



Thème : Polynômes orthogonaux



>> ♦♦ Voir les polynômes de Tchebychev de seconde espèce, EML 2005

AB66

Exercice 1. ♦♦ Un exemple

On pose $A(x) = x^2 - 1$, $B(x) = 2x$.

1. On considère l'application $\Phi : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ définie par :

$$\Phi(P) = AP'' + BP'.$$

- a) Montrer que, pour tout entier n , la restriction, notée Φ_n de Φ à $\mathbb{R}_n[x]$, définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
- b) Montrer brièvement que :

$$(P, Q) \mapsto \langle P(x), Q(x) \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$. Vérifier que $\langle xP(x), Q(x) \rangle = \langle P(x), xQ(x) \rangle$.

- 2. a) Justifier que l'endomorphisme Φ_n est symétrique.
- b) Écrire la matrice de $\Phi_n : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$ dans la base canonique $(1, x, \dots, x^n)$ et en déduire les valeurs propres de Φ_n .
- c) Montrer qu'il existe une unique base orthonormée $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$ formée de vecteurs propres de Φ_n unitaires tels que $\deg P_k = k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
- d) Est-ce que cette base est unique?
- e) Montrer que si $i \neq k$ alors $\langle P_i, P_k \rangle = 0$. En déduire que P_n est dans l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
- f) Expliciter les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3 , puis déterminer leurs racines.

>> ♦♦♦ Reprendre les DS 4 et 8 de cette année pour d'autres exemples.