



Thème : Polynômes de Lagrange et partition de l'unité



Exercice 1. ♦♦

EDHEC S 2019

Partie 1 : exemple

On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.
- b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).
- c) En Python, la commande `linalg.matrix_rank(M)` de la bibliothèque `numpy` renvoie le rang de la matrice M . On a saisi

Python a répondu

Editeur

```
import numpy as np
A = np.array([[1, 0, 0], [-2, 3, -2], [-1, 1, 0]])
r1=np.linalg.matrix_rank(A-np.eye(3))
r2=np.linalg.matrix_rank(A-2*np.eye(3))
print('r1=',r1,'r2=',r2)
```

Console

```
>>> # script executed
r1= 1 r2= 2
```

Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et à la dimension des sous-espaces propres associés ?

- d) Donner une base de chacun des noyaux $\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id})$ et $\text{Ker}(f - \lambda_2 \text{id})$. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.
2. a) Justifier qu'il existe une base (u_1, v_1, v_2) de $\mathbb{R}^3$, où (u_1, v_1) est une base de $\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id})$ et (v_2) une base de $\text{Ker}(f - \lambda_2 \text{id})$. On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de u_1 et la première de v_1 étant nulles.
- b) On note $x = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, en fonction de a, b et c les coordonnées de x dans la base (u_1, v_1, v_2) .

Partie 2 : généralisation

Soit n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p \geq 2$, soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n , et f un endomorphisme diagonalisable de E ayant p valeurs propres, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, deux à deux distinctes. On se propose de déterminer la décomposition de chaque vecteur x de E sur la somme directe $\bigoplus_{k=1}^p \text{Ker}(f - \lambda_k \text{id})$, où Id désigne l'endomorphisme identité de E .

3. Soit $\mathcal{B}$ une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D .

- a) En notant I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :

$$(D - \lambda_1 I_n)(D - \lambda_2 I_n) \dots (D - \lambda_p I_n) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

- b) En déduire un polynôme annulateur de f .

Pour chaque k de $[1, p]$, on définit le polynôme $L_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^p \frac{x - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$.

4. a) En distinguant les cas $i = k$ et $i \neq k$, calculer $L_k(\lambda_i)$.
- b) Montrer que $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.
- c) Établir alors que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[x], \quad P = \sum_{k=1}^p P(\lambda_k) L_k$$

- d) En déduire que $\sum_{i=1}^p L_i = 1$.

5. a) Montrer que, pour tout x de E , $L_k(f)(x)$ appartient à $\text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id})$, où $L_k(f)(x)$ désigne l'image du vecteur x de E par l'endomorphisme $L_k(f)$.

b) En déduire la décomposition cherchée.

6. Vérifier que cette dernière décomposition redonne celle obtenue pour l'endomorphisme f de la partie 1, si l'on choisit $n = 3$, $E = \mathbb{R}^3$ et $p = 2$.

Exercice 2. ♦♦♦ Partition de l'identité

HEC 2016

Soient k endomorphismes $u_1, u_2, \dots, u_k$ d'un espace vectoriel E . On dit que $u_1, u_2, \dots, u_k$ constituent une partition de l'identité de E si :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_k = \text{id}_E.$$

1. Exemple 1.

Dans cette question, $n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$. Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- Préciser le spectre de la matrice A et montrer que A n'est pas diagonalisable.
- Montrer que le polynôme $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $Q(x) = x^3 + x^2$ est un polynôme annulateur de A .
- Existe-t-il un polynôme de degré 2 annulateur de A ?
- Trouver deux polynômes Q_1 et Q_2 de $\mathbb{R}[x]$ pour lesquels les deux endomorphismes $Q_1(f)$ et $Q_2(f)$ sont des projecteurs et constituent une partition de l'identité de $\mathbb{R}^3$.

2. Exemple 2.

On considère dans cette question un endomorphisme f de E diagonalisable et possédant k valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on note :

- L_i le polynôme de $\mathbb{R}[x]$ défini par

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j \in \llbracket 1, k \rrbracket \\ j \neq i}} \left(\frac{x - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right);$$

- $E_{\lambda_i}(f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i ;
- ν_i l'endomorphisme de E défini par $\nu_i = L_i(f)$.

- Justifier l'égalité $E = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}(f)$. En déduire que $\prod_{j=1}^k (x - \lambda_j)$ est un polynôme annulateur de f .

- Établir pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, l'inclusion : $\text{Im}(\nu_i) \subset E_{\lambda_i}(f)$.

- Pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, calculer la somme : $\sum_{i=1}^k L_i(\lambda_j)$. En déduire que les endomorphismes $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ constituent une partition de l'identité de E .

- Établir pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, l'égalité : $\text{Im}(\nu_i) = E_{\lambda_i}(f)$. Identifier l'endomorphisme ν_1 .

3. Soit k endomorphismes $u_1, u_2, \dots, u_k$ de E qui constituent une partition de l'identité de E . Pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on note r_i le rang de u_i .

- Établir les relations : $E = \sum_{i=1}^k \text{Im}(u_i)$ et $n \leq \sum_{i=1}^k r_i$.

- Montrer que les sous-espaces vectoriels $\text{Im}(u_1), \text{Im}(u_2), \dots, \text{Im}(u_k)$ sont en somme directe si et seulement si on a l'égalité $n = \sum_{i=1}^k r_i$.

- Dans cette question, on cherche à montrer l'équivalence des propriétés (1), (2) et (3) suivantes :

$$(1) \quad n = \sum_{i=1}^k r_i$$

(2) Les endomorphismes $u_1, u_2, \dots, u_k$ sont des projecteurs.

(3) Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$, avec $i \neq j$, on a : $u_i \circ u_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

- En utilisant la trace des matrices de projecteurs, justifier l'implication (2) $\Rightarrow$ (1).
- À l'aide de la question 3.b et en écrivant, pour $x \in E$, les vecteurs $u_1(x), u_2(x), \dots, u_k(x)$ comme des sommes de k vecteurs, établir l'implication (1) $\Rightarrow$ (3).
- Conclure en établissant une troisième implication.