CHAPITRE 4

Équations différentielles I

Il est important de souligner que la formulation mathématique de l'expérience souvent rudimentaire du physicien, conduit dans un nombre étonnant de cas à une description incroyablement précise d'une grande classe de phénomènes. Cela montre que le langage mathématique n'est pas seulement le seul langage que nous puissions parler ; ça montre qu'il est, dans un sens très réel, le bon langage.

The Unreasonnable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences
Eugene Wigner (1902-1995)

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ suivant le contexte.

1 Équations différentielles, structure des solutions

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction et faisant intervenir les dérivées successives. Par exemple, l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) - 2xy(x) = 0 \qquad (\mathscr{E})$$

La fonction $y : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$ est une solution sur $\mathbb{R}$, la fonction nulle $x \in \mathbb{R} \mapsto 0$ en est une autre. L'équation $(\mathscr{E})$ sera notée simplement $y' - 2xy = 0$.

Remarque. La notion de l'intervalle de définition de la solution est importante. Si on modifie l'intervalle, on peut très bien obtenir d'autres fonctions solutions. En pratique, on étudie l'équation différentielle sur le plus grand intervalle ou sur une réunion finie d'intervalles où l'équation est bien définie.

Vocabulaire.
→ *L'ordre de l'équation différentielle* est l'ordre de la plus grande dérivée intervenant dans l'équation. Ci-dessous, des équations différentielles d'ordre 1, 2 et 3.

$$y' + 2y = 1 + \mathrm{e}^x, \quad y'' - xy' = 0 \quad \text{et} \quad y^{(3)} - y'' = y' - y.$$

→ Une équation différentielle est dite *linéaire d'ordre n* si elle est de la forme

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = \mathrm{F}(x) \qquad (\mathscr{E})$$

où les a_i et F sont des fonctions continues sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$. Pour F, on parle de *second membre*.
→ Une équation différentielle linéaire est dite *homogène* si la fonction F est la fonction nulle :

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = 0 \qquad (\mathscr{E}_0)$$

→ De plus, on dit que l'équation est à coefficients constants si les fonctions a_i sont des fonctions constantes.

PROPOSITION **Structure vectoriel/affine**

→ *L'ensemble des solutions $\mathscr{S}_0$ de l'équation homogène $(\mathscr{E}_0)$ est un espace vectoriel.*
→ *L'ensemble des solutions de l'équation $(\mathscr{E})$ est, s'il est non vide, un espace affine. C'est-à-dire que si y_p est une fonction solution de $(\mathscr{E})$ alors l'ensemble des solutions est :*

$$\mathscr{S}_{\mathscr{E}} = \{y_p + y \mid y \in \mathscr{S}_0\}.$$

2 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

On s'intéresse à priori aux équations $\alpha(x)y' + \beta(x)y = f(x)$. En divisant par $\alpha(x)$, on peut se ramenant au cas

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad (\mathscr{E})$$

quitte à restreinte l'intervalle d'étude où la fonction α ne s'annule pas.

2.1 L'équation homogène

THÉORÈME **Toutes les solutions du cas homogène**

Soient
→ *l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$, où $a : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ est une fonction continue sur l'intervalle I ;*
→ *A une primitive de a sur I.*

***Alors**, l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions de $(\mathscr{E}_0)$ sur I est :*

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ x \in \mathrm{I} \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

Exercice 1

✧ *Les questions sont indépendantes.*

1. Résoudre sur $]0;1[$ l'équation $x(1-x)y' + y = 0$.
2. Que dire d'une fonction solution de $(\mathscr{E}_0)$ qui s'annule au moins une fois ?

ceED1

2.2 Une solution particulière

Une solution à vue

Reprenons le cas plus général de l'équation différentielle $y' + ay = \mathrm{F}$ où F, a sont deux fonctions définies sur un intervalle I. Afin de déterminer une solution de l'équation, on teste des fonctions du « même type » que F.

Exercice 2

✦ Considérons l'équation différentielle : $\quad y' - 2y = \mathrm{F} \quad (\mathscr{E}_\mathrm{F})$.

1. On suppose dans cette question que $\mathrm{F} : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$. Chercher une solution de $(\mathscr{E}_\mathrm{F})$ sous la forme d'une fonction polynomiale.
2. a) On suppose maintenant que $\mathrm{F} : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^x$. Chercher une solution sous la forme $x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \mathrm{e}^x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
   b) Dans cette question, on considère $\mathrm{F} : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{2x}$. Peut-on trouver une solution sous la forme $x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \mathrm{e}^{2x}$? $\quad x \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{2x}$?
3. Donner une solution de $y' - \ln(x)y = x^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

ceED2

Principe de superposition

THÉORÈME — **Principe de superposition**

Soient a, F_1, F_2 des fonctions sur I. Soient y_1 et y_2 deux solutions respectivement de

$$y' + a(x)y = F_1(x) \quad \text{et} \quad y' + ay = F_2(x).$$

Alors, pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution de l'équation différentielle

$$y' + a(x)y = \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x).$$

Preuve. Il suffit de poser le calcul.

$$\begin{aligned}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)' + a(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) &= \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' + a\lambda_1 y_1 + a\lambda_2 y_2 \\ &= \lambda_1 (y_1' + ay_1) + \lambda_2 (y_2' + ay_2) = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2.\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Exemple. En reprenant l'exercice précédent, une solution particulière de $y' - 2y = 3x^2 - e^{2x}$ est donnée à partir des solution particulière de $y' - 2y = x^2$ et $y' - 2y = e^x$.

Méthode de la variation de la constante

Partons de $(\mathscr{E})$: $y' + a(x)y(x) = F(x)$ avec a continue. On a vu que les solutions de l'équation homogène sont du type

$$x \in I \mapsto \lambda e^{-A(x)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A \text{ une primitive de } a \\ \lambda \text{ une constante.} \end{cases}$$

L'idée est alors est de chercher une solution particulière de $(\mathscr{E})$ sous la forme

$$y_p : x \in I \mapsto \lambda(x) e^{-A(x)}$$

où λ est maintenant une fonction dérivable. Ainsi pour tout $x \in I$,

$$y_p'(x) + a(x)y_p(x) = \lambda'(x)e^{-A(x)} - a(x)\lambda(x)e^{-A(x)} + a\lambda(x)e^{-A(x)} = \lambda'(x)e^{-A(x)}.$$

Ainsi y_p est solution de $(\mathscr{E})$ si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad \lambda'(x)e^{-A(x)} = F(x) \iff \forall x \in I, \quad \lambda'(x) = F(x)e^{A(x)}$$

si et seulement si λ est une primitive de $x \in I \mapsto F(x)e^{A(x)}$. Par exemple, pour $x_0 \in I$, on a

$$\lambda(x) = \int_{x_0}^{x} F(t)e^{A(t)}\,dt \quad \text{puis} \quad y_p(x) = \int_{x_0}^{x} F(t)e^{A(t)-A(x)}\,dt.$$

2.3 Bilan

THÉORÈME — **Résolution complète**

Soient a et F deux fonctions continues sur I. Considérons l'équation

$$y' + a(x)y = F(x) \qquad (\mathscr{E}).$$

- *L'équation $(\mathscr{E})$ admet au moins une solution.*
  Notons f_0 une solution.
- *Toutes les solutions de $(\mathscr{E})$ sont de la forme $f_0 + f$ où f est une solution de l'équation homogène.*

PROPOSITION — **Unicité du problème de Cauchy, ordre 1**

Soient a et F deux fonctions continues sur un intervalle ouvert I. Considérons l'équation

$$y' + a(x)y = \mathrm{F}(x) \qquad (\mathscr{E}).$$

Alors, pour tout $x_0 \in \mathrm{I}$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une et une seule solution y telle que $y(x_0) = y_0$.

Preuve. D'après ce qui précède une solution y est du type :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \qquad y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} + \lambda \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La constante est déterminée de manière unique pour avoir la condition $y(x_0) = y_0$. ■

Exemple. Vérifier que la solution de $y' + y = \mathrm{e}^x + 1$ avec $y(1) = 2$ est donnée par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad y(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + 1 + \left(\mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

Exercice 3

✦ **Un exemple complet avec un raccord**

On considère l'équation différentielle $(\mathscr{E})$: $x^3 y' + \left(2 - 3x^2\right) y = x^3$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ sur $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.
2. Peut-on trouver une solution sur $\mathbb{R}$?
3. Trouver la solution sur $]0, +\infty[$ vérifiant $y(1) = 0$.

ceED3

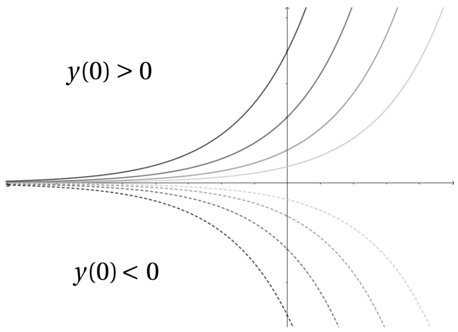
2.4 Interprétation graphique, champs de vecteurs

DÉFINITION — **Trajectoires**

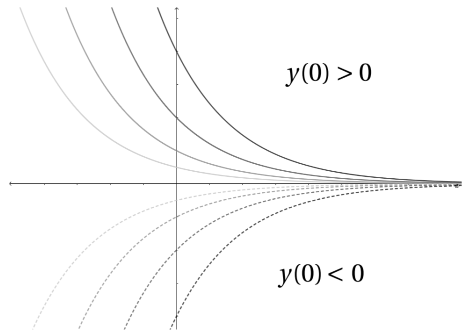
Soit $(\mathscr{E})$ une équation différentielle dont y est une solution.
*La **trajectoire** est l'ensemble de points de $\mathbb{R}^2$ défini par :* $\quad \mathscr{T} = \left\{ \left(t, y(t)\right) \mid t \in \mathrm{I} \right\}.$

Exemple. Ci-dessous, les trajectoires des solutions de $y' + ay = 0$ où a est une constante avec différentes conditions initiales.

Si $a < 0$



Si $a > 0$



D'après l'unicité du problème de Cauchy, les trajectoires d'une équation différentielles d'ordre 1 ne peuvent se croiser. Ce résultat s'étend aux équations différentielles linéaires d'ordre 1 avec un second membre non nul.

Application. Soit f, la fonction solution sur $\mathbb{R}$ de $y' + y/2 = 1$ et $y(0) = 1$. Justifions sans calculs que f est majorée par 2. La fonction constante égale à 2 est aussi une autre solution de l'équation différentielle $y' + y/2 = 1$. Or, les trajectoires ne peuvent se croiser et $f(0) = 1$. À l'aide du théorème des valeurs intermédiaires (f est continue), la courbe de f est en-dessous de la droite d'équation $y = 2$. Autrement dit, la fonction f est majorée par 2.

Revenons à l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ avec φ une solution. on peut retraduire le problème avec une fonction f de deux variables :

$$\forall\, t \in \mathrm{I}, \qquad \varphi'(t) = f\big(t, \varphi(t)\big) \quad \text{où} \quad f(x, y) = b(x) - a(x)y.$$

On construit alors *un champ de vecteurs* où en tout point (x, y), on place le vecteur $\big(1, f(x, y)\big)$.

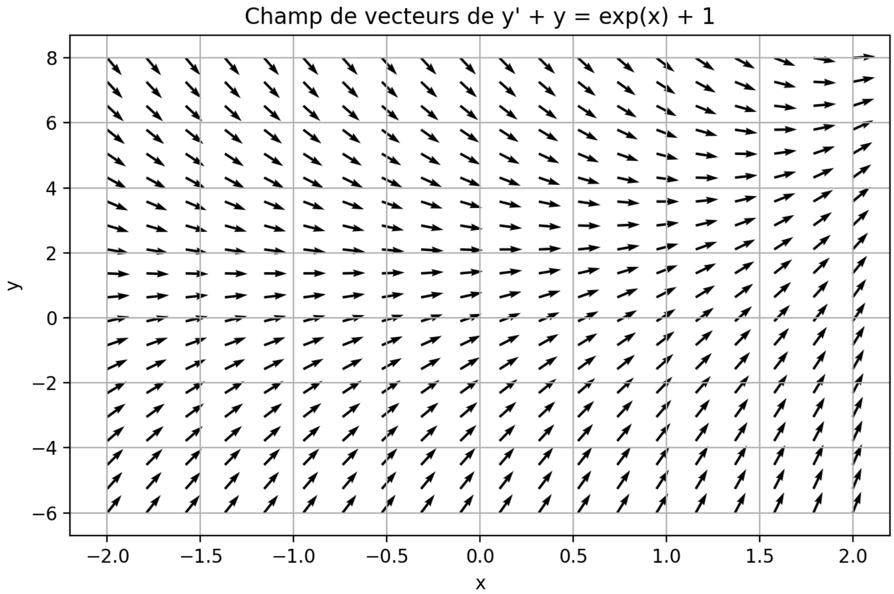
Exemple. Voici par exemple, le champ de vecteurs associé à l'équation $y' + y = \mathrm{e}^x + 1$.

Editeur

```
# Fonction définissant y' = f(x,y)
def f(x, y):
    return np.exp(x) + 1 - y

# Grille de points
x = np.linspace(-2, 2, 20)
y = np.linspace(-6, 8, 20)
X, Y = np.meshgrid(x, y)

# Composantes du champ
U = np.ones_like(X)
V = f(X, Y)
```

Editeur

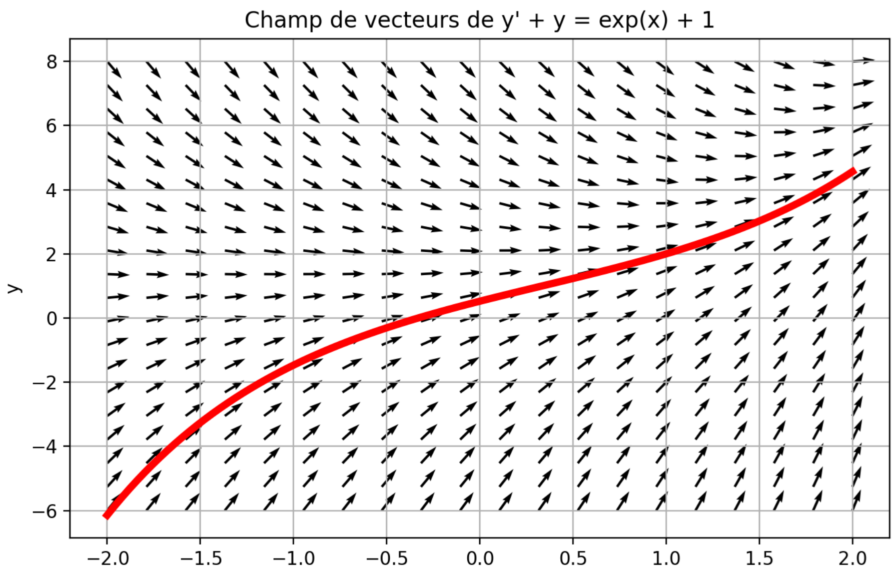
```
# Normalisation pour avoir des flèches
    de taille comparable
N = np.sqrt(U**2 + V**2)
U_norm = U / N
V_norm = V / N

# Tracé
plt.quiver(X, Y, U_norm, V_norm,
  angles='xy')
plt.show()
```



Pour $t \in \mathrm{I}$, fixé. La tangente à la solution φ en t a pour équation cartésienne $y = \varphi'(t)(x - t) + \varphi(t)$. L'équation paramétrique est donnée par un point A : $\big(t, \varphi(t)\big)$ et un vecteur directeur $u = \big(1, \varphi'(t)\big)$. Comme φ est solution, le vecteur directeur s'écrit aussi $u = \big(1, f(t, \varphi(t))\big)$. Ainsi, le champ de vecteur donne les vecteurs directeurs des tangentes. La courbe de la solution suit alors les lignes données par le champ de vecteur. Illustrons ce résultat avec l'exemple en rajoutant les lignes :

Editeur

```
t=np.linspace(-2, 2, 100)
phi=np.exp(t)/2+1+(np.exp(1)-np.exp(1)**2/2)*np.exp(-t)
plt.plot(t,phi,'r-')
```



3 Équations diff. linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Reprenons la présentation du cas linéaire d'ordre 1 pour le cas de l'ordre 2 en se limitant à des coefficients constants. On étudie donc

$$y'' + ay + by = \mathrm{F} \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathrm{F} \text{ continue sur I.}$$

3.1 Le cas homogène

Dans ce paragraphe, on étudie l'équation homogène : $y'' + ay' + by = 0 \quad (\mathscr{E}_{a,b})$.

Remarque. La première idée est de chercher les solutions sous la forme exponentielle $t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$. On montre que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = r^2\mathrm{e}^{rt} + ar\mathrm{e}^{rt} + b\mathrm{e}^{rt} = \left(r^2 + ar + b\right)\mathrm{e}^{rt}.$$

Si r est solution de $r^2 + ar + b = 0$, alors $y : t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$ est une solution de l'équation différentielle ($\mathscr{E}_{a,b}$)). Cela motive la définition suivante.

DÉFINITION — Équation caractéristique

L'équation caractéristique *de l'équation homogène* $(\mathscr{E}_{a,b})$ *est* $x^2 + ax + b = 0$ *d'inconnue* $x \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des solutions va dépendre du nombre de solutions réelles, c'est-à-dire du discriminant de l'équation caractéristique.

THÉORÈME **Formule explicite**

Notons Δ, le discriminant de l'équation caractéristique de $(\mathscr{E}_{a,b})$.

- *Si $\Delta > 0$, alors il y a deux racines réelles distinctes r_1, r_2 et toutes les solutions s'écrivent sous la forme*

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \quad \text{où} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

- *Si $\Delta = 0$, alors il y a une racine double r et toutes les solutions s'écrivent sous la forme*

$$t \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda t + \mu) e^{r t} \quad \text{où} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

- *Si $\Delta < 0$, alors il y a deux racines complexes conjuguées $r + i\omega$, $r - i\omega$ et toutes les solutions s'écrivent sous la forme*

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{r t}\big(\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)\big) \quad \text{où} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Remarque. Dans le cas où le discriminant est négatif, on peut aussi mettre les solutions sous la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma e^{r t} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{où} \quad (\gamma, \varphi) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 4

✦ **Preuve dans le cas $\Delta > 0$**

1. Démontrer que la fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathscr{E}_{a,b})$ si, et seulement si, la fonction $g : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t) e^{-r_1 t}$ est solution de l'équation différentielle
$$y'' + (2r_1 + a)\, y' = 0.$$
2. Résoudre l'équation différentielle : $y' + (2r_1 + a)\, y = 0$
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y'' + (2r_1 + a)\, y' = 0$.
4. Conclure. *Indication. On pourra justifier que $r_1 + r_2 = -a$.*

ceED4

Remarque. On pourra noter la forte analogie avec la résolution des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

PROPOSITION **Unicité du problème de Cauchy**

Soient a, $b \in \mathbb{R}$. Soient $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$y'' + a y' + b y = 0 \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y(t_0) & = & y_0 \\ y'(t_0) & = & y_1. \end{array} \right.$$

Preuve. Traitons le cas où le discriminant de l'équation caractéristique est strictement positif. Les cas d'un discriminant négatif ou nul est similaire.

• *Unicité.* Supposons qu'il existe y une solution du problème de Cauchy. D'après le théorème précédent, il existe λ, $\mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les deux racines de l'équation caractéristique. De plus

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = \lambda r_1 e^{r_1 t} + \mu r_2 e^{r_2 t}.$$

Les conditions initiales donnent

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y(t_0) & = & y_0 \\ y'(t_0) & = & y_1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} e^{r_1 t_0} \lambda + e^{r_2 t_0} \mu & = & y_0 \\ r_1 e^{r_1 t_0} \lambda + r_2 e^{r_2 t_0} \mu & = & y_1 \end{array} \right.$$

Il est possible de résoudre ce système directement mais donnons une preuve matricielle. Si on pose

$$A = \begin{bmatrix} e^{r_1 t_0} & e^{r_2 t_0} \\ r_1 e^{r_1 t_0} & r_2 e^{r_2 t_0} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Le système linéaire précédent d'inconnue (λ, μ) devient $AX = B$. Or $\det A = e^{t_0(r_1 + r_2)}(r_2 - r_1) \neq 0$ car les racines sont distinctes. La matrice A est inversible, $X = A^{-1}B$ et il y a un unique couple (λ, μ) solution. La solution y (si elle existe) est unique.

• *Existence.* Soit (λ, μ), la solution du système linéaire précédent, on vérifie que $y : t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ est solution.

• *Conclusion.* La solution existe et elle est unique. ■

Exercice 5

✦ **1.** Donner les solutions des équations différentielles

$$\mathscr{E}_1 : \quad y'' = y' + 2y \quad \text{et} \quad \mathscr{E}_2 : \quad y'' = 6y' - 9y.$$

2. Donner l'unique solution de $\begin{cases} y'' = 6y' - 9y \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$

ceED5

3.2 Recherche d'une solution particulière

L'idée est de reprendre les méthodes vues dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 1.

Exercice 6

✧ Trouver une solution définie sur $\mathbb{R}$ à chacune des équations suivantes.

1. $3y'' - 2y' + 4y = 1.$
2. $2y'' + 3y' - y = \mathrm{e}^{2x}.$

ceED6

Exercice 7

✦ **Ordre 2 et second membre du type $\mathbf{t \mapsto P(t)e^{at}}$**
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction. Considérons l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y'' - 5y' + 6y = F(x).$$

1. Résoudre l'équation homogène.

2. **a)** Déterminer une solution particulière où $F : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2\mathrm{e}^x$.
Chercher une solution sous la forme $x \in \mathbb{R} \mapsto P(x)\mathrm{e}^x$.

b) Même question avec $F : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2\mathrm{e}^{2x}$.

ceED7

Remarque. Le principe de superposition est encore valable :
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, F_1, F_2 deux fonctions continues sur I. Soient y_1 et y_2 deux solutions respectivement de

$$y'' + ay' + by = F_1 \quad \text{et} \quad y'' + ay' + by = F_2.$$

Alors, pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2.$$

Exercice 8

✧ Prouver cet énoncé.

ceED8

3.3 Résolution complète

THÉORÈME — **Résolution complète**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et F une fonction continue sur I. Considérons l'équation $(\mathscr{E})$: $y'' + ay' + by = F$.

- *L'équation $(\mathscr{E})$ admet au moins une solution. Notons f_0 une solution.*
- *Toutes les solutions de $(\mathscr{E})$ sont de la forme $f_0 + f$ où f est une solution de l'équation homogène.*

Exercices

Exercice 9. ✧ Résoudre sur $\mathbb{R}$, $y+y'=y''+y'''$ avec $y(0)=y'(0)=y''(0)=1$. # ceED9

Exercice 10. ✧ **Un exemple non linéaire** # ceED10

Considérons l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$y'=y^2.$$

On suppose qu'il existe $a\in\mathbb{R}_*^+$ et une solution f définie sur $[0;a[$ avec $f(0)\in\mathbb{R}_*^+$.

1. Montrer que pour tout $t\in[0;a[,\quad f(t)>0$.
2. On pose pour $t\in\left[0;a\right[, h(t)=1/f(t)$. Calculer h'. En déduire f.

Exercice 11. ✦ Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant # ceED11

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f'(x)+f(x)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 12. ✦ Pour quelles valeurs de a et b toutes les solutions de $y''+ay'+by=0$ sont bornées sur $\mathbb{R}$? # ceED12

Exercice 13. ✦ Déterminer les fonctions x et y dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel t, # ceED13

$$\begin{cases} x'(t)=\dfrac{3}{2}x(t)+\dfrac{1}{2}y(t)\\ y'(t)=\dfrac{1}{2}x(t)+\dfrac{3}{2}y(t)\end{cases}\quad\text{et}\quad x(0)=1,\quad y(0)=-1.$$

Exercice 14. ✦✦ Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que : # ceED14

$$\exists\alpha\in\mathbb{C},\qquad \lim_{t\to\infty} f'(t)+\alpha f(t)=0$$

Montrer que si $\Re e(\alpha)>0$, alors $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=0$.

Exercice 15. ✦✦ L'objectif est de déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant # ceED15

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f'(x)+xf(-x)=0.$$

On propose deux méthodes :

1. **a)** Justifier que toute fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
   b) En déduire les solutions.
2. Former une équation différentielle d'ordre 2 sur f. On pose pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\mathrm{e}^{x^2/2}f(x)$. Donner une relation entre g' et g''. En déduire f.

Exercice 16. ✦✦✦ **Équation différentielle et séries entières** # ceED16

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$y'=xy+1\qquad(\mathscr{E}_{\text{s.e}})$$

On suppose qu'il existe une solution particulière sous la forme d'une série entière. On pose donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $y_p(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.

1. Donner une relation de récurrence d'ordre 1 sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Vérifier que la série obtenue a un rayon de convergence infini et qu'elle est bien solution de $(\mathscr{E}_{\text{s.e}})$.
3. Déduire de cette étude le développement en série entière de la fonction

$$g: x\in\mathbb{R}\mapsto \mathrm{e}^{x^2/2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

On pourra noter que la fonction g est impaire.

Exercice 17. ✦✦✦ **Équation différentielle et séries de Fourier** # ceED17

Soient $\omega_0 \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ et F une fonction 2π-périodique telle que $\sum |c_n(\mathrm{F})|$ converge. Dans la suite, on s'intéresse à l'équation différentielle

$$y''(t) + {\omega_0}^2 y(t) = \mathrm{F}(t) \qquad (\mathscr{E}_{2\pi})$$

1. On suppose qu'il existe une solution particulière 2π-périodique développable en série de Fourier $y_p = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e_n$.

a) À l'aide de l'unicité de la décomposition de Fourier, exprimer d_n en fonction des coefficients $c_n(\mathrm{F})$ de F.

b) En déduire l'expression explicite de $y_p(t)$.

c) Vérifier qu'il existe une constante C telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $n^2|d_n| \leqslant \mathrm{C}|c_n(\mathrm{F})|$.
Précisons que cette condition permet de justifier que l'expression obtenue de y_p à la question précédente donne une fonction deux fois dérivable et que l'on peut dériver terme à terme.

2. Donner l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E}_{2\pi})$.

3. Que dire si $\omega_0 \in \mathbb{N}^*$?

4. Dans cette question, on considère la fonction F, 2π-périodique définie par $\mathrm{F}(t) = t$ sur $]-\pi, \pi]$. Donner l'unique solution de $(\mathscr{E}_{2\pi})$ vérifiant $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Indications et solutions

Exercice 2

1.a) Soient a, b, $c \in \mathbb{R}$. Testons si la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = at^2 + bt + c$ est solution. Pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y'(t) - 2y(t) &= 2at + b - 2\left(at^2 + bt + c\right) \\ &= -2at^2 + (2a - 2b)t + (b - 2c). \end{aligned}$$

La fonction y est solution si et seulement si (a, b, c) est solution du système linéaire

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ 2a - 2b = 0 \\ b - 2c = 0. \end{cases}$$

On trouve $a = -1/2$, $b = a = -1/2$ et $c = b/2 = -1/4$. Finalement, une solution est :

$$\boxed{y : t \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{1}{2}\left(t^2 + t + \frac{t}{2}\right).}$$

2.a) Posons $y : t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^t$.

$$y'(t) - 2y(t) = (\lambda - 2\lambda)e^t = -\lambda e^t.$$

Pour $\lambda = -1$, on a une solution

$$\boxed{t \in \mathbb{R} \mapsto -e^t.}$$

2.b) La fonction $t \mapsto \lambda e^{2t}$ ne peut être une solution car on reconnaît une solution de l'équation homogène $y' - 2y = 0$. Cherchons une solution sous la forme $y : t \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda t + \mu)e^{2t}$. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$y'(t) - 2y(t) = \lambda e^{2t}.$$

Si on choisit $\lambda = 1$, $\mu = 0$, on a bien $y'(t) - 2y(t) = e^{2t}$. Une solution est

$$\boxed{t \in \mathbb{R} \mapsto t e^{2t}.}$$

Exercice 4

1. Soit f, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction g est deux fois dérivable par produit. Pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'(t)e^{-r_1 t} - r_1 f(t)e^{-r_1 t} \\ &= \left(f'(t) - r_1 f(t)\right)e^{-r_1 t}. \\ g''(t) &= \left(f''(t) - r_1 f'(t)\right)e^{-r_1 t} - r_1\left(f'(t) - r_1 f(t)\right)e^{-r_1 t} \\ &= \left(f''(t) - 2r_1 f'(t) + r_1{}^2 f(t)\right)e^{-r_1 t}. \end{aligned}$$

Ainsi $\quad g''(t) + (2r_1 + a)\,g'(t)$

$$\begin{aligned} &= f''(t)e^{-r_1 t} + (-2r_1 + 2r_1 + a)\,f'(t)e^{-r_1 t} \\ &\quad + \left(r_1{}^2 - r_1(2r_1 + a)\right)f(t)e^{-r_1 t}. \\ &= f''(t)e^{-r_1 t} + af'(t)e^{-r_1 t} - \left(r_1{}^2 + r_1 a\right)f(t)e^{-r_1 t}. \end{aligned}$$

Or r_1 est une racine de l'équation caractéristique

$$r_1{}^2 - ar_1 + b = 0.$$

D'où $\quad g''(t) + (2r_1 + a)\,g'(t)$

$$= \left(f''(t) + af'(t) + bf(t)\right)e^{-r_1 t}.$$

Comme pour tout $e^{-r_1 t} \neq 0$, f est solution de $(\mathscr{E}_{a,b})$ si et seulement si g est solution de

$$y'' + (2r_1 + a)\,y' = 0.$$

2. On a une équation différentielle linéaire d'ordre 1, les solutions sont

$$\boxed{t \in \mathbb{R} \mapsto Ce^{-(2r_1 + a)t} \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}.}$$

3. La fonction g est solution de l'équation $y'' + (2r_1 + a)y' = 0$ si et seulement si g' est solution de $y' + (2r_1 + a)\,y = 0$. D'après la question précédente, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = C\,e^{-(2r_1 + a)t}.$$

Par intégration, il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$g(t) = \frac{-C}{(2r_1 + a)}\,e^{-(2r_1 + a)t} + C_2.$$

En renommant la première constante, il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = C_1\,e^{-(2r_1 + a)t} + C_2.}$$

4. f est solution de E si et seulement si il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t)e^{-r_1 t} = g(t) = C_1\,e^{-(2r_1 + a)t} + C_2.$$

D'où $\qquad f(t) = C_1 e^{\left(r_1 - (2r_1 + a)\right)t} + C_2 e^{r_1 t}.$

Or r_1 et r_2 sont les deux racines de l'équation caractéristique, d'après les relations coefficients-racines

$$r_1 + r_2 = -a \quad \text{puis} \quad r_1 - (2r_1 + a) = r_2.$$

Finalement, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{f(t) = C_1 e^{r_2 t} + C_2 e^{r_1 t}.}$$

Exercice 5

1.• L'équation caractéristique associée à $(\mathscr{E}_1)$ est

$$r^2 = r + 2 \iff r^2 - r - 2 = 0.$$

Le discriminant est strictement positif. Il y a deux racines distinctes $r_1 = -1, r_2 = 2$. Les solutions sont

$$\boxed{t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-t} + \mu \mathrm{e}^{2t} \quad \text{où} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

- L'équation caractéristique associée à $(\mathscr{E}_2)$ est

$$r^2 = 6r - 9 \iff (r-3)^3 = r^2 - 6r + 9 = 0.$$

Le discriminant est nul. Les solutions sont

$$\boxed{t \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda t + \mu)\mathrm{e}^{3t} \quad \text{où} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

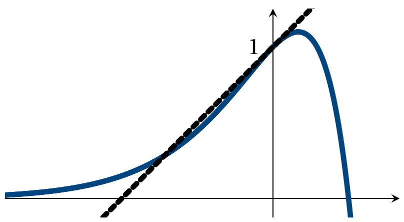
2. La condition $y(0) = y'(0) = 1$ impose le système

$$\begin{aligned}(\lambda \times 0 + \mu)\mathrm{e}^0 &= 1\\ (3\lambda \times 0 + \lambda + 3\mu)\mathrm{e}^{3\times 0} &= 1.\end{aligned}$$

On trouve $\lambda = -2$, $\mu = 1$. L'unique solution est

$$\boxed{t \in \mathbb{R} \mapsto (1-2t)\mathrm{e}^{3t}.}$$

Graphiquement. Les conditions $y(0) = y'(0) = 1$ impose que la tangente à la courbe en 0 est $y = 1 + x$.



Exercice 6

Cherchons, dans chacun des cas, une solution du même « type » que le second membre.

1. Soit $y = c$ une fonction constante égale à c.

$$3y'' - 2y' + 4y = 4c \quad \text{d'où} \quad c = \frac{1}{4}.$$

$$\boxed{t \in \mathbb{R} \mapsto \tfrac{1}{4} \text{ est une solution.}}$$

2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y : t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \mathrm{e}^{2t}$.

$$2y'' + 3y' - y = 2\lambda \times 4\mathrm{e}^{2t} + 3\lambda \times 2\mathrm{e}^{2t} - \lambda \mathrm{e}^{2t} = 10\lambda \mathrm{e}^{2t}.$$

On en déduit que

$$\boxed{t \in \mathbb{R} \mapsto \tfrac{1}{10}\mathrm{e}^{2t} \text{ est une solution.}}$$

Exercice 7

1. L'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6 = 0$. Il y a deux racines : 2 et 3. Les solutions de l'équation homogène sont

$$\boxed{x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \mathrm{e}^{2x} + \mu \mathrm{e}^{3x} \quad \text{où} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$

2.(a) Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$. Soit y définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = \mathrm{P}(x)\mathrm{e}^x.$$

La fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit.

$$\begin{aligned}y'(x) &= \mathrm{P}'(x)\mathrm{e}^x + \mathrm{P}(x)\mathrm{e}^x = \big(\mathrm{P}'(x) + \mathrm{P}(x)\big)\mathrm{e}^x.\\ y''(x) &= \big(\mathrm{P}''(x) + 2\mathrm{P}'(x) + \mathrm{P}(x)\big)\mathrm{e}^x.\end{aligned}$$

Puis $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x)$

$$\begin{aligned}&= \big(\mathrm{P}''(x) + 2\mathrm{P}'(x) + \mathrm{P}(x) - 5\mathrm{P}'(x) - 5\mathrm{P}(x) + 6\mathrm{P}(x)\big)\mathrm{e}^x\\ &= \big(\mathrm{P}''(x) - 3\mathrm{P}'(x) + 2\mathrm{P}(x)\big)\mathrm{e}^x.\end{aligned}$$

La fonction y est une solution particulière si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{P}''(x) - 3\mathrm{P}'(x) + 2\mathrm{P}(x) = x^2 \quad (\bullet)$$

P est nécessairement de degré 2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$. Vérifier que $(\bullet)$ devient

$$2ax^2 + (b - 6a)x + 2a - 3b + c = 0.$$

Par unicité des coefficients

$$2a = 1, \quad b = 3, \quad c = 8.$$

Finalement, une solution particulière est donnée par

$$\boxed{x \in \mathbb{R} \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + 3x + 8\right)\mathrm{e}^x.}$$

2.(b) Reprenons la question précédente. Cherchons une solution sous la forme $y : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{P}(x)\mathrm{e}^{2x}$. Vérifier que

$$\begin{aligned}&y''(x) - 5y'(x) + 6y(x)\\ &= \big(\mathrm{P}''(x) - \mathrm{P}'(x)\big)\mathrm{e}^{2x}.\end{aligned}$$

Remarque. Noter que contrairement au cas précédent, il n'y a plus de terme $\mathrm{P}(x)$ car 2 est une racine de l'équation caractéristique.

La fonction y est solution si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}''(x) - \mathrm{P}'(x) = x^2.$$

Le polynôme P est nécessairement de degré 3. Soient a, b, c, d quatre réels tels que $\mathrm{P}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ de sorte que

$$\mathrm{P}''(x) - \mathrm{P}'(x) = -3ax^2 + (-2b + 6a)x + 2b - c.$$

D'où $\quad -3a = 1, \quad 6a - 2b = 0, \quad 2b - c = 0.$

C'est-à-dire $\quad a = -1/3, \quad b = -1, \quad c = -2.$

On choisit $d = 0$. Une solution est

$$\boxed{y : x \in \mathbb{R} \mapsto \left(-\frac{x^3}{3} - x^2 - 2x\right)\mathrm{e}^{2x}.}$$

Exercice 8

On a $\begin{cases} y_1'' + ay_1' + by_1 = \mathrm{F}_1\\ y_2'' + ay_2' + by_2 = \mathrm{F}_2.\end{cases}$

D'où par linéarité de la dérivation

$$\begin{aligned}&(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)'' + a(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)' + b(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)\\ =&\lambda_1\left(y_1'' + ay_1' + by_1\right) + \lambda_2\left(y_2'' + ay_2' + by_2\right)\\ =&\lambda_1 \mathrm{F}_1 + \lambda_2 \mathrm{F}_2.\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 9

Soit y une solution (si cela existe).
Posons $f = y + y'$. De sorte que f est solution de l'équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants

$$f = f''.$$

L'équation caractéristique est $x^2 = 1$, il y a deux racines -1 et 1. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout réel t

$$f(t) = \lambda e^t + \mu e^{-t}.$$

Or les conditions initiales

$$f(0) = y(0) + y'(0) = 2, \quad f'(0) = y'(0) + y''(0) = 2$$

donnent $\lambda = 2$, $\mu = 0$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$y(t) + y'(t) = f(t) = 2e^t.$$

y est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants avec un second membre de type « exponentiel ». Les solutions de l'équation homogène sont $t \mapsto Ce^{-t}$ où $C \in \mathbb{R}$. Une solution particulière est $t \in \mathbb{R} \mapsto e^t$. Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$y : t \in \mathbb{R} \mapsto e^t + Ce^{-t}.$$

La condition $y(0) = 1$ impose $C = 0$. Finalement,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = e^t.$$

Réciproquement, on vérifie directement que la fonction exponentielle est solution. En conclusion,

$$\boxed{\text{Seule la fonction exponentielle est solution !}}$$

Remarque. En admettant que l'unicité du problème de Cauchy est encore vraie pour les équations différentielles linéaires à coefficients constants à l'ordre 3. Il aurait suffit de remarquer que l'exponentielle est solution. C'est donc la seule.

Exercice 10

1. Pour tout $t \in [0; a[$, $f'(t) = f(t)^2 \geqslant 0$.
La fonction f est donc croissante sur l'intervalle $[0; a[$. Comme $f(0) > 0$,

$$\boxed{f \text{ est strictement positive.}}$$

2. La fonction h est bien définie sur $[0; a[$ car f ne s'annule pas. De plus, h est dérivable sur $[0; a[$ par quotient. Pour $t \in [0; a[$

$$h'(t) = -\frac{f'(t)}{f(t)^2} = \boxed{-1}$$

car f est solution de $y' = y^2$. Par intégration, il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, t \in [0; a[, \quad h(t) = c - t.$$

Comme $\frac{1}{f(0)} = h(0) = c$, on peut écrire

$$\forall\, t \in [0; a[\quad h(t) = \frac{1}{f(0)} - t = \frac{1 - f(0)t}{f(0)}$$

Puis $$\boxed{f(t) = \frac{1}{h(t)} = \frac{f(0)}{1 - f(0)t}.}$$

Remarque. Si on choisit a afin d'avoir le plus grand intervalle de définition pour f, alors $a = \frac{1}{f(0)}$.

Exercice 13

Donnons deux méthodes.

→ *Méthode 1.*
Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$u(t) = x(t) + y(t), \quad v(t) = x(t) - y(t).$$

Par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} u'(t) &= x'(t) + y'(t) \\ &= \frac{3}{2}x(t) + \frac{1}{2}y(t) + \frac{1}{2}x(t) + \frac{3}{2}y(t) \\ &= 2\big(x(t) + y(t)\big) \\ u'(t) &= 2u(t). \end{aligned}$$

et, de même $$v'(t) = v(t).$$

u et v sont solutions d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} x(t) + y(t) = \lambda e^{2t} & L_1 \\ x(t) - y(t) = \mu e^t & L_2 \end{cases}$$

En effectuant $(L_1 + L_2)/2$ et $(L_1 - L_2)/2$, on obtient

$$x(t) = \frac{\lambda}{2}e^{2t} + \frac{\mu}{2}e^t, y(t) = \frac{\lambda}{2}e^{2t} - \frac{\mu}{2}e^t.$$

De plus, les conditions initiales $x(0) = 1$, $y(0) = -1$ imposent

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2} = 1 \\ \frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2} = -1. \end{cases}$$

On trouve $\lambda = 0$ et $\mu = 2$. En conclusion

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = e^t, \quad y(t) = -e^t.}$$

→ *Méthode 2.*
La dérivée x' est somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (x et y). x' est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x''(t) &= \frac{3}{2}x'(t) + \frac{1}{2}y'(t) \\ &= \frac{3}{2}x'(t) + \frac{1}{2}\left(x(t) + \frac{3}{2}y(t)\right) \\ &= \frac{3}{2}x'(t) + \frac{1}{2}x(t) + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}y(t) \\ &= \frac{3}{2}x'(t) + \frac{1}{2}x(t) + \frac{3}{2}\left(x'(t) - \frac{3}{2}x(t)\right) \\ x''(t) &= 3x'(t) - 2x(t). \end{aligned}$$

La fonction x est donc solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants dont l'équation caractéristique est

$$r^2 - 3r + 2 = 0.$$

Le discriminant est strictement positif avec deux racines 1 et 2. Il existe λ, $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = \lambda e^{t} + \mu e^{2t}.$$

On détermine λ, μ à l'aide des conditions initiales $x(0) = 1$ et

$$x'(0) = \frac{3}{2}x(0) + \frac{1}{2}y(0) = 1.$$

On trouve $\lambda = 1$, $\mu = 0$ et donc $x(t) = e^{t}$. Enfin, on trouve y en écrivant

$$y(t) = x'(t) - \frac{3}{2}x(t) = -e^{t}.$$

Exercice 14

Soit $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$f' + \alpha f = g \quad (\star)$$

Par hypothèse, on a $g(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Explicitons la fonction f. Les solutions de l'équation homogène sont :

$$t \mapsto \lambda e^{-\alpha t} \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Cherchons une solution particulière à l'aide de la méthode de la variation de la constante. On pose pour tout réel t

$$y(t) = \lambda(t) e^{-\alpha t}$$

et y est solution de $(\star)$ si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = y'(t) + \alpha y(t) = \lambda'(t) e^{-\alpha t}.$$

Soit $\qquad \lambda'(t) = g(t) e^{\alpha t}.$

Une possibilité est :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \lambda(t) = \int_0^t g(x) e^{\alpha x} \, dx.$$

Il vient

$$y(t) = \int_0^t g(x) e^{\alpha(x-t)} \, dx.$$

On a donc l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \lambda e^{-\alpha t} + \int_0^t g(x) e^{\alpha(x-t)} \, dx$$

et étudions la limite en $+\infty$.
Pour simplifier les notations, on pose $\alpha_r = \Re e(\alpha)$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$. Par définition de la limite, il existe $A \in \mathbb{R}_*^+$ tel que

$$\forall t \geqslant A, \qquad |g(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Notons aussi que par continuité sur $[0;A]$, g est bornée sur $[0;A]$ et donc en regroupant g est bornée sur $\mathbb{R}$. Notons M une borne.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad |g(t)| \leqslant M.$$

À l'aide de l'inégalité triangulaire et la relation de Chasles, on a pour tout $t \geqslant A$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t g(x) e^{\alpha(x-t)} \, dx\right| &\leqslant \int_0^A \left|g(x) e^{\alpha(x-t)}\right| dx + \int_A^t \left|g(x) e^{\alpha(x-t)}\right| dx \\ &\leqslant M \int_0^A e^{\alpha_r(x-t)} \, dx + \varepsilon \int_A^t e^{\alpha_r(x-t)} \, dx \\ &\leqslant \frac{M}{\alpha_r} e^{\alpha_r(A-t)} + \frac{\varepsilon}{\alpha_r}.\end{aligned}$$

Or $e^{\alpha_r(A-t)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\alpha_r > 0$. On peut donc trouver $B > 0$ tel que

$$\forall t \geqslant B, \qquad e^{\alpha(A-t)} \leqslant \frac{\varepsilon}{M}.$$

Dans ce cas

$$\forall t \geqslant B, \qquad \left|\int_0^t g(x) e^{\alpha(x-t)} \, dx\right| \leqslant \frac{2\varepsilon}{\alpha_r}.$$

Avec $\varepsilon \leftarrow \varepsilon\alpha_r/2$, on a prouvé :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B > 0, \text{tel que } \left|\int_0^t g(x) e^{\alpha(x-t))} \, dx\right| \leqslant \varepsilon.$$

C'est la définition de

$$\int_0^t g(x) e^{x(x-t)} dx \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En regroupant avec la limite des solutions homogènes, on a bien le résultat.

Exercice 15

1.a) Il suffit de procéder par analyse synthèse.

1.b) On a :

$$\left\{\begin{array}{l} f = i + p \\ i \text{ impaire} \\ p \text{ paire}\end{array}\right. \qquad \text{avec : } \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{l} i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \\ p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}\end{array}\right.$$

On injecte $f = i + p$ dans l'équation.
Précisons qu'en reprenant l'expression de i et p, on a la dérivabilité de i et p avec

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x) + x f(-x) \\ &= i'(x) + p'(x) + x i(-x) + x p(-x) \\ 0 &= i'(x) + p'(x) - x i(x) + x p(x).\end{aligned}$$

Soit pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x i(x) - i'(x) = p'(x) + x p(x).$$

Or la dérivée d'une fonction paire (resp. impaire) est impaire (resp. paire). Donc

$$\left\{\begin{array}{l} x \mapsto x i(x) - i'(x) \text{ est paire,} \\ x \mapsto p'(x) + x p(x) \text{ est impaire.}\end{array}\right.$$

Comme la seule fonction à la fois paire et impaire est la fonction nulle,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{ll} x i(x) - i'(x) = 0 & (E_1), \\ p'(x) + x p(x) = 0 & (E_2).\end{array}\right.$$

Les fonctions sont solutions d'équations différentielles homogènes du premier ordre. Ainsi,

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad p(x) = \lambda e^{-x^2/2}.$$

Pour i, on peut donner un autre argument.
Comme $i(0) = 0$, et la fonction nulle est solution. On a par

unicité du problème de Cauchy : i est l'application nulle. Dès lors :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lambda e^{-x^2/2}.$$

On vérifie que ces fonctions sont solutions.

2. Comme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -x f(-x)$$

La fonction f' est dérivable par produit et composition. D'où

$$\begin{aligned} f''(x) &= -x\left(-f'(-x)\right) - 1 f(-x) \\ &= x f'(-x) - f(-x). \end{aligned}$$

Or $f'(x) + x f(-x) = 0$ pour tout réel x donne aussi $f'(-x) - x f(x) = 0$ et

$$\begin{aligned} f''(x) &= x(x f(x)) - f(-x). \\ &= x^2 f(x) - f(-x). \end{aligned}$$

Finalement, une équation d'ordre 2 est :

$$x f''(x) - f'(x) - x^3 f(x) = 0.$$

Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$:

$$g''(x) - \left(2x + \frac{1}{x}\right) g'(x) = 0.$$

On en déduit g puis f...

Exercice 16

Exercice 17

1.a) Soit $n \in \mathbb{Z}$, on a par linéarité

$$\begin{aligned} c_n\left(y_p'' + \omega_0{}^2 y_p\right) &= c_n\left(y_p''\right) + \omega_0{}^2 c_n\left(y_p\right) \\ &= (\mathrm{i}n)^2 c_n\left(y_p\right) + \omega_0{}^2 c_n\left(y_p\right) \\ &= \left(-n^2\right) d_n + \omega_0{}^2 d_n. \end{aligned}$$

Si y_p est solution de $(\mathscr{C}_{2\pi})$, on a aussi

$$c_n\left(y_p'' + \omega_0{}^2 y_p\right) = c_n(\mathrm{F}).$$

Puis $$d_n = c_n\left(y_p\right) = \frac{c_n(\mathrm{F})}{\omega_0{}^2 - n^2}.$$

La division est bien possible car $\omega_0 \notin \mathbb{N}$

$$\omega_0{}^2 - n^2 = (\omega_0 - n)(\omega_0 + n) \neq 0.$$

1.b) Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_p(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{c_n(\mathrm{F})}{\omega_0{}^2 - n^2} e^{\mathrm{i}nt}.$$

1.c) On a

$$n^2 |d_n| = \underbrace{\left|\frac{n^2}{\omega_0^2 - n^2}\right|}_{\text{bornée}} \cdot |c_n(\mathrm{F})| \leqslant \mathrm{C} |c_n(\mathrm{F})|.$$

On peut préciser C :

$$\begin{aligned} \left|\frac{n^2}{\omega_0^2 - n^2}\right| &\leqslant \left|\frac{n^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2 - n^2}\right| + \left|\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - n^2}\right| \\ &\leqslant 1 + \frac{|\omega_0|^2}{|\omega_0 - n| \cdot |\omega_0 + n|} \leqslant 1 + \frac{|\omega_0|^2}{d_{\mathbb{Z}}(\omega_0)\,|\omega_0|} = 1 + \frac{|\omega_0|}{d_{\mathbb{Z}}(\omega_0)} \end{aligned}$$

où $d_{\mathbb{Z}}(\omega_0) = \inf_{n \in \mathbb{Z}} |\omega_0 - n|$, la distance de ω_0 à $\mathbb{Z}$.

2. Les solutions de l'équation homogène $\left(\mathscr{E}_{2\pi,0}\right)$ sont

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad t \mapsto t\cos(\omega_0 t) + \mu \sin(\omega_0 t).$$

3. Si $\omega_0 \in \mathbb{N}^*$, il n'est pas possible de trouver de solution particulière sous forme de série de Fourier. On parle de phénomène de résonances.

4. Vérifier par intégration par parties que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$.

$$c_0(\mathrm{F}) = 0, \quad c_n(\mathrm{F}) = \mathrm{i}\frac{(-1)^n}{n}.$$

On peut aussi utiliser les coefficients de Fourier trigonométriques en remarquant que F est impaire.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n(\mathrm{F}) = 0.$$

Et en reprenant le calcul précédent :

$$b_n(\mathrm{F}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t \sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Précisons qu'avec le théorème de Dirichlet ponctuelle, on a pour tout $t \in]-\pi;\pi[$:

$$\mathrm{F}(t) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt).$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$d_n = \frac{c_n(\mathrm{F})}{\omega_0{}^2 - n^2} = \frac{\mathrm{i}(-1)^n}{n\left(\omega_0{}^2 - n^2\right)}$$

et $$d_0 = 0.$$

On peut donner la solution sous forme de série trigonométrique :

$$a_0(y_p) = 2c_0(y_p) = 0,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n(y_p) = c_n(y_p) + c_{-n}(y_p) = d_n + d_{-n} = 0$$

$$\begin{aligned} b_n(y_p) &= \mathrm{i}\left(c_n(y_p) - c_{-n}(y_p)\right) = \mathrm{i}\left(d_n - d_{-n}\right) \\ &= 2\frac{(-1)^{n+1}}{n\left(\omega_0{}^2 - n^2\right)}. \end{aligned}$$