

**Nom :**

# Mathématiques

**Cours**

**double-diplôme**  
**ESCP x CentraleSupélec**

**Livret IV**

**Chapitre**

4. Équations différentielles I

2026



## Équations différentielles I

*Il est important de souligner que la formulation mathématique de l'expérience souvent rudimentaire du physicien, conduit dans un nombre étonnant de cas à une description incroyablement précise d'une grande classe de phénomènes. Cela montre que le langage mathématique n'est pas seulement le seul langage que nous puissions parler; ça montre qu'il est, dans un sens très réel, le bon langage.*

The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences  
Eugene Wigner (1902-1995)

### 1

### Équations différentielles, structure des solutions

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction et faisant intervenir les dérivées successives. La notion de l'intervalle de définition de la solution est importante. Si on modifie l'intervalle, on peut très bien obtenir d'autres fonctions solutions. En pratique, on étudie l'équation différentielle sur le plus grand intervalle ou sur une réunion finie d'intervalles où l'équation est bien définie.

#### Vocabulaire.

→ L'ordre de l'équation différentielle est l'ordre de la plus grande dérivée intervenant dans l'équation. Ci-dessous, des équations différentielles d'ordre 1, 2 et 3.

$$y' + 2y = 1 + e^x, \quad y'' - xy' = 0 \quad \text{et} \quad y^{(3)} - y'' = y' - y.$$

→ Une équation différentielle est dite *linéaire d'ordre n* si elle est de la forme

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = F(x) \quad (\mathcal{E})$$

où les  $a_i$  et  $F$  sont des fonctions continues sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ . Pour  $F$ , on parle de *second membre*.

→ Une équation différentielle linéaire est dite *homogène* si la fonction  $F$  est la fonction nulle :

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = 0 \quad (\mathcal{E}_0)$$

→ De plus, on dit que l'équation est à coefficients constants si les fonctions  $a_i$  sont des fonctions constantes.

#### Proposition 1 (Structure vectoriel/affine)

- L'ensemble des solutions  $\mathcal{S}_0$  de l'équation homogène  $(\mathcal{E}_0)$  est un espace vectoriel.
- L'ensemble des solutions de l'équation  $(\mathcal{E})$  est, s'il est non vide, un espace affine. C'est-à-dire que si  $y_p$  est une fonction solution de  $(\mathcal{E})$  alors l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{y_p + y \mid y \in \mathcal{S}_0\}.$$

On s'intéresse à priori aux équations  $\alpha(x)y' + \beta(x)y = f(x)$ . En divisant par  $\alpha(x)$ , on peut se ramener au cas

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \quad (\mathcal{E})$$

quitte à restreindre l'intervalle d'étude où la fonction  $\alpha$  ne s'annule pas.

## 2.1 L'équation homogène

### Théorème 2 (Toutes les solutions du cas homogène)

**Soient** |  $\rightarrow$  l'équation homogène  $y' + a(x)y = 0$ , où  $a : I \rightarrow \mathbb{K}$  est une fonction continue sur l'intervalle  $I$ ;  
 $\rightarrow$   $A$  une primitive de  $a$  sur  $I$ .

**Alors**, l'ensemble  $\mathcal{S}_0$  des solutions de  $(\mathcal{E}_0)$  sur  $I$  est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ x \in I \mapsto \lambda e^{-A(x)} \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

### Exercice 1



*Les questions sont indépendantes.*

1. Résoudre sur  $]0; 1[$  l'équation  $x(1-x)y' + y = 0$ .
2. Que dire d'une fonction solution de  $(\mathcal{E}_0)$  qui s'annule au moins une fois?

# ceED1

## 2.2 Une solution particulière

### Une solution à vue

Reprenons le cas plus général de l'équation différentielle  $y' + ay = F$  où  $F, a$  sont deux fonctions définies sur un intervalle  $I$ . Afin de déterminer une solution de l'équation, on teste des fonctions du « même type » que  $F$ .

### Exercice 2



◆ Considérons l'équation différentielle :  $y' - 2y = F \quad (\mathcal{E}_F)$ .

1. On suppose dans cette question que  $F : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ . Chercher une solution de  $(\mathcal{E}_F)$  sous la forme d'une fonction polynomiale.
2. a) On suppose maintenant que  $F : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$ . Chercher une solution sous la forme  $x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^x$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
 b) Dans cette question, on considère  $F : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{2x}$ . Peut-on trouver une solution sous la forme  $x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{2x}$ ?  $x \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda x + \mu) e^{2x}$ ?
3. Donner une solution de  $y' - \ln(x)y = x^x$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

# ceED2

### Principe de superposition

### Théorème 3 (Principe de superposition)

Soient  $a, F_1, F_2$  des fonctions sur  $I$ . Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions respectivement de

$$y' + a(x)y = F_1(x) \quad \text{et} \quad y' + a(x)y = F_2(x).$$

Alors, pour tous  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$  est une solution de l'équation différentielle

$$y' + a(x)y = \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x).$$

## Méthode de la variation de la constante

Partons de  $(\mathcal{E}) : y' + a(x)y(x) = F(x)$  avec  $a$  continue. On a vu que les solutions de l'équation homogène sont du type

$$x \in I \mapsto \lambda e^{-A(x)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A \text{ une primitive de } a \\ \lambda \text{ une constante.} \end{cases}$$

L'idée est alors est de chercher une solution particulière de  $(\mathcal{E})$  sous la forme

$$y_p : x \in I \mapsto \lambda(x)e^{-A(x)}$$

où  $\lambda$  est maintenant une fonction dérivable. Ainsi pour tout  $x \in I$ ,

$$y_p'(x) + a(x)y_p(x) = \lambda'(x)e^{-A(x)} - a(x)\lambda(x)e^{-A(x)} + a\lambda(x)e^{-A(x)} = \lambda'(x)e^{-A(x)}.$$

Ainsi  $y_p$  est solution de  $(\mathcal{E})$  si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad \lambda'(x)e^{-A(x)} = F(x) \iff \forall x \in I, \quad \lambda'(x) = F(x)e^{A(x)}$$

si et seulement si  $\lambda$  est une primitive de  $x \in I \mapsto F(x)e^{A(x)}$ . Par exemple, pour  $x_0 \in I$ , on a

$$\lambda(x) = \int_{x_0}^x F(t)e^{A(t)} dt \quad \text{puis} \quad y_p(x) = \int_{x_0}^x F(t)e^{A(t)-A(x)} dt.$$

## 2.3 Bilan

### Théorème 4 (Résolution complète)

Soient  $a$  et  $F$  deux fonctions continues sur  $I$ . Considérons l'équation

$$y' + a(x)y = F(x) \quad (\mathcal{E}).$$

- L'équation  $(\mathcal{E})$  admet au moins une solution.  
Notons  $f_0$  une solution.
- Toutes les solutions de  $(\mathcal{E})$  sont de la forme  $f_0 + f$  où  $f$  est une solution de l'équation homogène.

### Proposition 5 (Unicité du problème de Cauchy, ordre 1)

Soient  $a$  et  $F$  deux fonctions continues sur un intervalle ouvert  $I$ . Considérons l'équation

$$y' + a(x)y = F(x) \quad (\mathcal{E}).$$

Alors, pour tout  $x_0 \in I$  et pour tout  $y_0 \in \mathbb{R}$ , il existe une et une seule solution  $y$  telle que  $y(x_0) = y_0$ .

**Exemple.** Vérifier que la solution de  $y' + y = e^x + 1$  avec  $y(1) = 2$  est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{1}{2}e^x + 1 + \left(e - \frac{e^2}{2}\right)e^{-x}.$$

### Exercice 3



#### ◆ Un exemple complet avec un raccord

On considère l'équation différentielle  $(\mathcal{E}) : x^3 y' + (2 - 3x^2)y = x^3$ .

1. Résoudre l'équation différentielle  $(\mathcal{E})$  sur  $]0, +\infty[$  et  $]-\infty, 0[$ .
2. Peut-on trouver une solution sur  $\mathbb{R}$ ?
3. Trouver la solution sur  $]0, +\infty[$  vérifiant  $y(1) = 0$ .

## 2.4 Interprétation graphique, champs de vecteurs

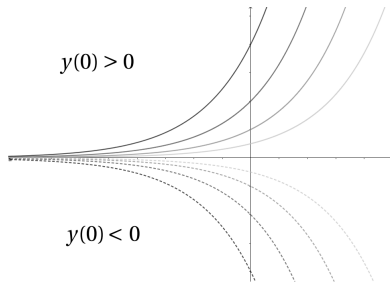
### Définition 6 (Trajectoires)

Soit  $(\mathcal{E})$  une équation différentielle dont  $y$  est une solution.

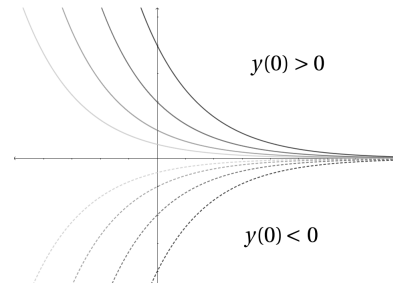
La **trajectoire** est l'ensemble de points de  $\mathbb{R}^2$  défini par :  $\mathcal{T} = \{ (t, y(t)) \mid t \in I \}$ .

**Exemple.** Ci-dessous, les trajectoires des solutions de  $y' + ay = 0$  où  $a$  est une constante avec différentes conditions initiales.

Si  $a < 0$



Si  $a > 0$



D'après l'unicité du problème de Cauchy, les trajectoires d'une équation différentielle d'ordre 1 ne peuvent se croiser. Ce résultat s'étend aux équations différentielles linéaires d'ordre 1 avec un second membre non nul.

Revenons à l'équation  $y' + a(x)y = b(x)$  avec  $\varphi$  une solution. On peut retraduire le problème avec une fonction  $f$  de deux variables :

$$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \text{où} \quad f(x, y) = b(x) - a(x)y.$$

On construit alors *un champ de vecteurs* où en tout point  $(x, y)$ , on place le vecteur  $(1, f(x, y))$ .

**Exemple.** Ci-dessous, le champ de vecteurs associé à l'équation  $y' + y = e^x + 1$  et l'unique solution vérifiant  $y(1) = 2$ .

Editeur

```
# Fonction définissant y' = f(x,y)
def f(x, y):
    return np.exp(x) + 1 - y

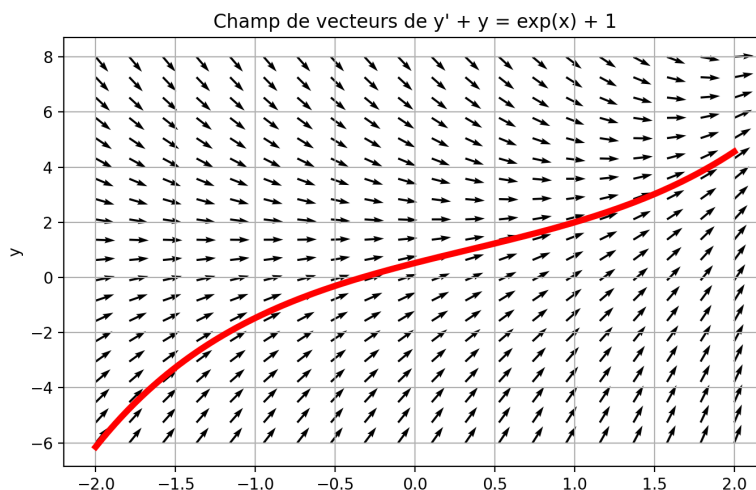
# Grille de points
x = np.linspace(-2, 2, 20)
y = np.linspace(-6, 8, 20)
X, Y = np.meshgrid(x, y)

# Composantes du champ
U = np.ones_like(X)
V = f(X, Y)
```

Editeur

```
# Normalisation pour avoir des flèches de
# taille comparable
N = np.sqrt(U**2 + V**2)
U_norm = U / N
V_norm = V / N

# Tracé
plt.quiver(X, Y, U_norm, V_norm, angles='xy')
t = np.linspace(-2, 2, 100)
phi = np.exp(t) / 2 + 1 + (np.exp(1) - np.exp(1)**2/2) * np.exp(-t)
plt.plot(t, phi, 'r-')
plt.show()
```



Reprenons la présentation du cas linéaire d'ordre 1 pour le cas de l'ordre 2 en se limitant à des coefficients constants. On étudie donc

$$y'' + ay + by = F \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad F \text{ continue sur } I.$$

### 3.1 Le cas homogène

Dans ce paragraphe, on étudie l'équation homogène :  $y'' + ay' + by = 0 \quad (\mathcal{E}_{a,b})$ .

#### Définition 7 (Équation caractéristique)

L'équation caractéristique de l'équation homogène  $(\mathcal{E}_{a,b})$  est  $x^2 + ax + b = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

L'ensemble des solutions va dépendre du nombre de solutions, c'est-à-dire du discriminant de l'équation caractéristique.

#### Théorème 8 (Formule explicite)

Notons  $\Delta$ , le discriminant de l'équation caractéristique de  $(\mathcal{E}_{a,b})$ .

- Si  $\Delta > 0$ , alors il y a deux racines réelles distinctes  $r_1, r_2$  et toutes les solutions s'écrivent sous la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \quad \text{où} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

- Si  $\Delta = 0$ , alors il y a une racine double  $r$  et toutes les solutions s'écrivent sous la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda t + \mu) e^{r t} \quad \text{où} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

- Si  $\Delta < 0$ , alors il y a deux racines complexes conjuguées  $r + i\omega, r - i\omega$  et toutes les solutions s'écrivent sous la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{r t} (\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)) \quad \text{où} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

**Remarque.** Dans le cas où le discriminant est négatif, on peut aussi mettre les solutions sous la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma e^{r t} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{où} \quad (\gamma, \varphi) \in \mathbb{R}^2.$$

#### Exercice 4



##### ◆ Preuve dans le cas $\Delta > 0$

1. Démontrer que la fonction  $f$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de  $(\mathcal{E}_{a,b})$  si, et seulement si, la fonction  $g : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t) e^{-r_1 t}$  est solution de l'équation différentielle  $y'' + (2r_1 + a) y' = 0$ .
2. Résoudre l'équation différentielle :  $y' + (2r_1 + a) y = 0$
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $y'' + (2r_1 + a) y' = 0$ .
4. Conclure. *Indication.* On pourra justifier que  $r_1 + r_2 = -a$ .

# ceED4

**Remarque.** On pourra noter la forte analogie avec la résolution des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

#### Proposition 9 (Unicité du problème de Cauchy, ordre 2)

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Soient  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Alors il existe une unique solution sur  $\mathbb{R}$  vérifiant

$$y'' + ay' + by = 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

### Exercice 5



1. Donner les solutions des équations différentielles

$$\mathcal{E}_1: y'' = y' + 2y \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_2: y'' = 6y' - 9y.$$

2. Donner l'unique solution de  $\begin{cases} y'' = 6y' - 9y \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$

# ceED5

## 3.2 Solution particulière, résolution complète

L'idée est de reprendre les méthodes vues dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 1.

### Exercice 6.

1. Trouver une solution définie sur  $\mathbb{R}$  à chacune des équations suivantes.

# ceED 6 et 7

$$1. \quad 3y'' - 2y' + 4y = 1. \qquad 2. \quad 2y'' + 3y' - y = e^{2x}.$$

2. *Ordre 2 et second membre du type  $t \mapsto P(t)e^{at}$*

Soit  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction. Considérons l'équation différentielle définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$y'' - 5y' + 6y = F(x).$$

a) Résoudre l'équation homogène.

- b) 1. Déterminer une solution particulière où  $F: x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 e^x$ .  
*Chercher une solution sous la forme  $x \in \mathbb{R} \mapsto P(x)e^x$ .*

2. Même question avec  $F: x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 e^{2x}$ .

**Remarque.** Le principe de superposition est encore valable :

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $F_1, F_2$  deux fonctions continues sur  $I$ . Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions respectivement de

$$y'' + ay' + by = F_1 \quad \text{et} \quad y'' + ay' + by = F_2.$$

Alors, pour tous  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$  est solution de l'équation différentielle :  $y'' + ay' + by = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$ .

### Théorème 10 (Résolution complète)

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $F$  une fonction continue sur  $I$ . Considérons l'équation  $(\mathcal{E}): y'' + ay' + by = F$ .

- L'équation  $(\mathcal{E})$  admet au moins une solution. Notons  $f_0$  une solution.
- Toutes les solutions de  $(\mathcal{E})$  sont de la forme  $f_0 + f$  où  $f$  est une solution de l'équation homogène.



## Exercices



**Exercice 7.** ♦ Résoudre sur  $\mathbb{R}$ ,  $y + y' = y'' + y'''$  avec  $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$ .

# ceED9

**Exercice 8.** ♦ **Un exemple non linéaire**

# ceED10

Considérons l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}$  :

$$y' = y^2.$$

On suppose qu'il existe  $a \in \mathbb{R}_*^+$  et une solution  $f$  définie sur  $[0; a[$  avec  $f(0) \in \mathbb{R}_*^+$ .

1. Montrer que pour tout  $t \in [0; a[$ ,  $f(t) > 0$ .
2. On pose pour  $t \in [0; a[$ ,  $h(t) = 1/f(t)$ . Calculer  $h'$ . En déduire  $f$ .

**Exercice 9.** ♦ Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant

# ceED11

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(x) = \int_0^1 f(t) dt.$$

**Exercice 10.** ♦ Pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$  toutes les solutions de  $y'' + ay' + by = 0$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$ ?

# ceED12

**Exercice 11.** ♦ Déterminer les fonctions  $x$  et  $y$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que pour tout réel  $t$ ,

# ceED13

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{3}{2}x(t) + \frac{1}{2}y(t) \\ y'(t) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{3}{2}y(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$$

**Exercice 12.** ♦♦ Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que :

# ceED14

$$\exists \alpha \in \mathbb{C}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f'(t) + \alpha f(t) = 0$$

Montrer que si  $\Re(\alpha) > 0$ , alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ .

**Exercice 13.** ♦♦ L'objectif est de déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant

# ceED15

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + xf(-x) = 0.$$

On propose deux méthodes :

1. **a)** Justifier que toute fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.  
**b)** En déduire les solutions.
2. Former une équation différentielle d'ordre 2 sur  $f$ . En déduire  $f$ .

**Exercice 14.** ♦♦♦ **Équation différentielle et séries entières**

# ceED16

On considère l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}$  :

$$y' = xy + 1 \quad (\mathcal{E}_{s,e})$$

On suppose qu'il existe une solution particulière sous la forme d'une série entière. On pose donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .

1. Donner une relation de récurrence d'ordre 1 sur la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
2. Vérifier que la série obtenue a un rayon de convergence infini et qu'elle est bien solution de  $(\mathcal{E}_{s,e})$ .
3. Déduire de cette étude le développement en série entière de la fonction

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

On pourra noter que la fonction  $g$  est impaire.

**Exercice 15.** ♦♦♦ **Équation différentielle et séries de Fourier**

# ceED17

Soient  $\omega_0 \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$  et  $F$  une fonction  $2\pi$ -périodique telle que  $\sum |c_n(F)|$  converge. Dans la suite, on s'intéresse à l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y''(t) + \omega_0^2 y(t) = F(t) \quad (\mathcal{E}_{2\pi})$$

1. On suppose qu'il existe une solution particulière  $2\pi$ -périodique développable en série de Fourier  $y_p = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e_n$ .

- a) À l'aide de l'unicité de la décomposition de Fourier, exprimer  $d_n$  en fonction des coefficients  $c_n(F)$  de  $F$ .
  - b) En déduire l'expression explicite de  $y_p(t)$ .
  - c) Vérifier qu'il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n^2 |d_n| \leq C |c_n(F)|$ .  
*Précisons que cette condition permet de justifier que l'expression obtenue de  $y_p$  à la question précédente donne une fonction deux fois dérivable et que l'on peut dériver terme à terme.*
2. Donner l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{E}_{2\pi})$ .
  3. Que dire si  $\omega_0 \in \mathbb{N}^*$  ?
  4. Dans cette question, on considère la fonction  $F$ ,  $2\pi$ -périodique définie par  $F(t) = t$  sur  $] -\pi, \pi]$ . Donner l'unique solution de  $(\mathcal{E}_{2\pi})$  vérifiant  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .