



Thème : Intégrales de Wallis et formule de Stirling



» ♦ Reprendre le sujet 0 de Ecrimage, ou le problème EDHEC 2018.

Exercice 1. ♦♦ Une démonstration probabiliste de la formule de Stirling

D'après HEC maths 2 2017, voie S # CVAp1

Dans tout le problème :

- toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$;
- on note θ un paramètre réel.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit h_n la fonction définie par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad h_n(x) = ((1-x)e^x)^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_0^1 h_n(x) dx$.

1. a) À l'aide du changement de variable $u = n(1-x)$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{e^n}{n^{n+1}} \int_0^n u^n e^{-u} du$.

- b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $x + \ln(1-x) \leq -\frac{x^2}{2}$.

- c) En se référant à une densité de la loi normale centrée réduite, en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

2. On note h_n^* la restriction à l'intervalle $]0, 1[$ de la fonction h_n .

On pose pour tout $x \in]0, 1[$:

$$h_n^*(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2} H(x)\right) \quad \text{et} \quad g(x) = (1-x) \ln(1-x) + x - \frac{x^2}{2}.$$

- a) Montrer que H est prolongeable par continuité en 0. On note encore H la fonction ainsi prolongée.

- b) Montrer que la fonction g est convexe et strictement positive sur $]0, 1[$.

- c) En déduire que la fonction H réalise une bijection strictement croissante de $]0, 1[$ sur $[1, +\infty[$.

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite convergente de limite nulle telle que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \sqrt{n} = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n < 1$.

- a) Donner un exemple d'une telle suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- b) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = H(u_n)$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

- c) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement : $I_n \geq \int_0^{u_n} h_n(x) dx \geq \frac{1}{\sqrt{nv_n}} \int_0^{u_n \sqrt{nv_n}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$.

- d) Déduire des questions 1.c) et 3.c), un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$.

- a) Rappeler la loi suivie par la variable aléatoire S_n et montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([S_n \leq n]) = \frac{1}{2}$.

- b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $U_n = \frac{T_{n+1}}{\sqrt{n}}$. Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la constante 0.

- c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([S_{n+1} \leq n]) = \frac{1}{2}$.

5. Montrer que $n! \sim_{n \rightarrow +\infty} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ (formule de Stirling).

» La partie II est intéressante sur la somme de loi de Cauchy.