



## Thème : Projection et minimisation par projection orthogonale



### Exercice 1. ♦

On considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est :

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Montrer que  $f$  est un projecteur orthogonal dont on précisera les éléments caractéristiques.

### Exercice 2. ♦

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

Montrer que  $f$  est un projecteur si et seulement si  $f$  est diagonalisable et  $\text{Sp}(f) \subset \{0; 1\}$ .

### Exercice 3. ♦♦

d'après EDHEC 1999

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on considère les fonctions réelles  $f_0, f_1, \dots, f_n$  définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_0(x) = e^{-x} \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_k(x) = x^k e^{-x}.$$

On appelle  $E_n$  l'espace vectoriel engendré par la famille  $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ . On note  $d$  l'application qui à toute fonction de  $E_n$  associe sa fonction dérivée.

### Partie 1

- Montrer que la famille  $(f_0, f_1, \dots, f_n)$  est une base de  $E_n$ .
- Calculer  $d(f_0)$ , puis montrer que :  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, d(f_k) = k f_{k-1} - f_k$ .
  - Montrer que  $d$  est un endomorphisme de  $E_n$ .
- Vérifier que  $d$  est un automorphisme de  $E_n$  (c'est-à-dire un endomorphisme bijectif).
  - Justifier que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad d\left(\frac{1}{k!} f_k\right) = \frac{1}{(k-1)!} f_{k-1} - \frac{1}{k!} f_k.$$

- En déduire, pour tout  $j$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , l'expression de  $d^{-1}(f_j)$  dans la base  $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ .
- Utiliser la question précédente pour montrer que, pour tout entier naturel  $j$ , l'intégrale

$$I_j = \int_0^{+\infty} x^j e^{-x} dx$$

converge, puis donner sa valeur en fonction de  $j$ .

- Montrer que l'application qui à tout couple  $(f, g)$  de  $E_n$  associe :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^x dx$$

est un produit scalaire sur  $E_n$ .

Pour tout  $f$  de  $E_n$ , on note désormais  $\|f\|$  la norme de  $f$ .

### Partie 2

- On pose  $E_{n-1} = \text{vect}(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ .
  - Rappeler le théorème qui assure l'existence d'un unique élément  $h$  de  $E_{n-1}$  vérifiant :

$$\|f_n - h\| = \inf_{g \in E_{n-1}} \|f_n - g\|.$$

On pose désormais  $h = - \sum_{j=0}^{n-1} a_j f_j$ .

**b)** Pour tout  $k$  de  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , rappeler pourquoi  $f_n - h \perp f_k$ .

**c)** En déduire que pour tout  $k$  élément de  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$  :  $\sum_{j=0}^{n-1} a_j (j+k)! + (k+n)! = 0$ .

**2.** On considère la fonction  $P$  définie pour tout  $x$  réel par :

$$P(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j (x+1) \dots (x+j) + (x+1)(x+2) \dots (x+n).$$

**a)** Vérifier que :  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P(k) = 0$ .

**b)** En déduire explicitement  $P$ , puis vérifier que  $P(n) = n!$ .

**3. a)** Montrer que  $\|f_n - h\|^2 = \langle f_n - h, f_n \rangle$ .

**b)** En déduire la valeur de  $m = \inf_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \left( x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k \right)^2 e^{-x} dx$ .

#### Exercice 4. ♦♦♦ Loi du khi deux et algèbre

*D'après l'oral de l'ESCP*

**1.** Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

**a)** Reconnaître la loi de  $X^2/2$ , en déduire la loi de  $Y = X^2$ .

**b)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(X_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$  une famille de  $n$  variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale centrée réduite et  $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i^2$ . Déterminer la loi de  $Y_n$  ainsi que son espérance et sa variance sous réserve d'existence.

On dit que  $Y_n$  suit une loi du khi deux à  $n$  degrés de liberté.

**2.** On considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est :

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Montrer que  $f$  est un projecteur orthogonal dont on précisera les éléments caractéristiques.

**3.** Un point  $M$ , extrémité d'un vecteur  $V$ , se déplace de façon aléatoire dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ .

$\mathbb{R}^3$  est muni de sa structure euclidienne canonique et on note  $\|\cdot\|$  la norme associée.

Les coordonnées  $X_1, X_2, X_3$  de  $M$  sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi normale centrée réduite.

**a)** Quelle est la loi de la variable aléatoire  $\|V\|^2$  ?

**b)** Soit  $\mathcal{P}$  le plan d'équation :  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ . On note  $D$  la variable aléatoire égale au minimum de la distance de  $M$  au plan  $\mathcal{P}$ . C'est-à-dire,

$$D = \min_{V' \in \mathcal{P}} \|V - V'\|.$$

Vérifier qu'une densité de  $D$  est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_D(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-t^2/2) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t).$$

**c)** Quelle est, en moyenne, la distance de ce point au plan ?

