



Thème : Diagonalisation



Exercice 1. ♦♦ Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on définit $\Phi(P) = Q$, où

DA60

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = P(x+2) - P(x+1).$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ .
3. Simplifier Φ^{n+1} et $\Phi^n(x^n)$. En déduire une base dans laquelle la matrice de Φ est triangulaire inférieure avec la deuxième diagonale composée uniquement de 1.
4. Montrer que $\text{id}_{\mathbb{R}_n[x]} - \Phi$ est un automorphisme et donner son application réciproque.

Exercice 2. ♦♦ **Exemple en dimension infinie**

VP61

On note E l'espace vectoriel réel des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ définies sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit l'application φ de E dans E par :

$$\varphi(f) = g \quad \text{où} \quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad g(x) = x f'(x).$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E .
2. Est-il injectif? Préciser le noyau de φ . Est-il surjectif?
3. Déterminer le spectre de φ .
On pourra étudier $h : x \mapsto x^{-\lambda} f(x)$ où f est une fonction propre associée à la valeur propre λ .

Exercice 3. ♦♦

d'après Orlaux ESCP 2001, n17 # DA61

Soient A et B les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser dans une base orthonormée.
2. Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient toutes deux diagonales.
3. Soit F l'application définie sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par, pour tout $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$F : X \mapsto AX - XB.$$

- a) Montrer que l'application F est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- b) Soit U un vecteur colonne propre de A et V un vecteur colonne propre de B . Calculer $F(U^t V)$.
- c) F est-elle un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
- d) F est-elle diagonalisable?

Exercice 4. ♦♦ **Partie I : Étude du polynôme minimal**

DAp3

- **Préliminaires - propriété du polynôme minimal**

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. En considérant la famille $(I_n, M, M^2, \dots, M^p)$ pour un entier p bien choisi, justifier l'existence d'un polynôme P non nul tel que $P(M) = 0_n$.

On appelle polynôme minimal de M un polynôme π de $\mathbb{R}[x]$ de coefficient dominant 1, tel que $\pi(M) = 0$ et pour tout $P, P \in \mathbb{R}[x]$, non nul, vérifiant $P(M) = 0_n$, on a π divise P . Grâce à la question précédente, on montre qu'un tel polynôme existe. De plus, on montre que le degré de π est le minimum des degrés des polynômes annulateurs de M non nuls.

2. Justifier l'unicité du polynôme minimal de M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans la suite, on le note π_M .
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si λ est une racine de π_M , alors λ est une valeur propre de M .
On pourra commencer par écrire $\pi_M(x) = (x - \lambda)Q(x)$ et raisonner par l'absurde.

- **Exemple de polynôme minimal - informatique**

4. On considère la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

À l'aide du code Python suivant, donner le polynôme minimal pour M. Justifier.

Editeur	<pre>import numpy as np M=np.array ([[7,10,0], [-3,-4,0], [0,0,2]]) print(np.dot(M,M)-3*M)</pre>	Console	<pre>[[-2 0 0] [0 -2 0] [0 0 -2]]</pre>
----------------	--	----------------	--

- *Polynôme minimal d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec n valeurs propres*
On se place pour la prochaine question dans le cas où M admet exactement n valeurs propres distinctes.
- 5. a) Montrer que M est semblable à une matrice diagonale D.
b) En déduire que

$$\pi_M = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(M)} (x - \lambda).$$

Partie II : application à une variante du crochet de Lie

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = AM - MB.$$

On suppose de plus que A a exactement n valeurs propres distinctes.

- *On suppose dans cette question et la suivante que A et B ont une valeur propre commune notée λ .*
- 6. Justifier l'existence de Y et Z, deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que

$$AY = \lambda Y \quad \text{et} \quad {}^t BZ = \lambda Z.$$

- 7. a) Prouver que $Y {}^t Z$ est un élément non nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Simplifier $f(Y {}^t Z)$. En déduire que f n'est pas un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- *On suppose dans les trois prochaines questions que f n'est pas un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

- 8. a) Justifier qu'il existe $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que : $f(M_0) = 0_n$.
b) Pour $k \in \mathbb{N}$, prouver que : $A^k M_0 = M_0 B^k$. En déduire que pour tout polynôme P, on a :

$$P(A)M_0 = M_0 P(B).$$

- 9. Soit π_A le polynôme minimal de A. Que peut-on dire de $\pi_A(A)$? En déduire que $\pi_A(B)$ n'est pas inversible.
- 10. Dans cette question, on veut montrer que A et B ont une valeur propre commune. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant donc que A et B n'ont aucune valeur propre en commun. D'après la question 33, le polynôme π_A peut se factoriser sous la forme

$$\pi_A(x) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (x - \lambda).$$

- a) Que dire de l'inversibilité des matrices $(B - \lambda I_n)$?
b) Conclure.
- 11. Démontrer que f est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si A et B n'ont aucune valeur propre en commun.
- 12. a) Montrer que pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $(f - \mu \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})(M) = (A - \mu I)M - MB$.
b) En déduire que μ est une valeur propre de f si et seulement si, il existe α valeur propre de A et β valeur propre de B telles que :

$$\mu = \alpha - \beta.$$

Exercice 1

1. Vérifier que pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\Phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda \Phi(P) + \mu \Phi(Q)$$

Vérifier ensuite que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[x]$. Ainsi Φ est un endomorphisme.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[x]$ avec $\Phi(P) = \lambda P$. D'où

$$P(x+2) - P(x+1) = \lambda P(x) \quad (\bullet)$$

or si P est non nul de degré n , $P(x) = \alpha x^n + R(x)$ avec $\deg R < n$, il vient

$$P(x+2) - P(x+1) = x((x+2)^n - (x+1)^n) + R(x+2) - R(x+1)$$

et avec la formule du binôme de Newton

$$\begin{aligned} (x+2)^n - (x+1)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2^{n-k} x^k - x^k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (2^{n-k} x^k - x^k). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\deg(P(x+2) - P(x)) < n.$$

En revenant à l'égalité $(\bullet)$, on a donc nécessairement (P est non nul), $\lambda = 0$. Et effectivement si P est un polynôme constant non nul, $(\bullet)$ est vraie.

Finalement, seul 0 est valeur propre de Φ .

On peut aussi regarder la matrice de φ dans la base canonique et constater qu'elle est triangulaire avec que des 0 sur la diagonale.

3. On vient de voir que pour $P \in \mathbb{R}_n[x]$, $\Phi(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$. Plus généralement pour $k \in [0; n]$, on a par récurrence

$$\Phi^k(P) \in \mathbb{R}_{n-k}[x] \quad \text{si } P \in \mathbb{R}_n[x].$$

et si P est constant $\Phi(P) = 0$.

Dès lors, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, $\Phi^{n+1}(P) = 0$. Autrement dit Φ^{n+1} est l'application nulle.

Vérifier que la famille

$$(x^n, \Phi(x^n), \Phi^2(x^n), \dots, \Phi^n(x^n))$$

est une famille de polynômes échelonnée en degré, elle est donc libre. Comme elle contient autant de vecteurs que la dimension de $\mathbb{R}_n[x]$, c'est une base. La matrice de φ dans cette base est solution.

4. La matrice de $(I - \Phi)$ dans la même base que précédemment est triangulaire inférieure avec des « 1 » sur toute la diagonale. La matrice est donc inversible, $I - \Phi$ est bijective. Comme I commute avec Φ :

$$\begin{aligned} (I - \Phi) \cdot \sum_{k=0}^n \Phi^k &= \sum_{k=0}^n (I - \Phi) \circ \Phi^k = \sum_{k=0}^n \Phi^k - \Phi^{k+1} \\ &= I - \Phi^{n+1} \\ &= I. \end{aligned}$$

On retrouve le fait que $I - \Phi$ est bijective et

$$(I - \Phi)^{-1} = \sum_{k=0}^n \Phi^k.$$

Exercice 3

1. a) b) On peut évidemment chercher les éléments propres de A et B par la technique habituelle du pivot de Gauss. On peut aussi remarquer que :

$$\star A = -I + 2 \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = -I + 2J.$$

La matrice J vérifie $J^2 = J$, donc est une matrice de projecteur (non dégénéré). Ses valeurs propres sont 0, de sous-espace propre associé le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z = 0$ et 1, de sous-espace propre associé la droite $\mathcal{D}$ dirigée par le vecteur $(1, 1, 1)$.

Par conséquent les valeurs propres de A sont -1 et 1 , avec :

$$E_{(-1)}(A) = \mathcal{P}; E_{(1)}(A) = \mathcal{D}$$

$\star$ On a $B^2 = B$, donc B représente aussi un projecteur (non dégénéré) et ses valeurs propres de sont 0 et 1, avec :

$$\begin{aligned} E_{(0)}(B) &= \text{Ker } B \text{ est la droite } \mathcal{D}' \text{ dirigée par } (1, -2, 1); \\ E_{(1)}(B) &\text{ est le plan } \mathcal{P}' \text{ d'équation } x - 2y + z = 0. \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{D}' \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}'$, les vecteurs $(1, 1, 1)$ et $(1, -2, 1)$ sont propres à la fois pour A et B et on complète avec le vecteur $(1, 0, -1)$ qui appartient à $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$, ce qui donne une base orthogonale propre à la fois pour A et B .

En normant ces vecteurs, on prend donc : $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

et

$$P^{-1}AP = \text{diag}(-1, -1, 1); P^{-1}BP = \text{diag}(0, 1, 1)$$

2. a) Il est clair que pour tout $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $F(X) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. La linéarité de F résulte de la distributivité du produit sur l'addition.

b) Si $AU = \lambda U$ et $BV = \mu V$, alors $U^t V \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et ${}^t V B = \mu {}^t V$ (car B est symétrique), d'où :

$$F(U^t V) = AU^t V - U^t V B = \lambda U^t V - \mu U^t V = (\lambda - \mu)U^t V$$

Ainsi cette matrice est vecteur propre de F associée à la valeur propre $\lambda - \mu$.

c) La valeur propre 1 étant commune à A et B , F admet 0 comme valeur propre et n'est donc pas inversible.

d) A et B admettent une base orthonormée commune de vecteurs propres (U_1, U_2, U_3) . Par la question précédente, les 9 matrices $U_i^t U_j$ ($1 \leq i, j \leq 3$) sont des vecteurs propres de F .

Montrons qu'elles forment une famille libre.

Supposons que $\sum_{1 \leq i, j \leq 3} \lambda_{i,j} U_i^t U_j = 0$. En multipliant à droite par U_k et en remarquant que la famille est orthonormée (donc ${}^t U_k U_k = \|U_k\|^2 = 1$ et ${}^t U_j U_k = 0$ lorsque $k \neq j$), il vient :

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_{i,k} U_i = 0$$