



Thème : Fonctions génératrices



Cas des variables aléatoires finies

Pour toute variable aléatoire X finie et à valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$, on définit la fonction polynomiale G_X par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \sum_{x \in X(\Omega)} t^x \mathbf{P}(X = x).$$

Exercice 1. ♦ Premières propriétés de la fonction génératrice

RVA68

Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$.

- Exprimer l'espérance et la variance de X à l'aide de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.
- Justifier que X et Y ont même loi si et seulement si elles ont même fonction génératrice.
- Fonction génératrice d'une somme et application
 - Justifier que si X et Y sont indépendantes alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t)G_Y(t) = G_{X+Y}(t)$.
 - Calculer $G_X(t)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$.
 - Retrouver le fait que si $X_1, \dots, X_k$ sont de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et qui suivent des lois binomiales $\mathcal{B}(n_i, p)$ alors la somme $S_n = \sum_{i=1}^k X_i$ suit encore une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- Fonction génératrice d'une combinaison linéaire
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On considère des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_k$ indépendantes, à valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$, de fonctions génératrices $G_1, G_2, \dots, G_k$. Exprimer la fonction génératrice G de $\sum_{i=1}^k \lambda_i X_i$ en fonction de $G_1, G_2, \dots, G_k$ et des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.

Exercice 2. ♦ Fonction génératrice d'un couple

CPV19

Soient n et m deux entiers supérieurs ou égaux à 2 fixés. On considère deux variables aléatoires X et Y telles que $X(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$ et $Y(\Omega) \subset \llbracket 0, m \rrbracket$ et le couple $Z = (X, Y)$.

Pour $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, m \rrbracket$, on note $p_{i,j} = \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j])$ et on introduit les fonctions G_X, G_Y définies sur $\mathbb{R}$ par

$$G_X(x) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}(X = i) x^i, \quad G_Y(y) = \sum_{i=0}^m \mathbf{P}(Y = i) x^i$$

et la fonction G_Z définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$G_Z(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_{i,j} x^i y^j.$$

- Calculer $G_Z(1, 1)$.
 - Exprimer $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(Y)$, $\mathbf{E}(XY)$ et $\text{Cov}(X, Y)$ à l'aide des dérivées partielles d'ordres 1 et 2 de G_Z évaluées en $(1, 1)$.
- On considère une fonction polynomiale $f : (x, y) \mapsto \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{i,j} x^i y^j$. Montrer que,

$$\left(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 0 \right) \iff \left(\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, m \rrbracket, \quad a_{i,j} = 0 \right).$$

- Déduire de la question précédente que X et Y sont indépendantes si et seulement si, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$G_Z(x, y) = G_X(x)G_Y(y).$$

- Application. Une urne contient des jetons portant chacun une des trois lettres A, B ou C. La proportion des jetons A (resp. B, C) dans l'urne est égale à $p \in]0, 1[$ (resp. $q, r \in]0, 1[$) avec $p + q + r = 1$. On effectue n tirages (avec $n \in \mathbb{N}^*$) avec remise dans cette urne et on note X (resp. Y) la variable aléatoire correspondant au nombre de jetons A (resp. B) piochés.
 - Déterminer la loi de X et celle de Y puis les expressions de G_X et G_Y .
 - Déterminer la loi de Z puis l'expression de G_Z .
 - Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
 - Déterminer $\text{Cov}(X, Y)$. Le résultat était-il prévisible?

Exercice 3. ♦♦♦ Un exemple de processus de type Galton-Watson

RVA70

Une cellule se reproduit ainsi : elle donne deux cellules-filles avec probabilité p , et aucune descendante avec probabilité $q = 1 - p$. Elle meurt ensuite. On part d'une seule cellule et on cherche à déterminer si la population va s'éteindre ou non. On suppose que les comportements des descendances sont mutuellement indépendants et on note, pour $n \in \mathbb{N}$, X_n , la variable aléatoire égale au nombre de cellules à la n -ième génération.

1. Expliciter l'ensemble des valeurs prises par X_n , noté $X_n(\Omega)$.
2. Montrer que $\mathbf{P}_{[X_n=i]}(X_{n+1} = 2k) = \binom{i}{k} p^k \cdot q^{i-k}$, où $k \in \llbracket 1; i \rrbracket$.
3. Soit G_n , la fonction génératrice de X_n , c'est-à-dire la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n(x) = \sum_{j \in X_n(\Omega)} \mathbf{P}(X_n = j) \cdot x^j.$$

- a) En appliquant convenablement la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_{n+1}(x) = G_n(q + p \cdot x^2).$$

- b) Calculer $G_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et en déduire que $G_{n+1}(x) = q + p \cdot G_n(x)^2$.

4. Soit $m = \min(1; q/p)$. On définit la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$u_1 \in [0; m] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = q + p u_n^2.$$

- a) Vérifier que la suite est à valeurs dans $[0; m]$ et monotone.
 - b) En déduire la convergence de la suite et préciser la limite.
5. Soit T_n , la variable aléatoire égale à 1 lorsque la population est éteinte et à 0 sinon. Justifier que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

Cas des variables aléatoires dénombrables

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose :

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \mathbf{P}(X = k).$$

Exercice 4. ♦ Définition et exemple

RVA71

1. Soit $t \in [-1, 1]$. Montrer que la série qui définit $G_X(t)$ est absolument convergente, puis exprimer $G_X(t)$ à l'aide de l'espérance d'une variable aléatoire.
2. On suppose que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
 - a) Calculer $G_X(t)$ pour tout $t \in [-1, 1]$.
 - b) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = k) = G_X^{(k)}(0)/k!$.

Cette dernière égalité est un fait général.

Exercice 5. ♦♦ Lien entre la fonction génératrice et l'espérance

RVA72

1. a) Exprimer $G_X(t)$ comme espérance d'une variable aléatoire.
- b) Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes prenant leurs valeurs dans $\mathbb{N}$, alors

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_{X+Y}(t) = G_X(t) \cdot G_Y(t).$$

2. a) On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $t \in [0, 1[$

$$p_k = \mathbf{P}(X = k) \quad \text{et} \quad H(t) = \frac{G_X(t) - G_X(1)}{t - 1}.$$

Montrer que

$$H(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k (1 + t + t^2 + \dots + t^{k-1}).$$

En déduire que la fonction H est croissante sur $[0, 1[$.

- b) On suppose que X admet une espérance. Prouver que

$$\forall t \in [0, 1[, \quad H(t) \leq \mathbf{E}(X).$$

- c) En déduire que G_X est dérivable à gauche en 1. Quelle relation existe-t-il entre $E(X)$ et la dérivée à gauche de G_X en 1 ?
- d) On suppose maintenant que G_X est dérivable à gauche en 1. Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k p_k \leq (G_X)'_g(1).$$

En déduire que X possède une espérance. Quelle relation entre $(G_X)'_g(1)$ et $E(X)$ peut-on en déduire ?

- e) Conclure en donnant le lien entre G_X et $E(X)$.
3. Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction génératrice de la variable aléatoire X , et retrouver ainsi la valeur de $E(X)$.
- a) X suit la loi géométrique de paramètre p .
- b) X suit la loi de Poisson de paramètre λ .

Exercice 6. ♦♦♦ **Identités de Wald et sommes aléatoires de variables aléatoires**

EC3

Soient X et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi et admettant une espérance. Soit N , une nouvelle variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et admettant aussi une espérance. On pose pour tout $\omega \in \Omega$

$$S(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) + \dots + X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \geq 1 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0. \end{cases}$$

On admet que S est une variable aléatoire.

1. • *Espérance de S : une formule, deux approches.*
- a) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(N = n) \neq 0$. Justifier l'existence et calculer l'espérance $E(S | [N = n])$.
- b) En déduire l'existence de l'espérance de S et l'égalité $E(S) = E(X) \cdot E(N)$.
2. a) Justifier que pour tout $t \in [-1; 1]$

$$G_S(t) = G_N(G_X(t)).$$

On pourra admettre que l'on peut intervertir les sommes doubles.

- b) En admettant que dans le cas d'absolue convergence, l'espérance de la variable X est donnée par $G'_X(1)$, retrouver le résultat de la question 1.b).
3. • *Variance*
- On suppose maintenant que les variables X_i admettent un moment d'ordre 2. Justifier que

$$E((S - NE(X))^2) = E(N) V(X).$$

Exercice 3

Illustrons la situation

1.

Étape 1



$$X_1(\Omega) = \{0, 2\}$$

On conjecture que

$$X_n(\Omega) = \{2k \mid k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n\}$$

Ce qu'on démontre par récurrence.

2. Si l'événement $[X_n = i]$ est réalisé. Il y a donc i cellules qui vont se reproduire. Par indépendance des comportements le nombre de cellules qui vont donner 2 cellules-filles suit une loi binomiale de paramètre (i, p) . D'où le résultat.

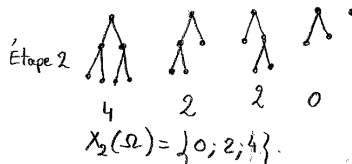
3 a. Appliquons la formule des probabilités totales au système complet d'événements $[X_n = i]_{i \in X_n(\Omega)}$, on a

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 2k) &= \sum_{i \in X_n(\Omega)} P(X_n = i) P_{[X_n = i]}(X_{n+1} = 2k) \\ &= \sum_{i \in X_n(\Omega)} \binom{i}{k} p^k q^{i-k} P(X_n = i) \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) &= \sum_{2k \in X_{n+1}(\Omega)} P(X_{n+1} = 2k) x^{2k} \quad (\text{Définition}) \\ &= \sum_{k=0}^{2^n} \sum_{i \in X_n(\Omega)} \binom{i}{k} p^k q^{i-k} P(X_n = i) x^{2k} \end{aligned}$$

Exercice 47



$$X_2(\Omega) = \{0, 2, 4\}$$

On intervertit l'ordre de sommation des sommes finies

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) &= \sum_{i \in X_n(\Omega)} \sum_{k=0}^{2^n} \binom{i}{k} p^k q^{i-k} P(X_n = i) x^{2k} \\ &= \sum_{i \in X_n(\Omega)} \left(\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (x^2 p)^k q^{i-k} \right) P(X_n = i) \\ &= \sum_{i \in X_n(\Omega)} (px^2 + q)^i P(X_n = i) \end{aligned}$$

car $\binom{i}{k} = 0$ si $k > i$

formule de binôme

$$= G_n(px^2 + q)$$

3.b On vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$G_1(x) = q + px^2$$

Ainsi $G_{n+1}(x) = G_n(G_1(x))$. Ce que l'on

résume par $G_{n+1} = G_n \circ G_1$.

Par récurrence, on vérifie que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad G_n = \underbrace{G_1 \circ G_1 \circ \dots \circ G_1}_n$$

Ainsi $G_{n+1} = G_n \circ G_1$

$$= G_1 \circ G_n \quad (\text{commute}).$$

et la formule suit.

Exercice 4

1. Pour tout $t \in [-1, 1]$, tout $k \in \mathbb{N}$

$$(t^k P(X=k)) \in P(X=k)$$

Or la série $\sum P(X=k)$ est convergente.

Par le critère de comparaison, la série $\sum t^k P(X=k)$ converge absolument.

2.(a) Soit $t \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\lambda)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{t\lambda} = e^{\lambda(t-1)} \end{aligned}$$

2.(b). Par récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}$

G_X est k -fois dérivable sur $[-1, 1]$

$$\forall t \in [-1, 1] \quad G_X^{(k)}(t) = \lambda^k e^{\lambda(t-1)}$$

$$\text{En particulier} \quad G_X^{(k)}(0) = e^{-\lambda} \lambda^k$$

On a bien

$$\frac{G_X^{(k)}(0)}{k!} = P(X=k)$$

Remarque pour le cas général.

On admet que G_X est C^∞ . On montre que

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^n P(X=k) t^k + o(t^n)$$

par la formule de Taylor-Young

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^n G_X^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} + o(t^n)$$

On conclut par unicité du développement limité.

Exercice 5

Soit $t \in]-1, 1[$
 1.a Par la formule de Transfert
 la série $\sum t^k P(X=k)$ est absolument convergente
 (car on peut encadrer le terme général par $P(X=k)$
 et la $\sum P(X=k)$ converge).
 Donc $E(t^X)$ existe et
 $E(t^X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} t^k P(X=k) = G_X(t)$.

1.b Soit $t \in]-1, 1[$, par le lemme des coalitions t^X et t^Y sont indépendantes et
 $G_{XY}(t) = E(t^{X+Y}) = E(t^X \cdot t^Y)$
 $= E(t^X) E(t^Y) = G_X(t) G_Y(t)$.

2.a Soit $t \in]0, 1[$.
 $H(t) = \frac{G_X(t) - G_X(1)}{t - 1} = \sum_{k=1}^{+\infty} P_k \left(\frac{t^k - 1}{t - 1} \right)$
 $= \sum_{k=1}^{+\infty} P_k (1 + t + t^2 + \dots + t^{k-1})$ Somme géométrique, $t \neq 1$.

Pour $t, s \in]0, 1[$ avec $t \leq s$, on a
 $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad 1 + t + t^2 + \dots + t^{k-1} \leq 1 + s + s^2 + \dots + s^{k-1}$
 puis par somme ($P_k \geq 0$).

$H(t) \leq H(s)$.
 c'est la définition de la croissance de H .

b. Pour $t \in]0, 1[$
 $1 + t + t^2 + \dots + t^{k-1} \leq 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = k$
 par somme (tout est convergent)
 $H(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} P_k (1 + t + t^2 + \dots + t^{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} k P_k = E(X)$

c) la fonction H est croissante sur $]0, 1[$ et majorée.
 D'après le théorème de convergence monotone (dans sa "version fonction"), il y a existence d'une limite à gauche pour H en 1. Comme $H(t)$ est le taux d'accroissement de G entre 1 et t , G admet une dérivée à gauche en 1. De plus
 $(G_X)'_g(1) \leq E(X)$.

d) Soit $t \in]0, 1[$. Comme la somme $H(t)$ est à termes positifs
 $\sum_{k=1}^n P_k (1 + t + \dots + t^{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} P_k (1 + t + \dots + t^{k-1})$
 $\leq H(t) \leq (G_X)'_g(1)$
 la dernière inégalité résultant de la croissance de H sur $]0, 1[$.
 puis par passage à la limite $t \rightarrow 1^-$ (possible sur le membre de gauche car la somme est finie).

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \sum_{k=1}^n P_k (1 + t + \dots + t^{k-1}) = \sum_{k=1}^n P_k \lim_{t \rightarrow 1^-} (1 + t + \dots + t^{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^n P_k k \leq (G_X)'_g(1)$$

La suite des sommes partielles $(\sum k P_k)$ est croissante et majorée, elle converge donc.
 On a aussi la convergence absolue de $\sum k P_k$ et l'espérance existe. Par passage à la limite ($n \rightarrow +\infty$).

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n k P_k \leq (G_X)'_g(1) \text{ donne}$$

$$E(X) = (G_X)'_g(1).$$

e. Par double inégalité $E(X) = (G_X)'_g(1)$.

3.b On a vu (voir ex 4.8) que si X suit une loi de Poisson
 $\forall t \in]-1, 1[\quad G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

G_X est dérivable en 1 (donc à gauche) et

$$E(X) = (G_X)'_g(1) = \lambda \cdot e^{\lambda(1-1)} = \lambda.$$

3.d. Pour une loi géométrique avec $p \in]0, 1[$,
 $\forall t \in]-1, 1[\quad G_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} p q^{k-1} t^k = \frac{p}{q} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (qt)^k - 1 \right)$
 $= \frac{p}{q} \cdot \left(\frac{1}{1-qt} - 1 \right)$ car $qt \neq 1$

D'où G_X est dérivable en 1 et

$$G_X'(1) = \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{(1-q)^2} \text{ et } E(X) = G_X'(1) = \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{(1-q)} = \frac{p}{1-p}.$$

Exercice 6

Exo 50 u) Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Comme les variables X_i admettent une espérance, S_n aussi par linéarité et

$$E(S_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = n E(X)$$

(par l'égalité en loi des X_i).

Ensuite, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$P_{[N=n]}(S=k) = P_{[N=n]}(S_n=k) = P(S_n=k)$$

car S_n est indépendante de N .

On en déduit l'existence de $E(S | [N=n])$ avec

$$E(S | [N=n]) = E(S_n) = n E(X)$$

1b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $E(S | [N=n]) = E(S | [N=n])$ existe
 (car S est positive) • $([N=n])$ est un sce.

• Justifions que la série $\sum E(S | [N=n]) P(N=n)$ converge. On a

$$E(S | [N=n]) P(N=n) = n E(X) P(N=n).$$

$$= E(X) \cdot n P(N=n).$$

On en déduit bien la convergence car $\sum n P(N=n)$ converge (N admet une espérance).

Par la formule de l'espérance totale, S admet une espérance et

$$E(S) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} E(S | [N=n]) P(N=n).$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n E(X) P(N=n) = E(X) E(N).$$

2a. Soit $t \in]0, 1[$. La formule de l'espérance totale s'applique de nouveau

$$G_S(t) = E(t^S)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} E(t^{S_n} | [N=n]) P(N=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} E(t^{S_n}) P(N=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} G_{S_n}(t) P(N=n).$$

Or par indépendance des X_i , on a $t^{X_1} \dots t^{X_n}$ indépendantes
 (lemme des coalitions)

$$G_{S_n}(t) = E(t^{X_1 + \dots + X_n})$$

$$= E(t^{X_1}) \dots E(t^{X_n}) = (G_X(t))^n.$$

D'où $G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n) (G_X(t))^n = G_N(G_X(t))$.

2b. Comme X et N admettent une espérance, G_X et G_N sont dérivables (à gauche) en 1. et

$$E(S) = G_S'(1) = G_X'(1) \cdot G_N'(G_X(1)).$$

$$= G_X'(1) G_N'(1) \text{ car } G_X(1) = 1$$

$$= E(X) E(N).$$

3. De nouveau, appliquons la formule de l'espérance totale (la justification est identique à la question 1).

$$E((S - NE(X))^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} E((S - NE(X))^2 | [N=n]) P(N=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} E((S_n - nE(X))^2) P(N=n).$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} V(S_n) P(N=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n V(X) P(N=n).$$

$$= V(X) E(N).$$