



Thème : Entropie



Exercice 1. ♦♦ La notion d'entropie est centrale en théorie de l'information. Cette notion est due en grande partie au mathématicien américain Claude Shannon (1916-2001) et l'on parle souvent d'entropie de Shannon. Ce sujet propose de trouver des conditions pour majorer l'entropie de Shannon et de préciser les cas d'égalité dans le cadre des variables finies, des variables infinies dénombrables, puis à densité.

Dans la suite, on définit sur $\mathbb{R}^+$ la fonction h par

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ -x \ln(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction h est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Partie A. Cas fini

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé Ω fini. On note x_i avec $i = 1, \dots, n$ les valeurs prises par la variable X , c'est-à-dire que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. On définit l'entropie de X par :

$$H(X) = \sum_{i=1}^n h(p_i) \quad \text{où } \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad p_i = \mathbf{P}(X = x_i).$$

1. Exemples.

1. Soit $p \in [0; 1]$. Vérifier que lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $H(X) = h(p) + h(1-p)$.
2. Pour quelle valeur du paramètre p , l'entropie d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(p)$ est-elle maximale?
- b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et U une variable de loi uniforme $\llbracket 1; n \rrbracket$. Déterminer $H(U)$.

2. Python

Recopier et compléter le programme ci-contre qui prend en entrée une matrice ligne P contenant les valeurs p_i et renvoie l'entropie associée à la variable X .

3. Minoration.

Démontrer que $H(X) \geq 0$ pour toute variable aléatoire X avec $H(X) = 0$ si et seulement si X est une variable aléatoire presque sûrement constante.

4. Majoration.

Editeur

```
def entropie( ... ) :
    H=0
    n= ...
    for i ...
        H= ...
    return H
```

- a) Justifier que $-x \ln x \leq 1 - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.
- b) En déduire que pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$: $(-np_k) \ln(np_k) \leq 1 - np_k$, puis,

$$H(X) \leq H(U) \quad \text{où } U \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket).$$

Vérifier qu'il y a égalité si et seulement si X suit une loi uniforme.

Partie B. Entropie pour des variables aléatoires discrètes.

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On note $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}^*\}$. On définit, sous réserve de convergence absolue, l'entropie de X par :

$$H(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} h(p_i) \quad \text{où } \forall i \in \mathbb{N}^* \quad p_i = \mathbf{P}(X = x_i) > 0.$$

5. Dans cette question, on suppose que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance. C'est-à-dire, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} np_n$ est absolument convergente. On souhaite prouver que X admet une entropie.

- a) Justifier que

$$np_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{p_n} \ln(p_n)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

b) En déduire, l'existence d'un réel positif M tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |np_n| \leq M \quad \text{et} \quad \left| \sqrt{p_n} \ln(p_n)^2 \right| \leq M.$$

c) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|p_n \ln(p_n)| \leq \frac{1}{2} \cdot np_n + \frac{p_n \ln(p_n)^2}{2n} \leq \frac{1}{2} \cdot np_n + \frac{M^{3/2}}{2n^{3/2}}.$$

d) À l'aide de l'inégalité précédente, justifier l'existence de l'entropie de X .

6. Exemple.

Vérifier que si la variable G suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$,

$$H(G) = -\frac{1-p}{p} \ln(1-p) - \ln(p) = \frac{1}{p} (h(p) + h(1-p)) \quad \text{puis} \quad H(G) \leq \ln(2)E(G).$$

7. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $E(X) = E(G)$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $q_k = P(X = k)$ et on supposera $q_k > 0$. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\ln(p_k) - \ln(q_k) \leq \frac{p_k - q_k}{q_k}.$$

On pourra utiliser le fait que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$, puis établir $H(X) \leq H(G)$ avec égalité si, et seulement si, X suit la même loi que G .

Partie C - le cas des variables à densité

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des densités de probabilités f continues sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et telles que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} h(f(x)) dx$ soit convergente. Pour toute variable aléatoire X ayant pour densité un élément f de $\mathcal{F}$, on définit l'entropie $H(X)$ de X par :

$$H(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(f(x)) dx.$$

8. Exemple 1 : cas des lois normales

Soit Y_0 une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Montrer que $H(Y_0)$ existe et calculer $H(Y_0)$.

9. Exemple 2 : cas des lois exponentielles

Soit X_0 une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. Vérifier qu'il existe f , une densité de X_0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(f(x)) = -\ln(\lambda) f(x) + \lambda x f(x).$$

10. Montrer que $H(X_0)$ existe et calculer $H(X_0)$ en fonction de λ .

11. Majoration

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$, admettant une densité g . On suppose que $H(X)$ existe et que X admet une espérance égale à $\frac{1}{\lambda}$. Montrer que :

$$H(X_0) = - \int_0^{+\infty} g(x) \ln(f(x)) dx.$$

En utilisant le fait que pour tout $u > 0$, $\ln(u) \leq u - 1$ montrer que $H(X) \leq H(X_0)$.

» Pour aller plus loin, on pourra consulter le sujet HEC 2012

Exercice 2. ♦♦♦ Entropie dans le cas discret et optimisation sous contrainte

Soit h_1 la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$h_1(x) = \begin{cases} -x \ln x & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Vérifier que h_1 est continue sur $[0; 1]$ et donner son graphe.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et Y , une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ avec $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$. On note pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $p_k = P(Y = y_k)$, puis on définit l'entropie de Y par

$$H(Y) = \sum_{k=1}^n h_1(p_k).$$

2. Calculer l'entropie d'une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$.

3. Pour quelle valeur du paramètre p , l'entropie d'une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ est maximale?

4. L'objectif de la suite est de déterminer parmi les variables aléatoires prenant n valeurs distinctes, celles qui maximise l'entropie. Pour cela, on définit la fonction h_n sur l'ouvert $]0;1[^n$ par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in]0;1[^n, \quad h_n(x) = \sum_{k=1}^n h_1(x_k).$$

- a) Justifier que h_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;1[^n$ et expliciter son gradient ∇h_n et sa matrice hessienne $\nabla^2 h_n$.
 - b) Vérifier que la fonction h_n admet un unique point critique a sous la contrainte $\sum_{k=1}^n x_k = 1$.
 - c) Soit $x \in]0;1[^n$ tel que $\sum_{k=1}^n x_k = 1$ et notons $h = x - a$. Vérifier que, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $a + th \in]0;1[^n$.
On note alors ψ la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $\psi(t) = h_n(a + th)$.
 - d) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 pour ψ entre les points 0 et 1, montrer que h_n admet en a un maximum global sous la contrainte $x_1 + \dots + x_n = 1$. Ce maximum est-il atteint en d'autres points que a ?
5. Parmi les variables aléatoires prenant n valeurs (chacune avec une probabilité non nulle), quelles sont les lois de celles qui ont la plus grande entropie?