



Thème : Chaînes de Markov



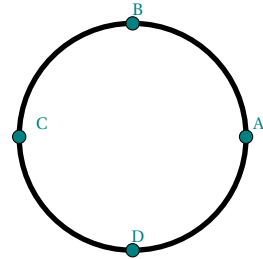
Exercice 1. ♦

RVA65

Un pion se déplace sur les 4 points $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, 0)$ et $D = (0, -1)$ du cercle trigonométrique selon la règle suivante. Au top d'horloge n , le pion

- reste sur le point où il se trouve avec une probabilité $1/2$;
- se déplace sur l'un des deux points voisins avec une probabilité $1/4$ pour chacun d'eux.

Au top 0, le pion est en A. On introduit les événements :

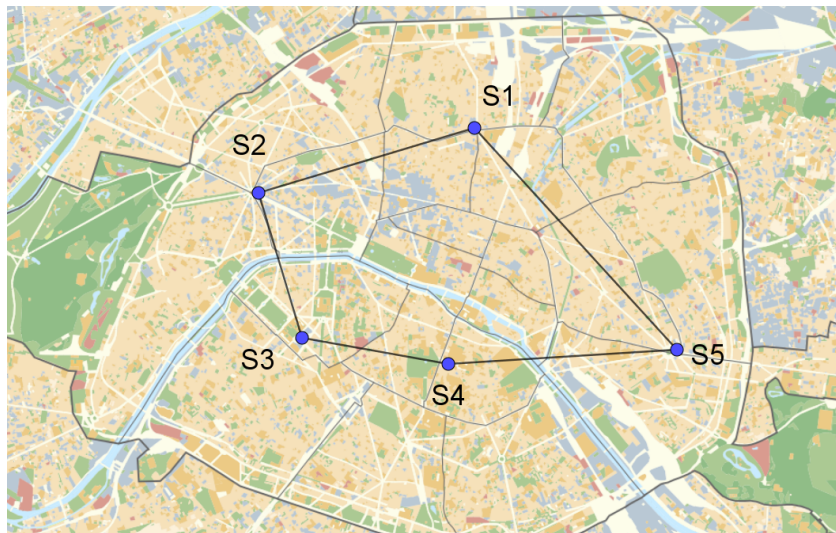


- A_n : « le pion est sur A au top n »;
- B_n : « le pion est sur B au top n »;
- C_n : « le pion est sur C au top n »;
- D_n : « le pion est sur D au top n »;

On note $a_n = \mathbf{P}(A_n)$, $b_n = \mathbf{P}(B_n)$, $c_n = \mathbf{P}(C_n)$, $d_n = \mathbf{P}(D_n)$ et $X_n = {}^t[a_n \quad b_n \quad c_n \quad d_n]$.

1. Trouver une matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Déterminer J telle que $A = \frac{1}{2}(I_4 + \frac{1}{2}J)$. On pose $K = \frac{1}{2}J^2$. Calculer KJ .
3. Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(I_4 + \frac{1}{2}J)^n = I_4 + u_n J + v_n K$.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + v_n$. Quel type usuel de suite reconnaît-on? Calculer w_n . En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n et v_n .
5. Conclure en exprimant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n , b_n , c_n et d_n .

Exercice 2. ♦ Milhan et Robin ont rendez-vous sur Paris dans un des cinq sites S_1 , S_2 , S_3 , S_4 et S_5 et reliés par des routes, comme l'illustre le schéma ci-dessous. Ils arrivent au rendez-vous à l'heure prévue, mais suite à un malentendu, Milhan se présente au site S_1 et Robin au site S_2 . # RVA66



Ils décident alors de partir à la recherche l'un de l'autre. Ils empruntent les différentes routes, avec les règles suivantes :

- à partir d'un site, chacun choisit de se rendre sur l'un des deux sites voisins, les deux possibilités étant équiprobables;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément;
- tous les choix de déplacement se font indépendamment les uns des autres. Ils continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes).
- Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus.

Dans la suite, on introduit les événements :

- A_n : « Milhan et Robin sont sur le même site après le n -ème déplacement »
- B_n : « Milhan et Robin sont sur des sites adjacents après le n -ème déplacement »
- C_n : « Milhan et Robin sont à deux routes de distance après le n -ème déplacement »

On note alors $a_n = \mathbf{P}(A_n)$, $b_n = \mathbf{P}(B_n)$, et $c_n = \mathbf{P}(C_n)$.

1. Python

- a) Écrire un programme qui prend en argument un entier i de $\llbracket 1;5 \rrbracket$ et renvoie un autre entier j de $\llbracket 1;5 \rrbracket$ qui simule un déplacement du sommet i vers le sommet j .
- b) En déduire un programme qui renvoie le nombre de déplacements avant que Milhan et Robin ne se retrouve pour la première fois.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}c_n, \quad b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n.$$

3. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+2} = \frac{5}{4}c_{n+1} - \frac{5}{16}c_n$.

4. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \alpha = (5 + \sqrt{5})/8 \\ \beta = (5 - \sqrt{5})/8 \end{cases}$$

5. Vérifier la convergence et l'égalité $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\alpha - \beta}{(1 - \beta)(1 - \alpha)} \right) = 4$.

On pourra simplifier les calculs en introduisant le polynôme $P(x) = x^2 - 5/4x - 5/16$ dont les racines sont α et β .

6. En déduire que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

7. Justifier que Milhan et Robin se retrouvent presque sûrement.

Exercice 3. ♦♦♦ Probabilité et élections

RVA67

• Préliminaire

1. Vérifier que $M = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}$ admet $5/6$, 0 et $1/2$ comme valeur propre.

2. Justifier qu'il existe trois réels α , β et γ et une matrice P inversible tels que : $M = P \text{diag}(\alpha, \beta, \gamma) P^{-1}$.

- Dans une élection à venir, deux candidats A et B se présentent.

Un groupe d'électeurs est composé de m individus, avec $m \geq 2$.

Initialement, au jour appelé « jour 0 », le nombre d'individus préférant le candidat A vaut a (il y en a donc $m - a$ préférant le candidat B). Ensuite, chaque jour, un des individus au hasard dans le groupe en rencontre un autre, au hasard également, et il lui parle des élections. Si leurs intentions de vote diffèrent, il le convainc de voter comme lui.

Pour tout entier naturel n , on note X_n le nombre d'individus du groupe ayant l'intention de voter pour le candidat A le soir du n -ième jour. Ainsi, X_n est une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, m \rrbracket$. On remarque que X_0 est une variable aléatoire certaine : $\mathbf{P}(X_0 = a) = 1$.

- A. Dans cette partie, on étudie le cas d'un groupe formé de quatre électeurs.

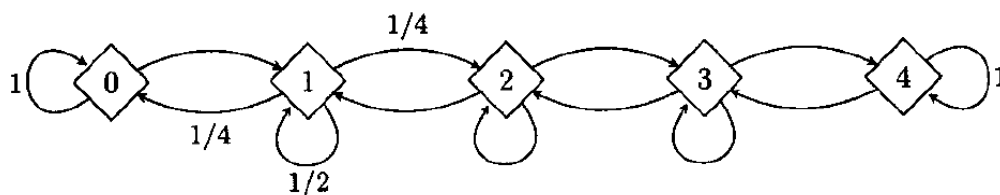
1. Soient i et j deux entiers dans $\llbracket 0, 4 \rrbracket$. On note $p_{i,j}$ la probabilité pour qu'il y ait exactement i personnes dans le groupe ayant l'intention de voter pour A un jour donné, sachant qu'il y en avait j la veille.

- a) Justifier : $p_{0,0} = p_{4,4} = 1$.

- b) Justifier : si i et j dans $\llbracket 0, 4 \rrbracket$ sont tels que $|i - j| \geq 2$, alors $p_{i,j} = 0$.

- c) Donner pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, 4 \rrbracket^2$ la probabilité $p_{i,j}$.

On présentera les résultats sur le diagramme suivant, à reproduire et à compléter, et on justifiera quelques cas.



2. On définit la matrice $M = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}$, et pour tout entier naturel n , la matrice colonne $U_n = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(X_n = 1) \\ \mathbf{P}(X_n = 2) \\ \mathbf{P}(X_n = 3) \end{bmatrix}$.
- Pour tout entier naturel n , établir une relation entre U_n , M et U_0 .
 - En déduire que pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, la suite $(\mathbf{P}(X_n = k))_{n \in \mathbb{N}}$ est une combinaison linéaire des trois suites $(\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\beta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\gamma^n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - Que dire, pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = 0$?
 - Établir : $\lim_{n \rightarrow +\infty} [\mathbf{P}(X_n = 0) + \mathbf{P}(X_n = 4)] = 1$. Comment interpréter ce résultat?
- **B.** On revient dans cette partie au cas général d'un groupe de m électeurs.
- On note $\pi_{n,k} = \mathbf{P}(X_n = k)$, la probabilité pour qu'il y ait exactement k électeurs envisageant de voter pour A à l'issue du n -ième jour.
- Soit n un entier naturel.
 - Expliciter les probabilités

$$\mathbf{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k+1), \quad \mathbf{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k-1) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k).$$

- Pour $k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$, exprimer $\pi_{n+1,k}$ à l'aide de $\pi_{n,k-1}$, $\pi_{n,k}$ et $\pi_{n,k+1}$.
2. a) Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout $k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$,

$$\pi_{n,k} \leq \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)} \right)^n.$$

- En déduire, pour tout $k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$, la limite de $\pi_{n,k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 1

Probabilités, suites et calculs matriciels

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$. (A_n, B_n, C_n, D_n) forme un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}_{D_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(D_n) \\ = \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(B_n) + 0 + \frac{1}{4}\mathbb{P}(D_n).$$

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}_{D_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(D_n) \\ = \frac{1}{4}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(C_n) + 0.$$

$$\mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}_{D_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(D_n) \\ = 0 + \frac{1}{4}\mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(C_n) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(D_n).$$

$$\mathbb{P}(D_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(D_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(D_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(D_{n+1})\mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}_{D_n}(D_{n+1})\mathbb{P}(D_n) \\ = \frac{1}{4}\mathbb{P}(A_n) + 0 + \frac{1}{4}\mathbb{P}(C_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(D_n).$$

Ce qui donne

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix}.$$

Avec ce choix, on a bien $X_{n+1} = AX_n$.

Remarque

Par récurrence, on en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$. La suite de l'exercice permet de calculer les puissances de la matrice A .

2) Donc $A = \frac{1}{2}(I_4 + \frac{1}{2}J)$ où $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Alors $K = \frac{1}{2}J^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Un calcul matriciel donne $KJ = 2J$.

- 3) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels u_n et v_n tels que

$$(I_4 + \frac{1}{2}J)^n = I_4 + u_n J + v_n K.$$

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{P}(n)$: « Il existe des réels u_n et v_n tels que $(I_4 + \frac{1}{2}J)^n = I_4 + u_n J + v_n K$ ».

- **Initialisation.** $n = 0$. $(I_4 + \frac{1}{2}J)^0 = I_4$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifié en prenant $u_0 = v_0 = 0$
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} (I_4 + \frac{1}{2}J)^{n+1} &= (I_4 + \frac{1}{2}J)^n \cdot (I_4 + \frac{1}{2}J)^{n+1} \\ &= (I_4 + u_n J + v_n K) \cdot (I_4 + \frac{1}{2}J) \\ &= I_4 + u_n J + v_n K + \frac{1}{2}J + \frac{u_n}{2}J^2 + \frac{v_n}{2}KJ \\ &= I_4 + (u_n + v_n + \frac{1}{2})J + (u_n + v_n)K. \end{aligned}$$

hypothèse de récurrence
 $J^2 = K, KJ = 2J$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée en posant $u_{n+1} = u_n + v_n + \frac{1}{2}$ et $v_{n+1} = u_n + v_n$.

• **Conclusion.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels u_n et v_n tels que $(I_4 + \frac{1}{2}J)^n = I_4 + u_n J + v_n K$.

- 4) Les relations trouvées à la question précédente donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_{n+1} = 2w_n + \frac{1}{2}$.

• La suite (w_n) est une suite arithmético-géométrique.

• Le point fixe ℓ vérifie $\ell = 2\ell + \frac{1}{2}$. Donc $\ell = -\frac{1}{2}$.

La suite $(w_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2. $w_0 - \ell = \frac{1}{2}$. Pour $n \in \mathbb{N}$

$$w_n = 2^n \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2^{n-1} - \frac{1}{2}.$$

On en déduit, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = w_{n-1} + \frac{1}{2} = 2^{n-2} \quad \text{et} \quad v_n = w_{n-1} = 2^{n-2} - \frac{1}{2}.$$

- 5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \frac{1}{2^n}(I_4 + \frac{1}{2}J)^n = \frac{1}{2^n}I_4 + \frac{1}{2^n}J + (\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}})K$.

$$X_n = A^n X_0 = \frac{1}{2^n}X_0 + \frac{1}{4^n}JX_0 + (\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}})KX_0 = \frac{1}{2^n} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4^n} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+1}}$, $b_n = d_n = \frac{1}{4}$ et $c_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}}$.

Exercice 3

1.c) Notons pour $n \in \mathbb{N}$

- U_n la première personne, au jour n , vote pour A.
- D_n la deuxième personne, au jour n , vote pour A.

D'après le diagramme

$$p_{0,1} = \frac{1}{4} = \mathbf{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1}=0).$$

Justifions ce résultat à l'aide des probabilités composées

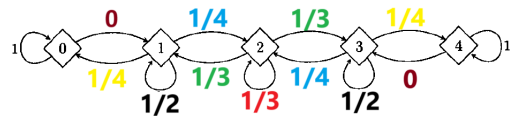
$$p_{0,1} = \mathbf{P}_{[X_n=1]}(\overline{U_n} \cap D_n) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}.$$

En effet, si au jour n , il y a un votant pour A, il n'y aucun votant pour A si et seulement si la première personne vote pour B et convainc la dernière personne à voter pour A.

Les autres probabilités se calculent de la même manière. Notons que pour compléter le diagramme :

- La somme des probabilités partant d'un sommet vaut 1 (conséquence d'un système complet d'événements);

→ Le problème est symétrique. Sur le diagramme, la symétrie se traduit par une symétrie centrale autour du sommet 2.



- 2.a) Comme $([X_{n-1}=i])_{i \in \{0;4\}}$ est un système complet d'événements. Pour tout $k \in \{1;2;3\}$

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \sum_{i=0}^4 \mathbf{P}(X_{n-1} = i) \mathbf{P}_{[X_{n-1}=i]}(X_n = k)$$

En reprenant la question A1a.

$$\text{pour } i = 0, i = 4, \quad \mathbf{P}_{[X_{n-1}=i]}(X_n = k) = 0.$$

Puis avec les notations de l'énoncé

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \sum_{i=1}^3 p_{k,i} \mathbf{P}(X_{n-1} = i).$$

En reprenant le diagramme :

$$M = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

et par définition du produit matriciel

$$U_n = MU_{n-1}.$$

On en déduit par récurrence

$$U_n = M^n U_0.$$

En reprenant le préliminaire, et par récurrence

$$U_n = M^n U_0 = PD^n P^{-1} U_0.$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}(X_n = 1) \\ \mathbf{P}(X_n = 2) \\ \mathbf{P}(X_n = 3) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{bmatrix} P^{-1} U_0$$

On en déduit par produit matriciel que pour tout $k \in \{1; 2; 3\}$

$$\mathbf{P}(X_n = k) = t_{1,k} \alpha^n + t_{3,k} \beta^n + t_{3,k} \gamma^n$$