densité et déterminer une densité f_Y de Y.
b) Justifier que Y admet une espérance et une variance que l'on calculera.

2.a) Justifier que T admet une espérance et une variance.

b) Calculer $E(T)$ à l'aide du théorème de transfert et du changement de variable $t = \dfrac{x^2}{2}$.

Montrer que $V(T) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\Big(1 - \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\Gamma\Big(\dfrac{3}{4}\Big)\right)^2\Big)$.

3.a) Établir l'existence et l'unicité d'un réel $\alpha \in]1, 2[$ pour lequel on a $\Gamma'(\alpha) = 0$.
b) En déduire le sens de variation de la fonction Γ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Justifier l'encadrement : $1 < \Gamma\Big(\dfrac{3}{4}\Big) < \pi^{\frac{1}{4}}$.

4. Le programme *Scilab* suivant renvoie le réel 1.2251307. Que représente ce réel ? Justifier votre réponse.

```
n=100000
S=sum((grand(1,n,'exp',1).^(- 0.25)))/n
```

Solution de l'exercice 3.15

1.a) On a $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$, donc $F_Y(x) = 0$ si $x \leqslant 0$. De plus si $x > 0$, en notant Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on a :

$$F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(|X| \leqslant x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1.$$

Ainsi F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}^*$, donc Y est à densité et une densité f_Y est donnée par $f_Y(x) = 0$ si $x \leqslant 0$, et par $f_Y(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ si $x > 0$.

b) Pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^r \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x$ est assurée par le critère de Riemann car $x^r \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = o\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$ quand x tend vers $+\infty$. En particulier pour $r = 1, 2$, on a l'existence de $E(Y)$ et $V(Y)$. On a :

$E(Y) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\Big[-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\Big]_0^{+\infty} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot$

D'autre part, $V(Y) = E(Y^2) - \big(E(Y)\big)^2 = E(X^2) - \big(E(Y)\big)^2 = 1 - \dfrac{2}{\pi} = \dfrac{\pi-2}{\pi}\cdot$

2.a) On a $T(\Omega) = \mathbb{R}_+$. La variable aléatoire T admet un moment d'ordre 2, puisque $T^2 = Y$ et que $E(Y)$ existe. Par suite, T admet un moment d'ordre 1.

b) $E(T) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$. Le changement de variable $t = \dfrac{x^2}{2} \Longrightarrow x = 2^{\frac{1}{2}}\,t^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow \mathrm{d}x = 2^{-\frac{1}{2}}\,t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$.

Par suite, $E(T) = \dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}} \displaystyle\int_0^{+\infty} 2^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{4}} 2^{-\frac{1}{2}}\, t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{2^{\frac{1}{4}}}{\pi^{\frac{1}{2}}} \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \times \Gamma\Big(\dfrac{3}{4}\Big)$.

D'autre part, $V(T) = E(T^2) - \big(E(T)\big)^2 = E(Y) - \big(E(T)\big)^2 = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} - \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\,\Gamma^2\Big(\dfrac{3}{4}\Big) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\Big(1 - \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma^2\Big(\dfrac{3}{4}\Big)\Big)$.

3.a) La fonction Γ est continue sur $[1, 2]$ et dérivable sur $]1, 2[$. De plus, $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$. Or, $\forall x > 0,\ \Gamma''(x) > 0$ (Γ est convexe), donc la fonction Γ' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Puisqu'il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$, la stricte croissance de $\Gamma' \Longrightarrow \alpha$ est le seul point qui annule Γ'.

b) Il en résulte que sur $]0, \alpha[$, on a $\Gamma'(x) < 0$ et Γ décroissante, et sur $]\alpha, +\infty[$, $\Gamma'(x) > 0$ et Γ croissante.

c) $1 < \alpha < 2$ et $\dfrac{3}{4} < 1 \Longrightarrow \Gamma\Big(\dfrac{3}{4}\Big) > \Gamma(1) = 1$. D'autre part, $V(T) > 0 \Longrightarrow \Gamma\Big(\dfrac{3}{4}\Big) < \pi^{\frac{1}{4}}$, d'où l'encadrement.

4. Le programme renvoie une valeur approchée de $\Gamma\Big(\dfrac{3}{4}\Big) = E(U^{-\frac{1}{4}})$ par une méthode de Monte-Carlo.

Il s'agit de la moyenne de 100000 réalisations de $U^{-\frac{1}{4}}$ où U est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 3.16

1. Soit U une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. On pose $X = U^2$ et on admet que X est une variable aléatoire à densité.

a) Montrer qu'une densité de X est la fonction f_X définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/2}}{\sqrt{2\pi x}} & \text{si } x > 0 \\[2ex] 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X possède un moment d'ordre n que l'on notera m_n.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une relation entre m_{n+1} et m_n. En déduire la valeur de m_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. a) Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ converge et la calculer (on posera le changement de variable $u = \cos v$).

b) Soit x un réel strictement positif. Déduire de la question précédente la valeur de $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(x-t)}}$.

c) Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi que X. Déterminer la densité de $S = X_1 + X_2$.

3. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire S possède un moment d'ordre n, noté μ_n, que l'on calculera.

b) À l'aide d'une seconde expression de $E(S^n)$ déterminée à partir de l'égalité $S^n = (X_1 + X_2)^n$, établir l'égalité suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$$

Solution de l'exercice 3.16

1. a) La variable aléatoire X est à valeurs positives, donc en notant F_X sa fonction de répartition, $F_X(x) = 0$ si $x \leqslant 0$, par continuité de cette fonction. Par ailleurs, si $x > 0$, $F_X(x) = P(U^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant U \leqslant \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$. On obtient :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\Phi'(\sqrt{x}) = \dfrac{e^{-x/2}}{\sqrt{2\pi x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \to x^n f_X(x)$ est nulle sur $\mathbb{R}_-$, continue sur $\mathbb{R}_+$ et est positive et négligeable devant $1/x^2$ au voisinage de $+\infty$.

Au voisinage de 0^+, $f(x)$ est équivalent à $\dfrac{C}{\sqrt{x}}$ dont l'intégrale converge.

c) Pour $A > 0$ on note $m_n(A) = \displaystyle\int_0^A x^n f_X(x)dx$. Une intégration par parties puis en faisant tendre A vers $+\infty$, il vient : $m_{n+1} = (2n+1)m_n$.

On a $m_0 = E(1) = 1$. La récurrence précédente donne :

$$m_n = (2n-1)(2n-3)\cdots 1 = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

2. a) La fonction cosinus définit une bijection strictement décroissante de classe C^1 de $]0,\pi[$ sur $]-1,1[$. L'intégrale donnée et celle obtenue par changement de variable sont de même nature. Il vient :

$$\int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^{\pi} \frac{\sin v\, dv}{\sqrt{1-\cos^2 v}} = \int_0^{\pi} dv = \pi$$

b) Le changement de variable affine $u = \dfrac{2t}{x} - 1$ donne :

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(x-t)}} = \int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pi$$

c) On effectue un produit de convolution :

$$f_S(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{X_2}(x-t)dt = 0 \text{ si } x \leqslant 0$$

et pour $x > 0$

$$f_S(x) = \int_0^x \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{2\pi t}} \frac{e^{-(x-t)/2}}{\sqrt{2\pi(x-t)}}dt = \frac{e^{-x/2}}{2\pi}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(x-t)}} = \frac{e^{-x/2}}{2}$$

La fonction f_S ainsi définie est une densité de probabilité de loi exponentielle $\mathcal{E}(1/2)$.

3. a) Le changement de variable affine $x = 2t$ donne :

$$\mu_n = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^n e^{-x/2}\,\mathrm{d}x = 2^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = 2^n\Gamma(n+1) = 2^n n!.$$

b) Par la formule du binôme et en utilisant la linéarité de l'espérance et l'indépendance de X_1 et X_2 :

$$E((X_1+X_2)^n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E(X_1^k)E(X_2^{n-k})=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(2k)!}{(2^k k!)}\frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}(n-k)!}$$

soit

$$2^n n! = \frac{n!}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(k!)^2}\frac{(2n-2k)!}{((n-k)!)^2}$$

En simplifiant par $n!$ et en passant le 2^n de droite à gauche, on reconnaît l'égalité demandée.

Exercice 3.17

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et indépendantes. On suppose que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2,1/3)$ et Y suit la loi uniforme sur le segment $[0,1]$. On pose :

$$Z=8(X+Y),\quad W=12XY.$$

1. Déterminer $Z(\Omega)$ et $W(\Omega)$.

2. Calculer $P(Z\in\mathbb{N})$ ainsi que $P(W\in\mathbb{N})$.

3.a) Montrer que $P(Z>W)=1$.

b) En déduire une comparaison entre les fonctions de répartition de Z et de W sans les calculer.

4. Déterminer la fonction de répartition de Z. Les variables aléatoires Z et W sont-elles à densité ?

5. Compléter le programme Scilab ci-dessous pour vérifier le résultat du calcul de $P(Z>W)$ effectué dans la question 3.a) à l'aide du résultat de N simulations de chacune des variables aléatoires Z et W. `N=input('N');`

```
x=grand(1,N,'bin',2,1/3);
y=grand(1,N,'unf',0,1);
z=....
w=....
.........
.........
```

Solution de l'exercice 3.17

1. On a $Z(\Omega)=W(\Omega)=[0,24]$.

2. Soit k un entier naturel. En utilisant le système complet d'événements $[X=0],[X=1],[X=2]$, on aura :

$$\begin{aligned}P(Z=k)&=P(Z=k,X=0)+P(Z=k,X=1)+P(Z=k,X=2)\\&=P(Y=k/8)\times P(X=0)+P(Y=k/8-1)\times P(X=1)+P(Y=k/8-2)\times P(X=2)\end{aligned}.$$

Or Y est une variable à densité ; on en déduit que $P(Z=k)=0$ et $P(Z\in\mathbb{N})=\sum_{k=0}^{+\infty}P(Z=k)=0.$

De même, $P(W\in\mathbb{N})=P(W=0)=P(X=0)=4/9$.

3. a) On a :

$$\begin{aligned}P(Z>W)&=P\big((Z>W)\cap(X=0)\big)+P\big((Z>W)\cap(X=1)\big)+P\big((Z>W)\cap(X=2)\big)\\&=P(8Y>0)P(X=0)+P(8(Y+1)>12Y)P(X=1)+P(8(Y+2)>24Y)P(X=2)\\&=P(Y>0)\times P(X=0)+P(2>Y)\times P(X=1)+P(1>Y)\times P(X=2)\\&=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1\end{aligned}$$

Ainsi, $P(Z > W) = 1$.

b) On en déduit l'inégalité presque partout : $Z > W$. Ainsi, pour tout x réel, on a presque sûrement l'inclusion $[W \geqslant x] \subset [Z \geqslant x]$.
Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(W \geqslant x) \leqslant P(Z \geqslant x)$, ce qui entraîne que $F_Z(x) \leqslant F_W(x)$.

4. Soit x un réel, on a :

$$\begin{aligned} P(Z \leqslant x) &= P\big((Z \leqslant x) \cap (X = 0)\big) + P\big((Z \leqslant x) \cap (X = 1)\big) + P\big((Z \leqslant x) \cap (X = 2)\big) \\ &= P(Y \leqslant x/8)P(X = 0) + P(Y \leqslant x/8 - 1)P(X = 1) + P(Y \leqslant x/8 - 2)P(X = 2) \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(Z \leqslant x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x < 0 \\ x/18 & \text{si} & x \in [0, 16[\\ x/72 + 2/3 & \text{si} & x \in [16, 24[\\ 1 & \text{si} & x \geqslant 24 \end{array} \right.$$

La fonction de répartition de Z est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 16, 24\}$. On en conclut que Z est une variable aléatoire à densité. Par contre W n'est pas à densité puisque $P(W = 0) = 4/9 \neq 0$.

5. On propose un script pour calculer la fréquence notée f où $Z > W$.
```
N=input('N');
x=grand(1,N,'bin',2,1/3);y=grand(1,N,'unf',0,1);
z=8*(x+y)
w=12 *x.*y
a=find(z>w)
f=length(a)/N // (ou f=mean(a))
disp(f)
```
Si on ne connaît pas la fonction `find`, on peut également faire une boucle.

Exercice 3.18

Deux amis A et B peuvent se donner rendez-vous dans trois lieux possibles numérotés $0, 1$ et 2. Chacun choisit un endroit au hasard. S'ils ne se retrouvent pas, ils recommencent en choisissant de nouveau un des trois lieux et ainsi de suite. Tous les choix sont indépendants. On note T le nombre d'étapes qu'il faut pour que les amis se retrouvent. On modélise cette situation en considérant deux suites $(X_n)_{n \geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi uniforme sur $\{0, 1, 2\}$.
Pour chaque $n \geqslant 1$, X_n (resp. Y_n) représente le choix de A (resp. de B) à la n-ième étape.
Soit T la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n(\omega) \neq Y_n(\omega) \\ \min\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } X_n(\omega) = Y_n(\omega)\} & \text{sinon} \end{array} \right.$$

On note F l'événement : « les deux amis se rencontrent en un nombre fini d'étapes ».

1. Déterminer la loi de T et en déduire l'espérance et la variance de T.

2. Montrer que F est un événement quasi certain.

3. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 3. On généralise maintenant la situation précédente : les deux amis peuvent se donner rendez-vous dans p lieux possibles. On note T_p le nombre d'étapes qu'il faut pour se retrouver.

a) Modéliser cette situation.

b) Montrer que l'événement : « les deux amis se rencontrent en un nombre fini d'étapes » est quasi certain.

c) On ne suppose plus que l'entier p est fixé. Étudier la convergence en loi de la suite $(T_p/p)_p$ lorsque p tend vers $+\infty$.

d) Compléter le script Scilab ci-dessous pour simuler la variable aléatoire T_p.

```
p=input('p');
X=grand(1,1,'uin',0,p-1);
Y=
n=
while
  n=
  X=
  Y=
end
disp(n)
```

Solution de l'exercice 3.18

1. Soit n un entier naturel non nul. On a : $P(T = n) = P(X_1 \neq Y_1, \cdots, X_{n-1} \neq Y_{n-1}, X_n = Y_n)$. Par indépendance des variables aléatoires, on obtient :

$$P(T = n) = P(X_1 \neq Y_1) \cdots P(X_{n-1} \neq Y_{n-1}) P(X_n = Y_n),$$

Les variables aléatoires suivant la même loi, on note $a = P(X_1 = Y_1)$ et on a :

$$P(T = n) = a(1 - a)^{n-1}.$$

Par ailleurs :

$$a = P(X_1 = 0, Y_1 = 0) + P(X_1 = 1, Y_1 = 1) + P(X_1 = 2, Y_1 = 2) = 1/3.$$

Par conséquent, T suit la loi géométrique de paramètre $1/3$. Donc $E(T) = 3$ et $V(T) = 6$.

2. On a $P(F) = P(T \neq 0) = 1$, donc F est un événement quasi certain.

3. a) On modélise cette situation en considérant deux suites $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléaltoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![0, p-1]\!]$. On note T_p la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T_p(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n(\omega) \neq Y_n(\omega) \\ \min\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } X_n(\omega) = Y_n(\omega)\} & \text{sinon} \end{cases}$$

b) On note F_p l'événement : « les deux individus se rencontrent en un nombre fini d'étapes ».
Soit n un entier naturel non nul. On a : $P(T_p = n) = P(X_1 \neq Y_1, \cdots, X_{n-1} \neq Y_{n-1}, X_n = Y_n)$.
Par indépendance des variables aléatoires, on obtient :

$$P(T_p = n) = P(X_1 \neq Y_1) \cdots P(X_{n-1} \neq Y_{n-1}) P(X_n = Y_n),$$

Les variables aléatoires suivant la même loi, on note $a_p = P(X_1 = Y_1)$ et on a :

$$P(T_p = n) = a_p(1 - a_p)^{n-1}.$$

Par ailleurs :

$$a_p = P(X_1 = 0, Y_1 = 0) + P(X_1 = 1, Y_1 = 1) + \cdots P(X_1 = p-1, Y_1 = p-1) = 1/p.$$

Par conséquent, T_p suit une loi géométrique de paramètre $1/p$.

c) Soit $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} P\left(\frac{T_p}{p} \leqslant x\right) &= 1 - P(T_p > px) = 1 - (1 - 1/p)^{\lfloor px \rfloor} \\ &= 1 - \exp(\lfloor px \rfloor \ln(1 - 1/p)) \end{aligned}$$

Or
$$\frac{px-1}{p} < \frac{\lfloor px \rfloor}{p} \leqslant x \Rightarrow \lim_{p\to+\infty} \lfloor px \rfloor \ln\left(1-\frac{1}{p}\right) = -x$$
On en déduit que la limite de $P(T_p/p \leqslant x)$ lorsque p tend vers $+\infty$ est $1-e^{-x}$. On conclut que la suite $(T_p/p)_p$ converge en loi vers une loi exponentielle de paramètre 1.

d) On propose
```
p=input('p');
X=grand(1,1,'uin',0,p-1);
Y=grand(1,1,'uin',0,p-1);
n=1
while X<> Y
  n=n+1
  X=grand(1,1,'uin',0,p-1);
  Y=grand(1,1,'uin',0,p-1);
end
disp(n)
```

Exercice 3.19

Les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Dans une urne sont placées deux boules, une noire N et une rouge R. On effectue une suite de tirages d'une boule au hasard selon les modalités suivantes :
- si la boule tirée est noire : on ne la remet pas dans l'urne (et la boule rouge sera nécessairement tirée au prochain tirage),
- si la boule tirée est rouge : on remet l'urne dans l'état initial, avec 2 boules, la noire et la rouge.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note : N_n (respectivement R_n) l'événement : « la n-ième boule tirée est noire (respectivement rouge) ».

1. Écrire un script Scilab qui modélise le tirage des r premières boules obtenues ($r \geqslant 1$).

2. Pour $n \geqslant 1$, on pose $a_n = P(N_n)$ et $b_n = P(R_n)$.

a) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

b) En déduire que $b_{n+2} = \dfrac{1}{2}b_{n+1} + \dfrac{1}{2}b_n$ ainsi que les expressions de a_n et b_n en fonction de n.

3. On note X la variable aléatoire égale au rang de la première boule noire tirée. Quelle est la loi de X ? Calculer son espérance et sa variance.

4. Soit n un entier donné supérieur ou égal à 1. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées lors des n tirages consécutifs.
a) Calculer l'intervalle $[\![m_n, M_n]\!]$ des valeurs prises par Z. Calculer ensuite $P(Z = m_n)$ et $P(Z = M_n)$.

b) On note $b_{n,k}$ le nombre de tirages de n boules dont exactement k sont noires et se terminent par le tirage d'une boule rouge (l'événement R_n est réalisé).
Exprimer successivement la probabilité $P(R_n \cap (Z = k))$ puis la probabilité $P(R_n)$ en fonction des $b_{n,k}$.

Solution de l'exercice 3.19

1. Une proposition :

```
r=10
Y=[] //(liste des r boules)
for i=1:r
  if i>1 & Y(i-1)=="N" then Y(i)="R"
    else if grand(1,1,"uin",1,2)==1 then Y(i)="N"
    else Y(i)="R"
  end
end
end
```

2. a) On a avec un système complet d'événements évident : $N_{n+1} = (N_n \cap N_{n+1}) \cup (R_n \cap N_{n+1})$, donc $a_{n+1} = 0 + \frac{1}{2}b_n$.
De la même manière : $R_{n+1} = (N_n \cap R_{n+1}) \cup (R_n \cap R_{n+1}) \Rightarrow b_{n+1} = 1a_n + \frac{1}{2}b_n$.

b) Ainsi $b_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}b_{n+1}$, qui est une suite linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est $\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} = 0$. Les racines sont 1 et $-\frac{1}{2}$ d'où : $b_n = K_1 + K_2(-\frac{1}{2})^n$.
On détermine les deux constantes K_1 et K_2 en prenant $n = 1$ et $n = 2$ et en calculant b_1, b_2. Après calculs $K_1 = \frac{2}{3}$ et $K_2 = \frac{1}{3}$ et

$$\begin{cases} b_n = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}(-\dfrac{1}{2})^n = 1 - a_n \\ a_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}(-\dfrac{1}{2})^n \end{cases}$$

3. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. L'événement « tirer une première boule noire au n-ème tirage » correspond à la suite : $R_1 R_2 \cdots R_{n-1} N_n$ En utilisant les probabilités composées, on obtient :

$$P(X = n) = P(R_1) P_{R_1}(R_2) \cdots P_{R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_{n-1}}(N_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Ainsi, X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(\frac{1}{2})$ d'où $E(X) = V(X) = 2$.

4.a) On a $Z(\Omega) = [\![m_n = 0, M_n = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor]\!]$.
L'événement $(Z = 0)$ est égal à l'événement $(R_1 R_2 \cdots R_n)$. Donc $P(Z = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- si $n = 2p + 1$ est impair, on a $M_n = p + 1$ pour $[Z = N_1 R_2 N_3 \cdots R_{2p} N_{2p+1}]$ et $P(Z = M_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{M_n}$.
- si $n = 2p$ est pair, alors $M_n = p$ et on différencie les tirages selon la couleur de la dernière boule :
  - ◇ un seul finit par une rouge : $N_1 R_2 \cdots N_{2p-1} R_{2p}$,
  - ◇ p finissent par une noire : un est alterné et les $p - 1$ autres contiennent 2 Rouge contiguës :

$$\begin{aligned} (R_1 N_2 R_3 N_4 \cdots \quad & R_{2p-1} N_{2p}) \cup (N_1 \mathbf{R_2 R_3} N_4 R_5 \cdots R_{2p-1} N_{2p}) \\ & \cup (N_1 R_2 N_3 \mathbf{R_4 R_5} N_6 \cdots R_{2p-1} N_{2p}) \cup \cdots \cup (N_1 R_2 N_3 \cdots \mathbf{R_{2p-2} R_{2p-1}} N_{2p}) \end{aligned}$$

D'où : $P(Z = M_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^p + p\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1} = \left(2 + \frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}$

b) On a $P([Z = k] \cap R_n) = b_{n,k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \times 1^k . \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k} = b_{n,k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$, car tous les tirages finissant par une boule rouge ont tous la même probabilité. Donc :

$$R_n = \bigcup_{k=m_n}^{M_n} (R_n \cap [Z = k]) \Rightarrow P(R_n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2}) \rfloor} b_{n,k} . \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

Exercice 3.20

1. On considère deux variables aléatoires Y et Z indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que Y suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et que Z suit la loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$.

a) Donner une densité de $-Y$.

b) Donner une densité de $Z - Y$.

c) Déterminer la probabilité $P(Y \leqslant Z)$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère des variables aléatoires $X_1, \ldots X_n$ définies sur $(\Omega.\mathcal{A}, P)$, indépendantes, telles que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, X_i suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_i > 0$.
On pose $M_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) Montrer que M_n est une variable aléatoire.

b) Déterminer la loi de M_n.

3.a) Déduire des questions précédentes la valeur de $P(X_i = M_n)$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

b) Pour $i \in [\![1, n]\!]$ donné, la variable aléatoire $X_i - M_n$ est-elle à densité ?

4. On considère le script Scilab suivant :

```
n=input('entrer une valeur de n : ')
c=0
for k=1:10 000
      X=[]
      for i=1:n
            X=[X,grand(1,1,'exp',1/i)]
      end
      m=min(X)
      if X(1)==m then c=c+1            end
      end
disp(c/10000)
```

De quelle valeur le réel affiché est-il proche ?

Solution de l'exercice 3.20

1. a) On a $-Y(\Omega) = \mathbb{R}^-$ et par le cours, une densité de $-Y$ est $f_Y(-x)$. Soit :

$$f_{-Y}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ \lambda e^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) On effectue un produit de convolution. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t) f_{-Y}(x - t)dt$ sera une densité de $Z - Y$ si cette intégrale converge.

Or $f_Z(t) \neq 0 \Leftrightarrow t \geqslant 0$ et $f_{-Y}(x - t) < 0 \Leftrightarrow x - t \leqslant 0$. Ce qui donne :

- si $x \leqslant 0$:

$$f_{Z-Y}(x) = \int_0^{+\infty} f_Z(t) f_{-Y}(x - t)dt = \int_0^{+\infty} \mu e^{-\mu t} \lambda e^{\lambda(x-t)} dt = \lambda\mu e^{\lambda x} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t} dt = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} e^{\lambda x}$$

- si $x \geqslant 0$:

$$f_{Z-Y}(x) = \int_x^{+\infty} \mu e^{-\mu t} \lambda e^{\lambda(x-t)} dt = \lambda\mu e^{\lambda x} \int_x^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t} dt = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} e^{-\mu x}$$

c) On a $P(Y \leqslant Z) = P(Z - Y \geqslant 0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_{Z-Y}(t)dt = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

2. a) L'événement $(M_n \geqslant x)$ est égal à $\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \geqslant x]$ qui appartient à la tribu $\mathcal{A}$.

b) Par indépendance, on a :

$$P(M_n \geqslant x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geqslant x) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i x} = e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)x}$$

Ainsi, M_n suit la loi exponentielle de paramètre $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

3.a) On a l'égalité des événements $[X_i = M_n]$ et $[X_i \leqslant \min(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n)]$. Or la loi de $\min(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n)$ est la loi exponentielle de paramètre $\sum_{j \neq i} \lambda_j$. Donc, d'après 1.c) :

$$P(X_i = M_n) = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j}$$

b) La variable aléatoire $X_i - M_n$ n'est pas à densité car $P(X_i - M_n = 0) \neq 0$.

4. La variable c contient le nombre de fois, sur les 10000 expériences réalisées, où on a pris la plus petite valeur parmi les variables $X_1, \ldots, X_n$, c'est-à-dire le nombre de fois où l'événement $[X_1 = M_n]$ est réalisé. En divisant par 10000, la variable $c/10000$ contient donc une valeur approchée de la probabilité de cet événement, c'est-à-dire, d'après la question 3, une valeur approchée de $\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} i} = \dfrac{2}{n(n+1)}$.

Exercice 3.21

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = P(X = n)$.

On appelle *fonction génératrice* de X la fonction d'une variable réelle t définie par :

$$G_X(t) = \mathbb{E}\big(t^X\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, t^n.$$

1. a) Justifier que la fonction G_X est définie pour tout $t \in [\,0, 1]$.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On admet que si la série $\sum_{n \geqslant r} p_n \times n(n-1)\cdots(n-r+1)t^{n-r}$ converge en un point $t_0 \in [\,0, 1]$, alors G_X est dérivable r fois sur $[0, t_0]$ et l'on a

$$\sum_{n=r}^{+\infty} p_n \times n(n-1)\cdots(n-r+1)t_0^{n-r} = G_X^{(r)}(t_0)$$

où $G_X^{(r)}(t_0)$ représente la dérivée r-ième de G_X en t_0.

b) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ si et seulement si la série dérivée terme à terme $\sum_n n p_n t^{n-1}$ converge pour $t = 1$. Exprimer $E(X)$ en fonction de G_X.

2. a) Déterminer la fonction génératrice G_Z d'une variable aléatoire Z suivant une loi géométrique de paramètre $p \in \,]\,0, 1[$.

b) Retrouver à l'aide de G_Z la valeur de l'espérance de Z.

c) Pour tout $r \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [\,0,1[$, déterminer la valeur de la somme :

$$\Sigma_r(x) = \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r}.$$

3. On considère un schéma de Bernoulli de probabilité de succès $p \in]0,1[$, et le jeu suivant (en notant S pour succès, E pour échec et $q = 1 - p$).

On mise une somme M. On réalise les épreuves de Bernoulli indépendantes successives et on gagne une somme (en Euros) R égale à la longueur de la première séquence opposée au premier résultat s'il y en a une, et zéro sinon ; par exemple si les résultats des premières épreuves sont $SSSEEEEESS\ldots$, le premier résultat est un succès, donc R vaut la longueur de la première séquence d'échecs consécutifs, soit ici $R = 5$.

a) Déterminer la loi de R.

b) On cherche la mise minimale M_0 pour que le casino organisateur du jeu ne perde pas d'argent en moyenne. Déterminer la fonction génératrice de R, calculer l'espérance de R et conclure.

c) Retrouver ce résultat en calculant directement l'espérance de R

Solution de l'exercice 3.21

1. a) Pour tout $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant p_n\, t^n \leqslant p_n$, terme général d'une série convergente (vers 1), donc $\sum_{n\geqslant 0} p_n\, t^n$ converge pour tout $t \in [0,1]$.

b) La variable X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} n\, p_n$ converge (absolument) si et seulement si la série dérivée terme à terme $\sum_{n\geqslant 0} n\, p_n\, t^{n-1}$ converge en $t_0 = 1$, et on a alors $E(X) = G'_X(1)$.

2. a) Si $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, on a pour $|t| < \dfrac{1}{q}$, donc au moins sur $[-1,1]$:

$$G_Z(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} p\, q^{k-1}\, t^k = p\, t \sum_{k=1}^{+\infty} (q\, t)^{k-1} = \frac{p\, t}{1 - q\, t}$$

b) On a alors :

$$G'_Z(t) = \frac{p}{(1-q\,t)^2} \Rightarrow G'_Z(1) = \frac{p}{(1-q)^2} \quad \text{soit} \quad E(Z) = \frac{1}{p}$$

c) En dérivant terme à terme r fois la série de somme $G_Z(t)$, on trouve

$$\sum_{k\geqslant r} \big[p\, q^{k-1}\, t^k\big]^{(r)} = p\, q^{r-1} \sum_{k\geqslant r} k\,(k-1)\ldots(k-r+1)\,(q\,t)^{k-r}$$

qui converge pour $t \in [0, 1/q[$ car

$$0 \leqslant k\,(k-1)\ldots(k-r+1)\,(q\,t)^{k-r} \sim k^r\,(q\,t)^{k-r} = o\big(1/k^2\big)$$

par croissances comparées. Alors (par récurrence), on a :

$$\begin{aligned} G_Z^{(r)}(t) &= \left[\frac{p}{(1-q\,t)^2}\right]^{(r-1)} = \frac{r!\, p\, q^{r-1}}{(1-q\,t)^{r+1}} \\ &= p\, q^{r-1} \sum_{k=r}^{+\infty} \Big[k\,(k-1)\ldots(k-r+1)\,(q\,t)^{k-r}\Big] = r!\, p\, q^{r-1} \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} (q\,t)^{k-r} \end{aligned}$$

soit, en posant $x = q\,t \in [0,1[$,

$$\Sigma_r(x) = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

3. a) On a $R(\Omega) = \mathbb{N}$; en notant L la longueur de la première séquence (qui peut être constituée de succès ou d'échecs), pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a à l'aide du système complet d'événements $\{L = k,\, k \in \mathbb{N}^*\}$:

$$P(R = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\Big((R = n) \cap (L = k)\Big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Big[p^k\, q^n\, p + q^k\, p^n\, q\Big] = \frac{q^n\, p^2}{1-p} + \frac{p^n\, q^2}{1-q} = p^2\, q^{n-1} + q^2\, p^{n-1}$$

De plus, $R = 0$ si et seulement si on n'obtient que des succès ou que des échecs, événements de probabilité nulle (par limite monotone), donc $P(R = 0) = 0$.

b) • Pour $t \in [-1, 1]$ (au moins),

$$G_R(t) = E\big(t^R\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big[P(R = n)\, t^n\Big] = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big[p^2\, q^{n-1}\, t^n + q^2\, p^{n-1}\, t^n\Big] = \frac{p^2\, t}{1 - q\, t} + \frac{q^2\, t}{1 - p\, t}$$

• La fonction G_R dérivable en 1 car $0 < p, q < 1$, et

$$E(R) = G_R'(1) = \left[\frac{p^2}{1 - q\, t} + \frac{p^2\, q\, t}{(1 - q\, t)^2} + \frac{q^2}{1 - p\, t} + \frac{q^2\, p\, t}{(1 - p\, t)^2}\right]_{t=1} = p + q + q + p = 2$$

donc $E(R) = 2$ et la mise minimale est $M_0 = 2$.

c) Par dérivation d'une série géométrique convergente, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big[n\, p^2 q^{n-1}\big] = \frac{p^2}{(1-q)^2} = 1$$

d'où $M_0 = E(R) = 2$.

Exercice 3.22

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. a) Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit un réel $s \geqslant 0$. Montrer que :

$$\forall\, t \in [a, b],\ \mathrm{e}^{st} \leqslant \frac{b - t}{b - a}\mathrm{e}^{sa} + \frac{t - a}{b - a}\mathrm{e}^{sb}$$

b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$ telle que $E[X] = 0$. Montrer pour tout $s \geqslant 0$, l'existence de $E(\mathrm{e}^{sX})$ et que l'on a :

$$\forall\, s \geqslant 0,\ E(\mathrm{e}^{sX}) \leqslant \frac{b}{b - a}\mathrm{e}^{sa} - \frac{a}{b - a}\mathrm{e}^{sb} = f(s)$$

c) On pose $g = \ln \circ f$. Montrer que g est bien définie.

d) Montrer que $\forall\, s \geqslant 0,\ g(s) = \displaystyle\int_0^s (s - u)\, g''(u) du$.

e) En déduire que :

$$\forall\, s \geqslant 0,\ E(\mathrm{e}^{sX}) \leqslant \exp\left(\frac{s^2(b - a)^2}{8}\right).$$

2. Soit $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$ des réels tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!], a_i < b_i$. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i(\Omega) = [a_i, b_i]$.
On pose : $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
a) Montrer que le résultat de la question 1. e) reste valide si X admet une espérance non nulle.

b) Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, on a :

$$P(S_n - E(S_n) \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{2t^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right).$$

Solution de l'exercice 3.22

1. a) Par convexité de la fonction $t \in [a,b] \mapsto \mathrm{e}^{st}$, on a :

$$\mathrm{e}^{st} \leqslant \frac{b-t}{b-a}\mathrm{e}^{sa} + \frac{t-a}{b-a}\mathrm{e}^{sb}$$

b) $E(\mathrm{e}^{sX})$ existe car e^{sX} est bornée. En passant à l'espérance,

$$E(\mathrm{e}^{sX}) \leqslant \frac{b}{b-a}\mathrm{e}^{sa} + \frac{-a}{b-a}\mathrm{e}^{sb},$$

car $E(X) = 0$.

c) Notons $g(s) = \ln\left(\frac{b}{b-a}\mathrm{e}^{sa} + \frac{-a}{b-a}\mathrm{e}^{sb}\right)$. La fonction g est bien définie sur $[a,b]$ continue et de classe C^∞ sur $]a,b[$.

d) On calcule les dérivées :

$$g'(s) = \frac{ab(\mathrm{e}^{sa} - \mathrm{e}^{sb})}{b\mathrm{e}^{sa} - a\mathrm{e}^{sb}} \quad \text{et} \quad g''(s) = -ab\frac{(b-a)^2\mathrm{e}^{s(a+b)}}{(b\mathrm{e}^{sa} - a\mathrm{e}^{sb})^2}.$$

Or, par la formule de Taylor avec reste intégral, on a :

$$g(s) = g(0) + g'(0)s + \int_0^s (s-u)g''(u)du.$$

Remarquons alors que $g(0) = g'(0) = 0$. On obtient ainsi le résultat annoncé.

e) On a :

$$g''(u) = -(b-a)^2\frac{ab\mathrm{e}^{u(a+b)}}{(b\mathrm{e}^{ua} - a\mathrm{e}^{ub})^2} = +(b-a)^2\frac{xy}{(x+y)^2} = (b-a)^2\left(\frac{x}{x+y}\right)\left(1 - \frac{x}{x+y}\right) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$$

avec $x = b\mathrm{e}^{ua} \geqslant 0$ et $y = -a\mathrm{e}^{ub} \geqslant 0$ (en effet on a $a \leqslant 0 \leqslant b$ car $E[X] = 0$). Donc :

$$|g(s)| \leqslant \int_0^s |g''(u)(s-u)|du \leqslant \frac{(b-a)^2 s^2}{8},$$

ce qui donne le résultat souhaité.

2.a)b) On va utiliser une méthode assez classique en probabilité : on passe à l'exponentielle avec un facteur s de chaque côté dans la probabilité, puis on applique l'inégalité de Markov et enfin on optimise en s.
Commençons par remarquer qu'on peut remplacer X_i par $\tilde{X}_i = X_i - E[X_i]$, ce qui change a_i et b_i en $\tilde{a}_i = a_i - E[X_i]$ et $\tilde{b}_i = b_i - E[X_i]$ mais on a toujours $b_i - a_i = \tilde{b}_i - \tilde{a}_i$: cela montre que l'on peut supposer sans perte de généralité que $E[X_i] = 0$. Pour $s \geqslant 0$, on a, par l'inégalité de Markov :

$$P(S_n \geqslant t) = P(\mathrm{e}^{sS_n} \geqslant \mathrm{e}^{st}) \leqslant \frac{E(\mathrm{e}^{sS_n})}{\mathrm{e}^{st}}$$

On a alors, par indépendance et en appliquant la question 1 :

$$E(\mathrm{e}^{sS_n}) = \prod_{i=1}^{n} E(\mathrm{e}^{sX_i}) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{s^2(b_i - a_i)^2}{8}\right)$$

On a donc montré que :

$$P(S_n \geqslant t) \leqslant \exp\left(-st + \frac{s^2}{8}\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2\right).$$

Finalement, on cherche la valeur de s qui minimise cette expression et c'est :

$$s = \frac{4t}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2},$$

qui donne le résultat.

Chapitre 4

Option BL

Exercice 4.1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
Soit u l'application définie sur E par :

$$\forall\, P \in E,\ u(P)(X) = XP(X+1) - (X-1)P(X)$$

1.a) Montrer que u est un endomorphisme de E.

b) Écrire la matrice associée à u dans la base canonique de E.

2.a) Déterminer les valeurs propres de u.

b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Est-il inversible ?

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et P_k un polynôme de degré k qui est vecteur propre de u.
a) Montrer que 0 est racine de P_k.

b) Déterminer toutes les racines de P_k. En déduire la forme de P_k.

c) Déterminer une base de vecteurs propres de u.

Solution de l'exercice 4.1

1.a) L'application u est manifestement linéaire. On doit seulement vérifier le degré de $u(P)$.
Or $u(X^k) = X(X+1)^k - (X-1)X^k = X^{k+1} + kX^k + \cdots - X^{k+1} + X^k = (k+1)X^k + \cdots$ ce qui montre que $\deg(u(X^k) = k$, ceci pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

b) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a $u(1) = 1$ et pour $k \geqslant 1$, on a :

$$u(X^k) = X(X+1)^k - (X-1)X^k = (k+1)X^k + \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} X^{j+1}$$

La matrice associée à u est triangulaire supérieure avec $1, 2, \ldots, n+1$ sur sa diagonale.

2.a)b) L'endomorphisme u admet $n+1$ valeurs propres distinctes. Il est diagonalisable et inversible puisque 0 n'est pas valeur propre de u.

3. a) On a vu que $u(1) = 1$. La constante $P = 1$ est vecteur propre de u associé à la valeur propre 1.

Soit P_k de degré $k \geqslant 1$, polynôme propre. Il est associé à la valeur propre $k+1$. Donc $XP_k(X+1) - (X-1)P_k(X) = (k+1)P_k(X)$. En évaluant en 0, il vient : $P_k(0) = (k+1)P_k(0) \Rightarrow P_k(0) = 0$.
b) En évaluant en -1, il vient : $-P_k(0) + 2P_k(-1) = (k+1)P_k(-1) \Rightarrow P_k(-1) = 0$.

On montre ainsi de suite que $0, -1, \ldots, -k+1$ sont des racines de P_k.

c) Comme $\deg(P_k) = k$, on a $P_k = \lambda_k \prod_{j=0}^{k-1}(X+j)$.

Exercice 4.2

Soient f et g les fonctions définies par :

$$\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[,\ f(x) = \frac{\ln x}{1-x} \quad \text{et } \forall\, x \in]0,+\infty[, \quad g(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

1. a) Montrer que f se prolonge par continuité en 1 et que g se prolonge par continuité en 0.

Dans la suite, on désigne par f et g les prolongements ainsi obtenus.

b) Montrer que : $\forall x \geqslant 0$, on a $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$.

2. On pose $L(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t$.

a) Montrer que L est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que L est définie et continue en 0.

3. a) À l'aide du changement de variable $x = -\ln t$, montrer que $L(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\ \mathrm{d}x$.

b) Pour tout entier $k \geqslant 1$, montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-kx}\ \mathrm{d}x$ et la calculer.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on admet la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\ \mathrm{d}x$.

Montrer que : $L(0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-kx}\ \mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\ \mathrm{d}x$.

d) En admettant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\ \mathrm{d}x = 0$ et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, donner la valeur de $L(0)$.

Solution de l'exercice 4.2

1. a) Soit x au voisinage de 1. On pose $x = 1-h$ et $\ln x = \ln(1-h)$. On sait que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1-h)}{-h} = 1$. Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = -1$.
La fonction f se prolonge par continuité en 1 par $f(1) = 1$.
De la même façon, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$. La fonction g se prolonge par continuité en 0 par $g(0) = 1$.

b) Comme $\mathrm{e}^x \geqslant 1$ pour $x \geqslant 0$, on obtient $g(x) \geqslant 0$.
En étudiant la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x - x - 1$ (croissante sur $\mathbb{R}_+$ et nulle en 0), on obtient $g(x) \leqslant 1$.

2. a) La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$, donc le théorème fondamental du calcul intégral indique que L est définie et dérivable (de dérivée f) sur $]0,+\infty[$.

b) La fonction f est continue sur $]0,1]$ donc la convergence de l'intégrale $L(0)$ ne pose problème qu'en 0. Comme $\displaystyle\lim_{t\to 0} t^{1/2} f(t) = 0$, on a $|f(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^{1/2}}$ au voisinage de 0. On conclut par la convergence des intégrales de Riemann.

3. a) Par changement de variable $x = -\ln t$ (que l'on fera bien sûr sur un segment), on a :

$$\int_1^0 f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{+\infty}^0 \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{-x}\right)}{1-\mathrm{e}^{-x}}(-\mathrm{e}^{-x})\ \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} g(x)\ \mathrm{d}x.$$

b) Par intégration par parties sur un segment $[0, X]$ puis en passant à la limite quand X tend vers $+\infty$, on trouve :

$$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k^2}.$$

c) Pour tout $x > 0$, par somme des termes d'une suite géométrique de raison différente de 1, on a :

$$x\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kx} = x\frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = g(x) - \frac{x\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}.$$

D'où le résultat voulu en intégrant entre 0 et $+\infty$, par linéarité de l'intégration (tout converge).

d) En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, comme "tout converge", on obtient : $L(0) = \dfrac{\pi^2}{6}$

Exercice 4.3

On effectue une suite de tirages au hasard dans une urne, qui contient initialement une boule blanche et une boule noire, de la manière suivante :
- à chaque tirage d'une boule blanche, on replace cette boule dans l'urne, puis l'on rajoute des boules blanches jusqu'à avoir multiplié par deux le nombre de boules blanches dans l'urne ;
- si l'on tire la boule noire, on arrête les tirages.

Ainsi, le nombre de boules blanches dans l'urne est multiplié par deux à chaque étape (sauf la dernière). On admet que l'expérience aléatoire est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « les n premiers lancers ne donnent que des boules blanches », et l'on pose $u_n = P(B_n)$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que : $P(B_n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}$.

3. On note B l'événement « les tirages ne s'arrêtent jamais ».

a) Exprimer B en fonction des B_n.
On admet que : $P(B) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que : $-\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+2^{-k}\right)$.

c) Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \ln\left(1+2^{-k}\right)$.

d) En déduire que $P(B) \neq 0$.

Solution de l'exercice 4.3

1. Il est clair que $B_{n+1} \subset B_n$, donc par croissance de la probabilité, la suite (u_n) est décroissante. Comme cette suite est minorée par 0, elle converge, d'après le théorème de la limite monotone.

2. D'après la formule des probabilités composées, on a :

$$\begin{aligned}
P(B_n) &= P_{B_{n-1}\cap\cdots\cap B_1}(B_n) \times P_{B_{n-2}\cap\cdots\cap B_1}(B_{n-1}) \times \cdots \times P_{B_1}(B_2) \times P(B_1)\\
&= P_{B_{n-1}}(B_n) \times P_{B_{n-2}}(B_{n-1}) \times \cdots \times P_{B_1}(B_2) \times P(B_1)\\
&= \frac{2^{n-1}}{1+2^{n-1}} \times \frac{2^{n-2}}{1+2^{n-2}} \times \cdots \times \frac{2}{1+2} \times \frac{1}{1+1}\\
&= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k},
\end{aligned}$$

puisqu'au n-ième tirage l'urne comporte 2^{n-1} boules blanches et une noire.

3. a) On a : $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$.

On admet que $P(B) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n)$.

b) D'après la question 2, on a :

$$-\ln(u_n) = -\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{2^k}{1+2^k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{1+2^k}{2^k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+2^{-k}\right).$$

c) L'inégalité classique : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$, donne : $0 \leqslant \ln\left(1+2^{-k}\right) \leqslant 2^{-k}$.
Comme la série géométrique $\sum_{k\geqslant 0} 2^{-k}$ converge, par théorème de comparaison, il en est de même de la série $\sum_{k\geqslant 0} \ln\left(1+2^{-k}\right)$.

d) D'après les deux questions précédentes, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{2^k}{1+2^k} = \exp\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left((1+2^{-k}\right)\right) = \ell > 0.$$

D'après les questions 2 et 3.a), on a donc : $P(B) = \ell > 0$.

Exercice 4.4

1. Soit h et k deux fonctions continues sur $[a,b]$ et à valeurs réelles.

a) En considérant pour tout réel x l'intégrale $\int_a^b (xh(t)+k(t))^2 dt$, établir l'inégalité suivante :

$$\left(\int_a^b h(t)k(t)dt\right)^2 \leqslant \int_a^b \big(h(t)\big)^2 dt \times \int_a^b \big(k(t)\big)^2 dt$$

b) À quelle condition nécessaire et suffisante cette inégalité est-elle une égalité ?

2. a) On considère une fonction f de classe C^1 sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Établir l'inégalité suivante :

$$\forall\, x \in [a,b],\ \ (f(x)-f(a))^2 \leqslant (x-a) \int_a^x \big(f'(t)\big)^2 dt$$

b) En déduire l'inégalité :

$$\int_a^b \big(f(x)-f(a)\big)^2 dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b \big(f'(t)\big)^2 dt$$

3. a) Utiliser la question précédente pour trouver un majorant de $\int_0^1 \big(\ln(1+x)\big)^2 dx$.

b) Calculer $\int_0^1 (\ln(1+x))^2 dx$ et vérifier la majoration précédente (on donne $\ln 2 \approx 0.69$).

4. On revient au cas général.
Quelles sont les fonctions pour lesquelles l'inégalité obtenue à la question 2.b) est une égalité ?

Solution de l'exercice 4.4

1. a) On développe l'intégrale positive et on obtient un trinôme du second degré en x, dont le discriminant Δ est négatif ou nul, puisque le trinôme reste positif pour tout réel x (intégrale sur $[a, b]$ d'une fonction continue positive).

b) Il y a égalité si, et seulement si, le discriminant est nul, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe x_0 tel que $\displaystyle\int_a^b (x_0 h(t) + k(t))^2 dt = 0$. La fonction en jeu étant continue et positive, cela entraîne qu'elle est identiquement nulle et donc que la famille des deux fonctions (h, k) est liée.

2. a) Si $x = a$, l'inégalité demandée est évidente. Or, f étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on peut écrire

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$$

puis on peut appliquer l'inégalité précédente aux fonctions $h : t \to f'(t)$ et $k : t \to 1$. On en déduit l'inégalité demandée.

b) Comme f'^2 est positive, on peut élargir l'inégalité précédente, soit :

$$(f(x) - f(a))^2 \leqslant (x - a) \int_a^b f'^2(t)dt$$

Il reste à intégrer cette inégalité sur l'intervalle $[a, b]$.

3. a) On choisit $a = 0, b = 1$ et $f : x \to \ln(1 + x)$ qui est bien C^1 sur $[0, 1]$. La question 2. b) donne alors

$$\int_0^1 (\ln(1 + x))^2 dx \leqslant \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{(1 + t)^2} = \frac{1}{4}$$

b) On fait une intégration par parties avec des fonctions C^1. Il vient :

$$\int_0^1 (\ln(1 + x))^2 dx = \left[(1 + x)\ln^2(1 + x)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \ln(1 + x)dx = 2\ln^2 2 - 2\int_0^1 \ln(1 + x)dx$$

Or

$$\int_0^1 \ln(1 + x)dx = \int_1^2 \ln(t)dt = [t\ln(t) - t]_1^2 = 2\ln 2 - 1$$

Finalement $\displaystyle\int_0^1 (\ln(1 + x))^2 dx = 2(\ln 2 - 1)^2 < \frac{1}{4}$, car $\ln 2 \approx 0.69$

4. La seule façon d'avoir l'égalité, c'est d'être dans le cas d'égalité de la première question, ce qui donne $f(x) = mx + p$ (avec l'argument de continuité de f' qui permet de passer de f'^2 à f'). On trouve ensuite, en remplaçant dans l'inégalité de 2. b), qu'il faut (et c'est bien sûr suffisant) que $m = 0$. Conclusion : seules les fonctions constantes donnent l'égalité.

Exercice 4.5

On pose pour tout x réel : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1 + t^2} dt$.

On rappelle que pour tout t réel, la dérivée de $t \longmapsto \text{Arctan}(t)$ est $t \longmapsto \dfrac{1}{1 + t^2}$.

1. Pour tout réel $t \in [0, 1]$, on considère la fonction g_t définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g_t(x) = e^{-x(1+t^2)}$$

a) Montrer que $\forall x \in [-\ln 2, \ln 2], |e^x - 1| \leqslant 2|x|$.

b) En déduire que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (on pourra étudier la limite de $f(x + h) - f(x)$ lorsque h tend vers 0).

c) Montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$\mathrm{e}^{-2x} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

On admet dans la suite de l'exercice que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x réel, on a :

$$f'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt$$

2. Pour tout x réel, on pose $u(x) = f(x^2)$ et $\varphi(x) = u(x) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt\right)^2$.
Montrer que la fonction φ est constante sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa valeur.

3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt$.

Solution de l'exercice 4.5

La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car on intègre une fonction continue sur le segment $[0, 1]$.
1. a) Pour démontrer ces inégalités, le plus simple est d'étudier la fonction $x \to \mathrm{e}^x - 1 - 2x$ sur $[-\ln 2, \ln 2]$.
b) On écrit :

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(x+h)(1+t^2)}}{1+t^2} dt - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \left(\mathrm{e}^{-h(1+t^2)} - 1\right) dt$$

Comme $1 + t^2 \in [1, 2]$, pour h assez petit ($|h| \leqslant \ln 2/2$), on a $|h(1+t^2)| \leqslant \ln 2$ et en appliquant la question précédente, on a :

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant 2|h| \int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)} dt = C_x |h|$$

Ceci montre que f est continue en x.
c) On utilise encore $1 + t^2 \in [1, 2]$ donc pour $x > 0$, $e^{-2x} \leqslant \mathrm{e}^{-x(1+t^2)} \leqslant e^{-x}$. On divise ensuite par une quantité strictement positive, puis on utilise la croissance de l'intégrale.
Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2. On calcule la dérivée de φ. D'abord celle de u :

$$u'(x) = 2xf'(x^2) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2 t^2} dt = -2\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-v^2} dv$$

Donc,

$$\varphi'(x) = u'(x) + 2\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt = 0$$

et $\varphi = C$. Comme $\varphi(0) = u(0) = f(0) = \pi/4$, il vient pour tout x réel $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

3. On fait tendre x vers $+\infty$. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, donc,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

d'où $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$. Par positivité de l'intégrale, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 4.6

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n = 2$. Un endomorphisme f non nul de E est dit *nilpotent* s'il existe un entier k tel que $f^k = 0$.

Si f est nilpotent, on appelle indice de nilpotence de f, le plus petit entier p tel que $f^p = 0$ (donc $f^{p-1} \neq 0$).

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente si l'endomorphisme canoniquement associé est nilpotent. On définit de même son indice de nilpotence.

1. Dans cette question, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on suppose que A n'est pas la matrice nulle.

a) Calculer $A^2 - (a + d)A$ en fonction de I_2 où I_2 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On suppose que A est nilpotente.

b) Montrer que $ad - bc = 0$.

c) Montrer que $a + d = 0$.

d) Déterminer l'indice de nilpotence de A.

2. Soit f un endomorphisme de E.
a) Montrer que si $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$, alors $f^2 = 0$.

b) Étudier la réciproque.

c) Soit f un endomorphisme nilpotent non nul de E. Donner la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ et celle de $\mathrm{Ker}(f)$.

3. Dans cette question, on suppose que f est un endomorphisme nilpotent et qu'il existe deux endomorphismes u et v de E non nuls et nilpotents tels que $f = u \circ v$.

a) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(u)$ et que $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(f)$.

b) En déduire que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(v)$.

c) Que peut-on en conclure ?

Solution de l'exercice 4.6

1. a) Un calcul élémentaire donne $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = 0$.

b) Si $ad - bc \neq 0$, la matrice A est inversible car $A \times \dfrac{1}{ad - bc}(A - (a + d)I_2) = I_2$. Or, si A est nilpotente, si p est son indice de nilpotence et si A^{-1} existe, alors :

$$0 = A^p \Rightarrow 0 = A^{-1}A^p = A^{p-1}$$

ce qui est absurde. Donc, $ad - bc = 0$.

c) On a donc $A^2 = -(a + d)A$ et par récurrence, pour tout $n \geqslant 2, A^n = (-1)^{n+1}(a + d)^n A$. Si $a + d \neq 0$, alors, comme $A \neq 0$, pour tout $n \geqslant 1, A^n \neq 0$ en contradiction avec la nilpotence de A. Donc $a + d = 0$.

d) On a donc $A^2 = 0$ et $p \leqslant 2$. Mais $p \neq 1$ puisque $A \neq 0$. Donc $p = 2$.

2. a) Comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$, alors pour tout $x \in E, f(f(x)) = 0$, donc $f^2 = 0$.

b) Réciproquement si $f^2 = 0$, pour tout $x \in E, f(f(x)) = 0$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

c) Le théorème du rang entraîne que $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{Ker}(f)$ et par les inclusions précédentes que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$. Chaque sous-espace est de dimension 1.

3. Les trois endomorphismes f, u et v sont nilpotents sur un espace de dimension 2. On a montré dans les questions précédentes qu'alors $f^2 = u^2 = v^2 = 0$ et que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(v)$.

a) Pour tout $x \in E$, $f(x) = u(v(x))$. Donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Aucun des trois endomorphismes n'étant nul, on a égalité dans les inclusions précédentes pour des raisons de dimension.

b) Et comme $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$, on a

$$\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$$

c) Pour tout $x \in E$, $u(v(x)) = 0$ par la question précédente et donc f est identiquement nul.
Il n'existe donc pas d'endomorphisme u, nilpotent non nul tel que $f = u \circ v$.

Exercice 4.7

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes suivant toutes la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ où n est un entier supérieur ou égal à 2.
On considère pour tout $\omega \in \Omega$,

$$T_n(\omega) = \inf\{m \geqslant 1 / \{X_1(\omega), \dots, X_m(\omega)\} = \{1, 2, \dots, n\}\},$$

le plus petit entier m tel que toutes les valeurs de 1 à n sont apparues parmi $X_1(\omega), \dots, X_m(\omega)$.

1. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On définit la variable aléatoire τ_k par :

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ \tau_k(\omega) = \inf\{m \geqslant 1\ /\mathrm{card}(\{X_1(\omega), \dots, X_m(\omega)\}) = k\}$$

En particulier, $\tau_n = T_n$.
Déterminer, pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, la loi de $\tau_k - \tau_{k-1}$.
On admet que les variables aléatoires $(\tau_k - \tau_{k-1})_{2\leqslant k\leqslant n}$ sont indépendantes.

On suppose désormais que l'entier n n'est plus fixé.

2. a) Calculer l'espérance de T_n.

On admet qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) = \gamma$$

b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{E(T_n)}{n \ln n}$

3. Calculer la variance de T_n et montrer qu'il existe un réel strictement positif a tel que $V(T_n) \leqslant an^2$.

4. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\left| \frac{T_n}{n \ln n} - 1 \right| > \varepsilon \right) = 0$.

Solution de l'exercice 4.7

1. On a $\tau_1 = 1$.
On peut modéliser notre problème (du collectionneur) de la manière suivante :
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en tire une avec remise et on note son numéro.
La variable aléatoire $(\tau_k - \tau_{k-1})$ représente le temps d'attente pour obtenir un numéro différent des $(k-1)$ numéros déjà obtenus. Ainsi la loi de cette variable aléatoire est une loi géométrique de paramètre $1 - (k-1)/n$ (temps d'attente du premier succès).

2. a) On a $\displaystyle T_n = \tau_1 + \sum_{k=2}^{n} (\tau_k - \tau_{k-1})$ et donc

$$E(T_n) = 1 + \sum_{k=2}^{n} E(\tau_k - \tau_{k-1}) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n}{n+1-k} = 1 + nH_{n-1}$$

où H_n est la somme partielle de la série harmonique ; $\displaystyle H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Or, on admet, on sait (ou on démontre...) que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

où γ est la constante d'Euler.

b) On a donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{E(T_n)}{n\ln n} = 1$.

3. On a, par indépendance admise :

$$V(T_n) = \sum_{k=2}^{n} V(\tau_k - \tau_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n} n\frac{k-1}{(n+1-k)^2} = \sum_{i=1}^{n-1} n\frac{n-i}{i^2} = n^2\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2}\right) - n\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\right).$$

On a donc $V(T_n) \leqslant n^2\dfrac{\pi^2}{6}$.

4. Utilisons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour $\varepsilon > 0$, on a

$$P\big(|T_n - E[T_n]| \geqslant \varepsilon n\log n\big) \leqslant \frac{V(T_n)}{(\varepsilon n\log n)^2} \leqslant \frac{a}{\varepsilon^2\log(n)^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

On utilise la question 2. b). Pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\{|T_n - n\log(n)| \geqslant 2\varepsilon n\log(n)\} \subset \{|T_n - E(T_n)| \geqslant \varepsilon n\log(n)\}$ pour n assez grand. Ceci montre que

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{T_n}{n\ln n} - 1\right| > \varepsilon\right) = 0$$

Exercice 4.8

Soient N un entier naturel non nul et $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. On suppose que toutes les variables aléatoires sont définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans $[\![0, N]\!]$.

Si Z est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, N]\!]$, on pose :

$$\forall\, s \in \mathbb{R},\ G_Z(s) = E(s^Z) = \sum_{k=0}^{N} P(Z = k)s^k$$

1. On suppose que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$. Déterminer G_X.

2. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![0, N]\!]$ et $G_X = G_Y$, alors X et Y suivent la même loi.

3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![0, N]\!]$.
Exprimer G_{X+Y} en fonction de G_X et G_Y.

4. Déterminer G_Y lorsque Y suit une loi binomiale de paramètres n et p.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner le développement limité à l'ordre n en 0 de $x \mapsto (1-x)^{-5}$ (on exprimera les coefficients à l'aide des coefficients binomiaux).

6. Un éleveur possède 5 lapines. Chacune des lapines engendre un nombre aléatoire de lapins. La lapine numéro i engendre X_i lapins. On suppose que $X_1, \ldots, X_5$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1, 7]\!]$. On note Z le nombre total de lapereaux.

a) Déterminer une expression simple de G_Z.

b) En déduire la probabilité que le nombre de lapereaux soit égal à 20.

Solution de l'exercice 4.8

1. Comme $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $G_X(s) = (1-p)s^0 + ps^1 = ps + 1 - p$.

2. En utilisant la formule de Taylor polynomiale, pour tout entier $n \in [\![0, N]\!]$, $P(X = n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.
Ainsi, si $G_X = G_Y$, les dérivées successives sont égales et X et Y ont même loi.

3. D'après l'indépendance, $P(X + Y = n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X = k)P(Y = n-k)$. Alors,

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(s) &= \sum_{n=0}^{2N}\left(\sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k)\right)s^n = \sum_{n=0}^{2N}\sum_{k=0}^{n}\left(P(X=k)s^k\right)\left(P(Y=n-k)s^{n-k}\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{N} P(X=k)s^k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{N} P(Y=k)s^k\right) = G_X(s)G_Y(s) \end{aligned}$$

On peut également utiliser l'indépendance des fonctions s^X et s^Y.

4. Comme Y est binomiale, il existe $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires de loi de Bernoulli telles que $Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. En utilisant la question précédente, $G_Y(s) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(s) = (ps + 1 - p)^n$.

5. D'après les développements limités classiques,

$$\begin{aligned} (1-x)^{-5} &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-5)(-5-1)\cdots(-5-k+1)}{k!}x^k + o(x^n) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+5-1)!}{4!k!}x^k + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{k+4}{k} x^k + o(x^n) \end{aligned}$$

6. a) En utilisant l'indépendance des (X_i) et les propriétés précédentes,

$$G_Z(x) = \left(\frac{x + \cdots + x^7}{7}\right)^5 = \frac{x^5}{7^5}(1-x^7)^5(1-x)^{-5}$$

b) En utilisant la formule du binôme et le développement limité précédent,

$$G_Z(x) = \frac{x^5}{7^5}\left(\sum_{k=0}^{5}(-1)^k\binom{5}{k}x^{7k}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{k+4}{k}x^k + o(x^n)\right).$$

On recherche le coefficient de x^{20} de G_Z et on obtient, en n'oubliant pas le x^5 en facteur :

$$\frac{\binom{19}{15} - 5\binom{12}{8} + 5\binom{5}{2}}{7^5}$$

Exercice 4.9

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2 fixé. On considère une variable aléatoire X_n telle que :

$$X_n(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n = k) = a_{k-1} - a_k$$

où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)^{n-1}$.

1. a) Montrer que, pour tout s fixé dans $\mathbb{N}^*$, la série $\sum\limits_k \left(\dfrac{1}{2^s}\right)^k$ est convergente.

b) En déduire que la série de terme général a_k est convergente.

c) Montrer que X_n admet une espérance et que $E(X_n) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$.

2. On admet qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = \gamma$$

a) Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g_n(u) = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^u}\right)^{n-1}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$a_k \leqslant \int_{k-1}^{k} g_n(u)du \leqslant a_{k-1}$$

b) En déduire, pour tout entier $q \geqslant 2$, un encadrement de $\displaystyle\int_0^q g_n(u)du \quad (*)$.

c) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - (1 - e^{-t})^n\big)dt$ converge. On note I_n cette intégrale.

d) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, calculer $I_{n+1} - I_n$. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

e) En effectuant le changement de variable, $t = u\ln 2$ dans l'intégrale de l'encadrement $(*)$, montrer que :

$$E(X_n) - 1 \leqslant \frac{I_{n-1}}{\ln 2} \leqslant E(X_n).$$

f) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{E(X_n)}{\ln n}$.

Solution de l'exercice 4.9

1. a) Soit $s \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a : $0 < \dfrac{1}{2^s} < 1$. Donc la série de terme général $(\dfrac{1}{2^s})^k$ est une série géométrique convergente.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$a_k = 1 - (1 - \frac{1}{2^k})^{n-1} = 1 - \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(\frac{-1}{2^k})^i = \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}(\frac{-1}{2^k})^i$$

Ainsi, a_k est la somme finie de termes généraux de séries absolument convergentes et est le terme général d'une telle série.

c) Soit $q > 1$. On a $\sum\limits_{k=1}^{q} k(a_{k-1} - a_k) = \sum\limits_{k=1}^{q}((k-1)a_{k-1} - ka_k) + \sum\limits_{k=1}^{q} a_{k-1} = -qa_q + \sum\limits_{k=0}^{q-1} a_k$.

On sait déjà que $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k$ converge.

De plus, $|qa_q| = \left|\sum\limits_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}(-1)^i\dfrac{q}{2^{qi}}\right| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}\dfrac{q}{2^q} \leqslant 2^{n-1}\dfrac{q}{2^q}$.

Donc $\lim\limits_{q\to+\infty} qa_q = 0$. La série de terme général $k(a_{k-1} - a_k)$ est absolument convergente et de somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$.

2. a) On a $g_n'(u) = -\ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^u (n-1)(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^u)^{n-2} < 0$. Donc g_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Le reste est classique.

b) On somme de $k = 1$ à $k = q$ pour obtenir $\sum\limits_{k=1}^{q} a_k \leqslant \int_0^q g_n(u)du \leqslant \sum\limits_{k=0}^{q-1} a_k$.

c) Soit n de $\mathbb{N}^*$. La fonction que l'on intègre est continue sur $\mathbb{R}_+$. On développe la puissance avec la formule du binôme. Il vient

$$1 - (1 - e^{-t})^n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} e^{-kt}$$

On obtient ainsi une somme finie de fonctions dont chacune admet une intégrale convergente.

d) Un calcul facile donne $I_{n+1} - I_n = \dfrac{1}{n+1}$. Donc

$$I_n = \sum_{k=1}^{n-1} (I_{k+1} - I_k) + I_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} + I_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

car $I_1 = 1$.

e) On a :

$$I = \int_0^q g_n(u)du = \int_0^q 1 - (1 - \frac{1}{2^u})^{n-1} du = \int_0^q 1 - e^{(n-1)\ln(1-\frac{1}{2^u})} du.$$

On pose $t = u \ln 2$. Donc $I = \dfrac{1}{\ln 2} \displaystyle\int_0^{q\ln 2} 1 - (1 - e^{-t})^{n-1} dt$. On fait tendre q vers $+\infty$ et on obtient, avec $a_0 = 1$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \leqslant \frac{I_{n-1}}{\ln 2} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \Leftrightarrow E(X_n) - a_0 \leqslant \frac{I_{n-1}}{\ln 2} \leqslant E(X_n) \Leftrightarrow 1 \leqslant \frac{\ln 2\ E(X_n)}{I_{n-1}} \leqslant 1 + \frac{\ln 2}{I_{n-1}}$$

Par le préambule de la question 2,

$$\lim_{n\to+\infty} (I_{n-1} - \ln(n-1)) = \gamma \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln 2 E(X_n)}{I_{n-1}} = 1$$

f) Finalement

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E(X_n)}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2}$$

Exercice 4.10

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on considère les ensembles suivants :

$$E_1(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ telles que } AM = M\}$$

$$E_2(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ telles que } A^2M = AM\}$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. a) Montrer que si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$.

b) Déterminer $E_1(A)$ lorsque $A - I$ est inversible.

3. On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de C.

b) Determiner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $C = PDP^{-1}$ (les coefficients diagonaux de D sont rangés dans l'ordre croissant).

4. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $N = P^{-1}M$.
a) Montrer que $M \in E_1(C)$ si et seulement si $N \in E_1(D)$.

b) Déterminer $E_1(D)$.

c) En déduire la dimension de $E_1(C)$.

Solution de l'exercice 4.10

1. Question élémentaire.

2. a) On a l'inclusion $E_1(A) \subseteq E_2(A)$. Si A est inversible, on multiplie par A^{-1} à gauche pour obtenir l'inclusion réciproque

b) On remarque que $M \in E_1(A) \Longleftrightarrow (A - I)M = 0$. Donc $A - I$ inversible $\Longrightarrow E_1(A) = \{0\}$.

3. a) Les valeurs propres de la matrice C sont $0, 1, 2$ de vecteurs propres associés $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) La matrice diagonale est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et la matrice P est constituée des vecteurs propres calculés précédemment.

4. a) On a :

$$CM = M \Leftrightarrow PDP^{-1}M = M \Leftrightarrow DP^{-1}M = P^{-1}M \Leftrightarrow DN = N$$

b) On pose : $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$. On a alors :

$$DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a' & b' & c' \\ 2a'' & 2b'' & 2c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a' & b' & c' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que $E_1(D)$ est un espace de dimension 3.

c) On vérifie que l'application $M \to N = P^{-1}M$ est un isomorphisme de $E_1(C)$ sur $E_1(D)$ (c'est implicitement fait dans la question 4. a). Ainsi $\dim E_1(C) = 3$.

Exercice 4.11

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire réelle. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle moment d'ordre n de X, le réel $m_n(X) = E(X^n)$, lorsque ce réel existe.
On note $M_X(t) = E(e^{tX})$ pour les réels t pour lesquels cette espérance existe.

1. Soit $\lambda > 0$.
a) Déterminer $M_X(t)$ lorsque X suit la loi de Poisson de paramètre λ.

b) Pour n entier supérieur ou égal à 1, soit $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre λ/n. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Déterminer $M_{S_n}(t)$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} M_{S_n}(t)$. Que constate-t-on ?

2. Déterminer $M_X(t)$ lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

3. a) Calculer $M_X(t)$ lorsque X suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

b) Dans cette question, X_n suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ et $Y_n = \dfrac{1}{n}X_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
Déterminer $M_{Y_n}(t)$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} M_{Y_n}(t)$. Que constate-t-on ?

Solution de l'exercice 4.11

1. a) Utilisons les définitions données. Pour tout réel t, on a :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = e^{-\lambda}\sum_{k\geqslant 0} e^{tk}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k\geqslant 0}\frac{(e^t\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda}\times e^{\lambda e^t}$$

b) On sait que S_n suit la loi binomiale de paramètres $(n, \lambda/n)$. Ainsi :

$$M_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk}\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \left(\frac{\lambda}{n}e^t + 1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$$

Ainsi, en utilisant un DL de la fonction ln à l'ordre 1, il vient :

$$M_{S_n}(t) = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{\lambda}{n}(e^t-1)\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\to} e^{\lambda(e^t-1)} = M_X(t)$$

2. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Alors :

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}e^{-t^2/2}dt = e^{x^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-x)^2/2}dt = e^{x^2/2}$$

3. a) Un calcul simple donne $E(e^{tX}) = \displaystyle\int_0^1 e^{tu}du = \frac{e^t-1}{t}$ avec prolongement par continuité en 0.

b) De nouveau, comme $Y_n(\Omega) = \{1/n, 2/n, \ldots, n/n\}$, on a :

$$M_{Y_n}(t) = E(e^{X_n/n}) = \sum_{k=1}^{n} e^{tk/n}P(X_n = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{tk/n} = \frac{1}{n}\ e^{t/n}\times\frac{e^t-1}{e^{t/n}-1} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{e^t-1}{t} = E(e^{tX})$$

Exercice 4.12

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}}$. Montrer que f est une densité (on pourra utiliser le changement de variable $u = e^{-x}$).

2. Soit X une variable aléatoire de densité f.
a) Déterminer la fonction de répartition F de X.

b) À l'aide d'un développement limité, déterminer un fonction h telle :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(X\geqslant x)}{h(x)} = 1.$$

3. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$ et $V = -\ln(-\ln U)$. Déterminer la loi de V.

4. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1. Déterminer pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\lim_{n\to+\infty} P(\max(Y_1,\ldots,Y_n) - \ln n \leqslant x)$$

Solution de l'exercice 4.12

1.) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et positive. Par abus d'écriture, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} e^{-e^{-x}} dx = [e^{-e^{-x}}]_{-\infty}^{+\infty} = 1.$$

On fera attention a effectuer le changement de variable sur une segment.

2.a) On détermine F_X en intégrant f. Il vient $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = e^{-e^{-x}}$.

b) Lorsque x tend vers $+\infty$, e^{-x} tend vers 0. Le développement limité de e^u en 0 est $e^u = 1 + u + o(u)$.

$$P(X \geqslant x) = 1 - F(x) = 1 - e^{-e^{-x}} = 1 - (1 - e^{-x} + o(e^{-x})) = e^{-x} + o(e^{-x})$$

On pose donc $h(x) = e^{-x}$.

3. On utilise la méthode de la fonction de répartition. On a $V(\Omega) = \mathbb{R}$ et pour tout x réel, on a :

$$P(V \leqslant x) = P(-\ln(-\ln(U)) \leqslant x) = P(-\ln(U) \geqslant e^{-x}) = P(\ln(U) \leqslant -e^{-x}) = P(U \leqslant e^{-e^{-x}}) = F(x)$$

Ainsi, V suit la loi de X.

4. Calculons la loi de $Z_n = \max(Y_1, \dots, Y_n)$ en utilisant la même méthode. On a $[Z_n \leqslant x] = \bigcap_{i=1}^{n} [Y_i \leqslant x]$ et par indépendance, il vient :

$$P([Z_n \leqslant x]) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i \leqslant x) = F_Y(x)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout réel x, pour n assez grand tel qu $\ln n + x > 0$, on a :

$$P(Z_n - \ln n \leqslant x) = P(Z_n \leqslant \ln n + x) = (1 - e^{-\ln(n) - x})^n = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n$$

Un dernier développement limité permet d'écrire :

$$\exp\left(n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left(-\frac{e^{-x}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \to e^{-e^{-x}}$$

Exercice 4.13

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent à *elles deux* 2 boules indiscernables. À chaque étape, on choisit de manière équiprobable un nombre de $[\![1, 2]\!]$.

- Si ce nombre est inférieur ou égal au nombre de boules contenues dans U_1, on prend une boule de U_1 que l'on met dans U_2.
- Si ce nombre est strictement supérieur au nombre de boules contenues dans U_1, on prend une boule de U_2 que l'on met dans U_1.

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note Z_p la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 à l'étape p. Ainsi Z_0 est la variable égale au nombre de boules initialement contenues dans U_1, Z_1 est la variable égale au nombre de boules contenues dans U_1 après une étape, etc.

1. On pose : $Y_p = \begin{pmatrix} P(Z_p = 0) \\ P(Z_p = 1) \\ P(Z_p = 2) \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $Y_{p+1} = AY_p$.

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

2. Montrer que 1 et -1 sont valeurs propres de A.

3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

4. On suppose $Y_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$. Pour tout $k \in [\![0, 2]\!]$, étudier l'existence d'une limite pour $P(Z_p = k)$ lorsque p tend vers $+\infty$.

Solution de l'exercice 4.13

1. Supposons qu'à l'étape p, U_1 contienne :
- 0 boule. À l'étape suivante, U_1 contiendra une boule.
- 1 boule. Au vu de l'expérience , à l'étape suivante U_1 contiendra 0 boule avec la probabilité $1/2$ et 2 boules avec la probabilité $1/2$, puisque la probabilité de choisir 1 est $1/2$ tout comme la probabilité de choisir 2.
- 2 boules. À l'étape suivante, U_1 contiendra une boule.

Appliquons la formule des probabilités totales ; pour $k \in [\![0, 2]\!]$:

$$P(Z_{p+1} = k) = P_{[Z_p=0]}(Z_{p+1} = k)P(Z_p = 0) + P_{[Z_p=1]}(Z_{p+1} = k)P(Z_p = 1) + P_{[Z_p=2]}(Z_{p+1} = k)P(Z_p = 2)$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} P(Z_{p+1} = 0) \\ P(Z_{p+1} = 1) \\ P(Z_{p+1} = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(Z_p = 0) \\ P(Z_p = 1) \\ P(Z_p = 2) \end{pmatrix}$$

Ceci correspond à la matrice A de la question suivante.

2. Par résolution de système linéaire : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$) est vecteur propre pour la valeur propre 1 (resp. -1).

3. Les lignes L_1 et L_3 de A sont égales, donc la matrice A n'est pas inversible et 0 est valeur propre de A.

Un calcul de vecteurs propres montre que $E_0 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, la matrice A est diagonalisable.

4. Pour tout p on a $Y_p = Y_0$, donc les suites à examiner sont constantes, donc convergentes.

Exercice 4.14

1. Déterminer les valeurs de x réel pour lesquelles la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ converge.

On note alors $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$. On admet que la fonction f est continue sur son domaine de définition D.

2. Montrer que la fonction f est décroissante sur D.

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

5. a) Soit $g : t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [k, k+1]$, on a : $g(k+1) \leqslant g(t) \leqslant g(k)$.

b) En déduire que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} \times \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t = 1$$

c) En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \times \sqrt{x} = C$, où C est une constante réelle strictement positive.

Solution de l'exercice 4.14

1. Pour $x > 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \dfrac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} = 0$; ceci montre que la série converge.

Autre idée : $0 \leqslant \dfrac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \leqslant (e^{-x})^n$ et la série géométrique majorante converge.

Pour $x \leqslant 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n \dfrac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} = +\infty$; ceci montre que la série diverge.
Autre idée : pour $x > 0$ la série diverge grossièrement et pour $x = 0$ c'est une série de Riemann divergente.
Le domaine de définition de la fonction f est donc $\mathbb{R}^{+*}$.

2. De manière évidente, pour tout $n \geqslant 1$, $x \leqslant y \Rightarrow e^{-nx} \geqslant e^{-ny}$. Donc, par sommation de quantités positives, on obtient : $f(x) \geqslant f(y)$.

3. Comme $n \geqslant 1$, on peut écrire : $0 < f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4. La limite en 0 est finie ou vaut $+\infty$, car f est décroissante.

Or, comme tous les termes de la série sont positifs, on a : $f(x) \geqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$.

Par l'absude si f convergeait, en passant à la limite, on aurait : $\forall N$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \geqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Ceci est absurde car les sommes partielles de la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ divergent vers $+\infty$.

Or, $\lim\limits_{x\to 0} g_N(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}$ qui est la somme partielle d'une série divergente.

Soit $A > 0$. Il existe N_0 tel que pour tout $N \geqslant N_0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} > 2A$ et donc un voisinage de 0 tel que pour x dans ce voisinage, $g_N(x) > A$. Donc, pour x dans ce voisinage, $f(x) > A$, ce qui est la définition de $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

5. a) Soit $x > 0$ fixé. La fonction $g : t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}$ est positive et décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Donc si $t \in [k, k+1]$, $g(k+1) \leqslant g(t) \leqslant g(k)$. Ainsi : $\displaystyle\int_k^{k+1} g(k+1)dt \leqslant \int_k^{k+1} g(t)dt \leqslant \int_k^{k+1} g(k)dt$.

b) La série $\sum g(k)$ étant convergente, toute comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)dt$, il vient :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} g(k) \leqslant \int_1^{+\infty} g(t)dt \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} g(k)$$

ou $f(x) - e^{-x} \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}\,dt \leqslant f(x)$. Par la question précédente, on obtient :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}\,dt} = 1 = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}\,dt}$$

par convergence de cette intégrale en 0.

c) Le changement de variable $u = xt$ qui est linéaire donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du = \frac{C}{\sqrt{x}}$$

Chapitre 5

Exemples de questions courtes

Soit l'application $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui, à toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe la matrice $\begin{pmatrix} -a & c \\ b & -d \end{pmatrix}$.

1. φ est-elle diagonalisable ?

2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ.

Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On suppose que A est définie positive, ce qui signifie qu'elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \ \ {}^tXAX > 0.$$

1. Montrer qu'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive telle que $B^2 = A$.
2. En déduire pour tout vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'inégalité

$$||X||^4 \leqslant < X, AX > \times < X, A^{-1}X > .$$

Soient A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n telles que A possède n valeurs propres distinctes. On suppose que $AB = BA$ et que $A^5 = B^5$. Montrer que $A = B$.

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, noté $\langle \ , \ \rangle$ et u et v deux vecteurs orthogonaux de normes 1. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \langle u, x \rangle v + \langle v, x \rangle u$$

On appelle trace de f la trace de la matrice de f dans une base quelconque.
Calculer $\mathrm{tr}(f)$.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et N l'application définie sur E par, pour tout $P \in E$

$$N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$$

1. Montrer que $N(P)$ est bien défini.
2. Montrer que $N(P) = 0$ entraîne $P = 0$.
3. Soit $\Phi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(P) = P(1)$.

Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $P \in E$

$$|\Phi(P)| \leqslant C \times N(P)$$

Soient $f \in \mathbb{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x)|dx$ converge. Soient $a > 0$ et $b > 0$.

1. Montrer l'existence et calculer $\displaystyle\lim_{u \to -\infty} \int_u^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x))\, dx$.

2. En déduire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{(1+a\mathrm{e}^x)(1+b\mathrm{e}^x)} dx$.

Soit $\sigma > 0$. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires positives, indépendantes et de même loi telles que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ E(X_k) = 1 \text{ et } V(X_k) = \sigma^2.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Z_n = \dfrac{2}{\sigma}\big(\sqrt{S_n} - \sqrt{n}\big)$.
Montrer que la suite (Z_n) converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

On considère deux variables aléatoires X, Y non nulles, définies sur le même espace probabilisé, admettant chacune un moment d'ordre 2 . On note

$$M(X, Y) = \begin{pmatrix} V(X) & \mathrm{cov}(X, Y) \\ \mathrm{cov}(X, Y) & V(Y) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les valeurs propres de $M(X, Y)$ sont positives ou nulles.

2. Que peut t-on dire de X, Y si $M(X, Y)$ n'est pas inversible ?

Soient $p \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $q = 1 - p$. Soient trois variables aléatoires X, Y, Z définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui sont indépendantes, de lois respectives $\mathcal{B}(n, p)$, $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(n, q)$.
On définit la matrice aléatoire M par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ 0 & Z(\omega) \end{pmatrix}$$

Calculer la probabilité que la matrice M soit diagonalisable.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Une famille d'événements $(A_n)_{n \geqslant 1}$ est appelée *quasi-complète* si :

- les événements (A_i) sont deux à deux incompatibles ;
- $P\left(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = 1$.

La formule des probabilités totales est-elle vérifiée par une famille quasi-complète d'événements ?