

DS 11- sujet A

THÈMES : PROBABILITÉ ET ANALYSE

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Problème A Méthode de Monte-Carlo

L'objet du problème est la présentation d'une méthode probabiliste de calcul d'une intégrale (méthode de Monte-Carlo), et de deux façons de l'améliorer.

Dans tout le problème, U désigne une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, g une fonction continue sur $[0, 1]$ et on pose

$$J = \int_0^1 g(t) dt.$$

L'espérance d'une variable aléatoire X sera notée $E(X)$ et sa variance $V(X)$ (si elles existent).

On admet que, pour tout entier naturel non nul n , si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires à densité, mutuellement indépendantes, alors des variables aléatoires de la forme $f_1(X_1), f_2(X_2), \dots, f_n(X_n)$ où les f_i sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, distinctes ou non, sont également mutuellement indépendantes.

I. Méthode de Monte-Carlo

1.
 - a) Rappeler une densité de U .
 - b) Justifier que la variable aléatoire $g(U)$ admet une espérance égale à J .
2. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que U . On pose $\sigma^2 = V(g(U)) \neq 0$ et on note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{i=1}^n g(U_i).$$

- a) Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers J .
- b) Recherche d'un intervalle de confiance pour J .
 - i. Justifier que la suite de variables aléatoires

$$\left(\frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

ii. On donne $\Phi(1.96) = 0.975$, où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique pour J , au niveau de confiance 95%, faisant intervenir S_n . Préciser ℓ_n , la longueur de cet intervalle.

3. Application :

- a) À l'aide du changement de variable $t = \sin u$, montrer que $\int_0^1 4\sqrt{1-t^2} dt = \pi$.
- b.
 - i. Écrire en Python une fonction G , de paramètre t , qui pour une valeur t du paramètre renvoie la valeur $4\sqrt{1-t^2}$.
 - ii. On rappelle qu'en Python, la fonction `rd.rand()` permet de simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. On suppose que n est un entier préalablement entré dans Python. En utilisant le résultat de la question 2.a et la fonction G , écrire un programme qui calcule une valeur approchée de π .

II. Réduction de la variance par variables antithétiques

4. Reconnaître la loi de $1 - U$.

On définit la variable aléatoire Y par $Y = \frac{1}{2} [g(U) + g(1 - U)]$. Exprimer $E(Y)$ à l'aide de $E(g(U))$?

5. On suppose g strictement croissante et on admet l'existence des espérances intervenant dans cette question.

- a) Justifier que, pour tout $(u, w) \in [0, 1]^2$,

$$(g(u) - g(w))(g(1 - u) - g(1 - w)) \leq 0.$$

- b) Soit W une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, indépendante de U .

Quel est le signe de $E[(g(U) - g(W))(g(1 - U) - g(1 - W))]$?

Justifier que $g(U)g(1 - U)$ et $g(W)g(1 - W)$ ont même espérance, en déduire que :

$$E(g(U)g(1 - U)) \leq (E[g(U)])^2.$$

On admet que l'on obtiendrait le même résultat pour g strictement décroissante.

- c) Montrer alors que, lorsque g est strictement monotone, $V(Y) \leq \frac{1}{2} V(g(U))$.

6. On considère l'intervalle

$$\left[\frac{S'_n}{n} - 1.96 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}, \frac{S'_n}{n} + 1.96 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}} \right] \quad \text{où} \quad S'_n = \sum_{i=1}^n (g(U_i) + g(1 - U_i)).$$

Justifier que cela définit un nouvel intervalle de confiance asymptotique pour J au niveau de confiance 95%. On note ℓ'_n , la longueur de cet intervalle.

Combien de tirages N de la variable aléatoire uniforme suffit-il de faire pour que ℓ'_N soit de même longueur ℓ_n ?

III. Réduction de la variance par stratification

7. Formule de Taylor-Lagrange pour une fonction de plusieurs variables

- a) Soit φ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$.

- i. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ et $x_1 \in [a, b]$ tels que

$$\forall t \in [a, b], \quad \varphi(x_0) \leq \varphi(t) \leq \varphi(x_1).$$

- ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \varphi(x_0) \leq \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \varphi(t) dt \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \varphi(x_1).$$

- iii. En déduire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \varphi(t) dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \varphi(c).$$

- b) Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, $a < b$. Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral. En déduire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$g(b) = g(a) + g'(a)(b-a) + g''(c) \frac{(b-a)^2}{2}.$$

- c) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, et soit $a \in \Omega$. Soit $h \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$, $a + th \in \Omega$. En considérant la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(t) = f(a + th)$, montrer qu'il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que

$$f(a + h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} q_{a+\theta h}(h)$$

où q_x désigne la forme quadratique associée à la matrice hessienne de f au point $x \in \Omega$.

8. Étude d'une fonction de plusieurs variables.

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[^3$ par :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in]0, +\infty[^3, \quad f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{9x_3}.$$

- a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^3$.

- b) Expliciter la matrice

$$\nabla^2 f(A) = \left[\partial_{i,j}^2 f(A) \right]_{1 \leq i, j \leq 3}$$

la matrice hessienne de f en $A = (a_1, a_2, a_3)$. Préciser le spectre de cette matrice ainsi que le signe de $q_{a+\theta h}(h)$.

- c) Étudier les points critiques de f . La fonction f admet-elle des extremums sur $]0; +\infty[$?
- d) On cherche désormais les extremums de f sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$.
Montrer que $(30, 60, 20)$ est l'un unique point critique de f sous cette contrainte.
En utilisant le résultat de la question 7.c, montrer qu'il s'agit d'un minimum global sous contrainte.

9. *Méthode de stratification*

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b < 1$. On définit les trois intervalles I_1, I_2 et I_3 par

$$I_1 = [0, a[, \quad I_2 = [a, b[, \quad I_3 = [b, 1],$$

et on considère quatre variables aléatoires indépendantes U_1, U_2, U_3 et T , de lois uniformes respectivement sur I_1, I_2, I_3 et $[0, 1]$.
On définit la variable aléatoire $\tilde{U}$ par $\tilde{U} = U_1 \mathbb{1}_{[T \in I_1]} + U_2 \mathbb{1}_{[T \in I_2]} + U_3 \mathbb{1}_{[T \in I_3]}$ où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice d'un événement A .
La variable $\tilde{U}$ est donc la variable aléatoire définie, pour tout élément ω de l'univers Ω par :

$$\tilde{U}(\omega) = \begin{cases} U_1(\omega) & \text{si } T(\omega) \in I_1 \\ U_2(\omega) & \text{si } T(\omega) \in I_2 \\ U_3(\omega) & \text{si } T(\omega) \in I_3 \end{cases}$$

- a) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout réel x ,

$$\mathbf{P}(g(\tilde{U}) \leq x) = a\mathbf{P}(g(U_1) \leq x) + (b-a)\mathbf{P}(g(U_2) \leq x) + (1-b)\mathbf{P}(g(U_3) \leq x).$$

En admettant que $g(U_1), g(U_2), g(U_3)$ sont des variables aléatoires à densité, montrer que $g(\tilde{U})$ est elle-même une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité $f_{g(\tilde{U})}$ en fonction de densités de $g(U_1), g(U_2), g(U_3)$, que l'on pourra noter $f_{g(U_1)}, f_{g(U_2)}, f_{g(U_3)}$.

Vérifier, en prenant la fonction identité pour g , que $\tilde{U}$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

- b) Dédurre de ce qui précède que

$$\mathbf{E}(g(\tilde{U})) = a\mathbf{E}(g(U_1)) + (b-a)\mathbf{E}(g(U_2)) + (1-b)\mathbf{E}(g(U_3))$$

- c) On tire de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles, n_1 points dans I_1 , n_2 points de I_2 , n_3 points dans I_3 . On considère donc la famille de variables aléatoires indépendantes $(U_{1,1}, \dots, U_{1,n_1}, U_{2,1}, \dots, U_{2,n_2}, U_{3,1}, \dots, U_{3,n_3})$ telles que :
- $U_{1,1}, \dots, U_{1,n_1}$ ont même loi que U_1 ,
 - $U_{2,1}, \dots, U_{2,n_2}$ ont même loi que U_2 ,
 - $U_{3,1}, \dots, U_{3,n_3}$ ont même loi que U_3 ,
- et on note Z la variable aléatoire définie par :

$$Z = a \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} g(U_{1,i}) + (b-a) \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} g(U_{2,j}) + (1-b) \frac{1}{n_3} \sum_{k=1}^{n_3} g(U_{3,k}).$$

Montrer que

$$\mathbf{V}(Z) = a^2 \frac{1}{n_1} \mathbf{V}(g(U_1)) + (b-a)^2 \frac{1}{n_2} \mathbf{V}(g(U_2)) + (1-b)^2 \frac{1}{n_3} \mathbf{V}(g(U_3)).$$

- d) *Application numérique :*

On suppose que pour un certain choix de la fonction g et des réels a et b , on a

$$a^2 \mathbf{V}(g(U_1)) = \frac{1}{4}, \quad (b-a)^2 \mathbf{V}(g(U_2)) = 1 \quad \text{et} \quad (1-b)^2 \mathbf{V}(g(U_3)) = \frac{1}{9}.$$

On suppose que l'on tire 110 points, de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles (n_1 points dans I_1 , n_2 points dans I_2 , n_3 points dans I_3). Quelles valeurs faut-il donner à n_1, n_2, n_3 pour que $\mathbf{E}(Z)$ fournisse une estimation de J avec le plus petit risque d'erreur possible suivant cette méthode?

Problème B
Analyse de Fourier

Partie A : Lemme de Riemann Lebesgue

On considère une fonction f définie et continue sur $[0, \pi]$ et l'intégrale

$$I_n = \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt$$

10. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

a) Justifier qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in [0, \pi], \quad |f(x)| \leq M \quad \text{et} \quad |f'(x)| \leq M.$$

b) À l'aide d'une intégration par parties, justifier que la suite (I_n) est convergente de limite nulle.

On suppose dans la suite que f est seulement continue sur $[0, \pi]$. On veut démontrer que le résultat précédent est encore valable. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout n -uplet de réels $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ associe le nombre

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(t) - \sum_{k=1}^n a_k \sin(kt) \right)^2 dt.$$

Pour tout k , on pose

$$b_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(kt) dt.$$

11. a) Justifier que pour tout couple de réels (a, b) , on a

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b)).$$

b) Calculer pour tout couple (k, ℓ) d'entiers strictement positifs l'intégrale

$$\int_0^\pi \sin(kt) \sin(\ell t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \ell \\ \pi/2 & \text{si } k = \ell. \end{cases}$$

12. En déduire que quel que soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^n a_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k(f) + J \quad \text{où} \quad J = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(t) dt.$$

13. a) Comparer $F(a_1, \dots, a_n) - F(b_1(f), \dots, b_n(f))$ et $\sum_{k=1}^n [a_k - b_k(f)]^2$.

b) En déduire que F admet un minimum global.

14. Montrer que la série $\sum (b_k(f))^2$ est convergente et justifier la majoration

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k(f)^2 \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(t) dt.$$

15. Conclure.

Partie B : Application

16. Vérifier à l'aide de deux intégrations par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}.$$

On admet dans la suite que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0, \pi[$:

$$\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\cos\left(\frac{(m+1)t}{2}\right) \sin\left(\frac{mt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

17. Soit l'application $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin \frac{t}{2}} \quad \text{si } t \in]0, \pi[\quad \text{et} \quad f(0) = -1.$$

Montrer que f est continue sur $[0, \pi]$.

18. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right) dt.$$

19. À l'aide de la première partie, établir :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

20. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_p = \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{k} \quad \text{et} \quad B_p = \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k}.$$

Après avoir calculé $A_p + B_p$ et $A_p - B_p$, simplifier les expressions de A_p et B_p .

21. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_*^+$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Pour $t \in \mathbb{R}$, exprimer $at^2 + bt + c - a(t + b/(2a))^2$ à l'aide de a et Δ . Montrer que l'intégrale ci-dessous est convergente et donner sa valeur

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-(at^2 + bt + c)\right) dt$$

22. a) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$.

b) Établir l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt.$$

– FIN –

DS 11 - sujet *

THÈMES : PROBABILITÉ, ANALYSE

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Problème A Méthode de Monte-Carlo

L'objet du problème est la présentation d'une méthode probabiliste de calcul d'une intégrale (méthode de Monte-Carlo), et de deux façons de l'améliorer.

Dans tout le problème, U désigne une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, g une fonction continue sur $[0, 1]$ et on pose

$$J = \int_0^1 g(t) dt.$$

L'espérance d'une variable aléatoire X sera notée $E(X)$ et sa variance $V(X)$ (si elles existent).

On admet que, pour tout entier naturel non nul n , si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires à densité, mutuellement indépendantes, alors des variables aléatoires de la forme $f_1(X_1), f_2(X_2), \dots, f_n(X_n)$ où les f_i sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, distinctes ou non, sont également mutuellement indépendantes.

I. Méthode de Monte-Carlo

1. Justifier que la variable aléatoire $g(U)$ admet une espérance égale à J .
2. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que U . On pose $\sigma^2 = V(g(U)) \neq 0$ et on note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{i=1}^n g(U_i).$$

- a) Que dire de la convergence en probabilité de $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
- b) Recherche d'un intervalle de confiance pour J .
 - i. Déterminer deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ que l'on exprimera en fonction de n et σ telles que

$$a_n S_n + b_n$$

converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

ii. On donne $\Phi(1.96) = 0.975$, où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique pour J , au niveau de confiance 95%, faisant intervenir S_n .

3. Application :

- a) À l'aide du changement de variable $t = \sin u$, montrer que $\int_0^1 4\sqrt{1-t^2} dt = \pi$.
- b) i. Écrire en Python une fonction G , de paramètre t , qui pour une valeur t du paramètre renvoie la valeur $4\sqrt{1-t^2}$.
 - ii. On rappelle qu'en Python, la fonction `rd.rand()` permet de simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.
On suppose que n est un entier préalablement entré dans Python. En utilisant le résultat de la question 2.a et la fonction G , écrire un programme qui calcule une valeur approchée de π .

II. Réduction de la variance par variables antithétiques

4. On définit la variable aléatoire Y par $Y = \frac{1}{2}[g(U) + g(1-U)]$. Comparer $E(Y)$ et $E(g(U))$.
5. On suppose g strictement croissante et on admet l'existence des espérances intervenant dans cette question.

a) Justifier que, pour tout $(u, w) \in [0, 1]^2$,

$$(g(u) - g(w))(g(1-u) - g(1-w)) \leq 0.$$

b) Soit W une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, indépendante de U .

Quel est le signe de $E[(g(U) - g(W))(g(1-U) - g(1-W))]$?

En remarquant que $g(U)g(1-U)$ et $g(W)g(1-W)$ ont même espérance, en déduire que :

$$E[g(U)g(1-U)] \leq (E[g(U)])^2.$$

On admet que l'on obtiendrait le même résultat pour g strictement décroissante.

c) Montrer alors que, lorsque g est strictement monotone, $V(Y) \leq \frac{1}{2}V(g(U))$.

6. Donner un nouvel intervalle de confiance asymptotique pour J au niveau de confiance 95%, basé sur cette méthode. On note ℓ_n la longueur de l'intervalle de confiance obtenu dans la partie I pour une valeur fixée de n . Avec cette nouvelle méthode, combien de tirages N de la variable aléatoire uniforme suffit-il de faire pour obtenir la même longueur ℓ_n d'intervalle de confiance.

III. Réduction de la variance par stratification

7. Formule de Taylor-Lagrange pour une fonction de plusieurs variables

a) Soit φ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$.

i. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ et $x_1 \in [a, b]$ tels que

$$\forall t \in [a, b], \quad \varphi(x_0) \leq \varphi(t) \leq \varphi(x_1).$$

ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \varphi(x_0) \leq \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \varphi(t) dt \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \varphi(x_1).$$

iii. En déduire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \varphi(t) dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \varphi(c).$$

- b) Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, $a < b$. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$g(b) = g(a) + g'(a)(b-a) + g''(c) \frac{(b-a)^2}{2}.$$

- c) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, et soit $a \in \Omega$. Soit $h \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$, $a + th \in \Omega$. En considérant la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(t) = f(a + th)$, montrer qu'il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} q_{a+\theta h}(h)$$

où q_x désigne la forme quadratique associée à la matrice hessienne de f au point $x \in \Omega$.

8. Étude d'une fonction de plusieurs variables.

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[^3$ par :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in]0, +\infty[^3, \quad f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{9x_3}.$$

a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^3$.

b) Expliciter la matrice

$$\nabla^2 f(A) = \left[\partial_{i,j}^2 f(A) \right]_{1 \leq i, j \leq 3}$$

la matrice hessienne de f en $A = (a_1, a_2, a_3)$.

c) La fonction f admet-elle des extremums sur $]0, +\infty[^3$?

- d) On cherche désormais les extremums de f sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$.
Montrer que f admet un unique point critique sous cette contrainte, que l'on déterminera.
En utilisant le résultat de la question 7.c, montrer qu'il s'agit d'un minimum global sous contrainte.

9. *Méthode de stratification*

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b < 1$. On définit les trois intervalles I_1, I_2 et I_3 par

$$I_1 = [0, a[, \quad I_2 = [a, b[, \quad I_3 = [b, 1],$$

et on considère quatre variables aléatoires indépendantes U_1, U_2, U_3 et T , de lois uniformes respectivement sur I_1, I_2, I_3 et $[0, 1]$.

On définit la variable aléatoire $\tilde{U}$ par $\tilde{U} = U_1 \mathbb{1}_{[T \in I_1]} + U_2 \mathbb{1}_{[T \in I_2]} + U_3 \mathbb{1}_{[T \in I_3]}$ où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice d'un événement A .
La variable $\tilde{U}$ est donc la variable aléatoire définie, pour tout élément ω de l'univers Ω par :

$$\tilde{U}(\omega) = \begin{cases} U_1(\omega) & \text{si } T(\omega) \in I_1 \\ U_2(\omega) & \text{si } T(\omega) \in I_2 \\ U_3(\omega) & \text{si } T(\omega) \in I_3 \end{cases}$$

- a) Montrer que pour tout réel x ,

$$\mathbf{P}(g(\tilde{U}) \leq x) = a\mathbf{P}(g(U_1) \leq x) + (b-a)\mathbf{P}(g(U_2) \leq x) + (1-b)\mathbf{P}(g(U_3) \leq x).$$

En admettant que $g(U_1), g(U_2), g(U_3)$ sont des variables aléatoires à densité, montrer que $g(\tilde{U})$ est elle-même une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité $f_{g(\tilde{U})}$ en fonction de densités de $g(U_1), g(U_2), g(U_3)$, que l'on pourra noter $f_{g(U_1)}, f_{g(U_2)}, f_{g(U_3)}$.

Vérifier, en prenant la fonction identité pour g , que $\tilde{U}$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

- b) Dédurre de ce qui précède que

$$\mathbf{E}(g(\tilde{U})) = a\mathbf{E}(g(U_1)) + (b-a)\mathbf{E}(g(U_2)) + (1-b)\mathbf{E}(g(U_3))$$

- c) On tire de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles, n_1 points dans I_1 , n_2 points de I_2 , n_3 points dans I_3 . On considère donc la famille de variables aléatoires indépendantes $(U_{1,1}, \dots, U_{1,n_1}, U_{2,1}, \dots, U_{2,n_2}, U_{3,1}, \dots, U_{3,n_3})$ telles que :

- $U_{1,1}, \dots, U_{1,n_1}$ ont même loi que U_1 ,
- $U_{2,1}, \dots, U_{2,n_2}$ ont même loi que U_2 ,
- $U_{3,1}, \dots, U_{3,n_3}$ ont même loi que U_3 ,

et on note Z la variable aléatoire définie par :

$$Z = a \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} g(U_{1,i}) + (b-a) \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} g(U_{2,j}) + (1-b) \frac{1}{n_3} \sum_{k=1}^{n_3} g(U_{3,k}).$$

Montrer que

$$\mathbf{V}(Z) = a^2 \frac{1}{n_1} \mathbf{V}(g(U_1)) + (b-a)^2 \frac{1}{n_2} \mathbf{V}(g(U_2)) + (1-b)^2 \frac{1}{n_3} \mathbf{V}(g(U_3)).$$

- d) *Application numérique :*

On suppose que pour un certain choix de la fonction g et des réels a et b , on a

$$a^2 \mathbf{V}(g(U_1)) = \frac{1}{4}, \quad (b-a)^2 \mathbf{V}(g(U_2)) = 1 \quad \text{et} \quad (1-b)^2 \mathbf{V}(g(U_3)) = \frac{1}{9}.$$

On suppose que l'on tire 110 points, de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles (n_1 points dans I_1 , n_2 points dans I_2 , n_3 points dans I_3). Quelles valeurs faut-il donner à n_1, n_2, n_3 pour que $\mathbf{E}(Z)$ fournisse une estimation de J avec le plus petit risque d'erreur possible suivant cette méthode?

Problème B
Analyse de Fourier

Partie A : Lemme de Riemann Lebesgue

On considère une fonction f définie et continue sur $[0, \pi]$ et l'intégrale

$$I_n = \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt$$

10. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Montrer que la suite (I_n) est convergente de limite nulle.

On suppose dans la suite que f est seulement continue sur $[0, \pi]$. On veut démontrer que le résultat précédent est encore valable. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout n -uplet de réels $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ associe le nombre

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(t) - \sum_{k=1}^n a_k \sin(kt) \right)^2 dt.$$

Pour tout k , on pose
$$b_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(kt) dt.$$

Enfin, on rappelle que pour tout couple de réels (a, b) , on a

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b)).$$

11. Calculer pour tout couple (k, ℓ) d'entiers strictement positifs l'intégrale

$$\int_0^\pi \sin(kt) \sin(\ell t) dt.$$

12. En déduire que quel que soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^n a_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k(f) + J \quad \text{où} \quad J = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(t) dt.$$

13. a) Simplifier $F(a_1, \dots, a_n) - F(b_1(f), \dots, b_n(f))$.
b) En déduire que F admet un minimum global.
14. Montrer que la série $\sum (b_k(f))^2$ est convergente et donner un majorant de sa somme.
15. Conclure.

Problème C

Intégrale à paramètre

Partie A

On pose $E_0 = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \text{ bornée sur } \mathbb{R} \right\}$.

Si $f \in E_0$, on notera $N_0(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

16. Soit $f \in E_0$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} dt$ est absolument convergente.
17. On définit alors l'application Φ sur E par

$$\forall f \in E, \quad \Phi(f) : x \in \mathbb{R} \mapsto \Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} dt.$$

Soit $f \in E_0$, montrer que $\Phi(f)$ est bornée et que $N_0(\Phi(f)) \leq \frac{\pi^2}{4} N_0(f)$.

18. On pose $g = \Phi(\mathbf{1})$ où $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1.

- a) Vérifier que g est impaire, croissante et majorée par $\frac{\pi^2}{4}$.
b) Justifier $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{4}$.

Partie B

19. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2} dt$ est convergente.
20. Vérifier que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt.$$

Indication : on pourra, en le justifiant, utiliser le changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

21. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt = \sum_{k=0}^n \int_0^1 t^{2k} \ln t dt + \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} t^{2n+2} dt$$

(on admet la convergence des intégrales introduites).

22. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^1 t^{2n} \ln t dt$.

23. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} t^{2n+2} dt = 0$.

24. Exprimer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2} dt$ à l'aide de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Conclusion

Par un calcul de dérivation, on montre que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1} dt$$

En déduire à partir des deux premières parties que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

- FIN -

DS 11 A - solution

Problème A

Corrigé de M. Vienney

1.a. Une densité de U est $f_U : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1.b. Par le théorème de transfert, $g(U)$ admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_U(t) dt =$

$\int_0^1 g(t) dt$ converge absolument.

Mais g est continue sur le segment $[0, 1]$, et donc il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment : elle converge.

Ainsi, $g(U)$ admet une espérance et

$$E(g(U)) = \int_0^1 g(t) dt = J.$$

2.a. Les U_i étant indépendantes et de même loi, il en est de même des $g(U_i)$. Or, d'après l'énoncé, celles-ci admettent une variance, et donc par la loi faible des grands nombres,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} J.$$

2.b. Recherche d'un intervalle de confiance pour J .

2.b.i. Les $g(U_i)$ sont i.i.d. et admettent une variance. Donc $\frac{S_n}{n}$ admet une espérance égale à J et une variance égale à

$$\frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n g(U_i)\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \underbrace{V(g(U_i))}_{=\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Par le théorème central limite, $\frac{\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\sqrt{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}} = \frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ converge en loi vers X , où X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Variance

Les $g(U_i)$ admettent un moment d'ordre 2 (et donc une variance) pour les mêmes raisons que J admet une espérance :

$$\int_0^1 g(t)^2 dt$$

converge car intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Les $g(U_i)$ sont indépendantes.

3.b)

```
# 3 a i
def G(t):
    return 4*np.sqrt(1-t**2)
# 3 a i i
m=50000
s=0
for i in range(m):
    s+=G(rd.rand())
print(s/m)

>>> 3.148838730829666
```

2.b.ii. Comme $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, on a

$$P(-1.96 \leq X \leq 1.96) = \Phi(1.96) - \Phi(-1.96) = 2\Phi(1.96) - 1 = 0.95.$$

De plus, on a

$$P\left(-1.96 \leq \frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 1.96\right) = P\left(-1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{S_n}{n} \leq -J \leq 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{S_n}{n}\right) = P\left(\frac{S_n}{n} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq J \leq \frac{S_n}{n} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Mais d'après le résultat de la question précédente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(-1.96 \leq \frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 1.96\right) = P(-1.96 \leq X \leq 1.96) = 0.95.$$

On en déduit que $\left[\frac{S_n}{n} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \frac{S_n}{n} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de J au niveau de confiance 95%.

3. Application :

3.a. La fonction $\varphi : u \mapsto \sin u$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, de dérivée égale à $\varphi'(u) = \cos(u)$.

De plus, on a $\varphi(0) = 0$ et $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. On a donc, par le théorème de changement de variable²

Inconvénient

Le principal inconvénient de cette méthode est que l'on ne connaît pas nécessairement la valeur de σ , dont on aurait pourtant besoin pour construire l'intervalle de confiance.

² Sur un segment. On ne se préoccupe donc pas de la monotonie de φ .

$$\int_0^1 4\sqrt{1-t^2} dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 u} \cos u du = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 u} \cos u du = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du.$$

Mais, quel que soit $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$\cos^2(u) = \left(\frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2iu} + e^{-2iu} + 2) = \frac{1}{4}(2\cos(2u) + 2) = \frac{\cos(2u) + 1}{2}.$$

On en déduit que

$$4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos(2u) + 1) du = 2 \left[\frac{\sin(2u)}{2} + u \right]_0^{\pi/2} = \pi.$$

Et donc

$$\int_0^1 4\sqrt{1-t^2} dt = \boxed{\pi}.$$

Cosinus

La relation

$$\cos(u) = \sqrt{1 - \sin^2}$$

n'est pas valable sur tout $\mathbf{R}$, mais uniquement si $\cos(u) \geq 0$. Ce qui est le cas sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Réduction de la variance par variables antithétiques

4. Il s'agit d'une transformation affine de loi uniforme : nous savons que si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, alors $(b-a)U + a \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.

Si on pose ici $a = 1$ et $b = 0$, on en déduit que U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Puisque U et $1-U$ ont même loi, c'est également le cas de $g(U)$ et de $g(1-U)$. En particulier, $E(g(1-U)) = E(g(U)) = J$.

Et donc

$$E(Y) = E\left(\frac{1}{2}(g(U) + g(1-U))\right) = \frac{1}{2}(E(g(U)) + E(g(1-U))) = \frac{2J}{2} = \boxed{J}.$$

5.a. Soient $(u, w) \in [0, 1]^2$.

Si $u \leq w$, alors, par croissance de g , $g(u) \leq g(w)$ et donc $g(u) - g(w) \leq 0$.

En revanche, $1-u \geq 1-w$ et donc, $g(1-u) \geq g(1-w)$, de sorte que $g(1-u) - g(1-w) \geq 0$.

Et alors $(g(u) - g(w))(g(1-u) - g(1-w)) \leq 0$.

Au contraire si $u \geq w$, alors $g(u) - g(w) \geq 0$ et $g(1-u) - g(1-w) \leq 0$. Et alors

$$(g(u) - g(w))(g(1-u) - g(1-w)) \leq 0.$$

Remarque

Si l'on ne souhaite pas utiliser la transformation affine de lois uniformes, on peut, au choix :

- travailler sur les densités, en remarquant que $1-U$ est une transformation affine de U
- travailler directement sur la fonction de répartition de $1-U$ et prouver que c'est la même que la fonction de répartition de U .

- 5.b. D'après la question précédente, la variable aléatoire $(g(U) - g(W))(g(1 - U) - g(1 - W))$ est à valeurs négatives, donc son espérance est négative. Or on a

$$(g(U) - g(W))(g(1 - U) - g(1 - W)) = g(U)g(1 - U) - g(W)g(1 - U) - g(U)g(1 - W) + g(W)g(1 - W)$$

et donc

$$\begin{aligned} E[(g(U) - g(W))(g(1 - U) - g(1 - W))] &\leq 0 \Leftrightarrow E[g(U)g(1 - U) - g(W)g(1 - U) - g(U)g(1 - W) + g(W)g(1 - W)] \leq 0 \\ &\Leftrightarrow E(g(U)g(1 - U)) - E(g(U)g(1 - W)) - E(g(W)g(1 - U)) + E(g(W)g(1 - W)) \leq 0 \end{aligned}$$

Puisque U et W sont indépendantes, $g(U)$ et $g(1 - W)$ le sont également³ et donc

³ Et sont de même loi.

$$E(g(U)g(1 - W)) = E(g(U))E(g(1 - W)) = E(g(U))^2$$

et de même $E(g(W)g(1 - U)) = E(g(U))^2$.

Enfin, comme indiqué dans l'énoncé, $g(U)g(1 - U)$ et $g(W)g(1 - W)$ sont de même loi, donc de même espérance. Il vient donc

$$2E(g(U)g(1 - U)) - 2E(g(U))^2 \leq 0 \Leftrightarrow E(g(U)g(1 - U)) \leq E(g(U))^2.$$

- 5.c. On a $E(Y^2) = \frac{1}{4}E[(g(U) + g(1 - U))^2] = \frac{1}{4}E[g(U)^2 + 2g(U)g(1 - U) + g(1 - U)^2] = \frac{1}{2}[E(g(U)^2) + E(g(U)g(1 - U))]$.
Et alors, par la formule de Huygens, on en déduit que

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{2}(E(g(U)^2) + E(g(U)g(1 - U)) - 2E(g(U))^2).$$

D'autre part, $V(g(U)) = E(g(U)^2) - E(g(U))^2$, et donc

$$V(Y) \leq \frac{1}{2}(E(g(U)^2) + E(g(U))^2 - 2E(g(U))^2) = \frac{1}{2}(E(g(U)^2) - E(g(U))^2) = \frac{1}{2}V(g(U)).$$

6. Il s'agit de refaire le raisonnement tenu à la question 2.b.ii en remplaçant S_n par

$$S'_n = \sum_{i=1}^n (g(U_i) + g(1 - U_i)), \text{ et donc les } \sigma \text{ par des } \sigma' = \sqrt{V(Y)}.$$

On obtient alors comme intervalle de confiance asymptotique de J l'intervalle

$$\left[\frac{S'_n}{n} - 1.96 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}, \frac{S'_n}{n} + 1.96 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}} \right].$$

La longueur de cet intervalle pour un échantillon de taille n est alors $\ell'_n = 2 \times 1.96 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}$,

alors que la longueur de l'intervalle obtenu en 2.b.ii était $\ell_n = 2 \times 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

La question posée est alors : à n fixé, combien doit valoir N pour que $\ell'_N \leq \ell_n$?
Il suffit alors de faire le calcul :

$$\ell'_N \leq \ell_n \Leftrightarrow \frac{\sigma'}{\sqrt{N}} \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{N} \geq \sqrt{n} \frac{\sigma'}{\sigma}.$$

En utilisant le résultat de 5.c, on a $\sigma'^2 \leq \frac{\sigma^2}{2}$ et donc $\frac{\sigma'}{\sigma} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ainsi, si $\sqrt{N} \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$, on a bien $\sqrt{N} \geq \sqrt{n} \frac{\sigma'}{\sigma}$ et donc $\ell'_N \leq \ell_n$.

Autrement dit, il suffit de prendre $N \geq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 1$.

III. Réduction de la variance par stratification

7. Formule de Taylor-Lagrange pour une fonction de plusieurs variables

- 7.a.i. La fonction φ est continue sur le segment $[a, b]$, donc elle admet un maximum et un minimum.

Et donc si on note m (respectivement M) le minimum (resp. le maximum) de φ sur $[a, b]$, ces valeurs sont atteintes : il existe $x_0 \in [a, b]$ et $x_1 \in [a, b]$ tels que $\varphi(x_0) = m$ et $\varphi(x_1) = M$.

Et donc $\forall t \in [a, b], \varphi(x_0) \leq \varphi(t) \leq \varphi(x_1)$.

Min/max

Lorsqu'on dit que φ admet un maximum et un minimum, cela ne signifie pas seulement qu'elle est bornée, mais également qu'elle atteint ses valeurs extrêmes.
À titre de comparaison, la fonction arctangente est bornée sur $\mathbf{R}$, mais n'admet ni maximum ni minimum.

7.a.ii. Pour tout $t \in [a, b]$, $(b-t)^n \geq 0$, de sorte que

$$\frac{(b-t)^n}{n!} \varphi(x_0) \leq \frac{(b-t)^n}{n!} \varphi(t) \leq \frac{(b-t)^n}{n!} \varphi(x_1).$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit donc que

$$\varphi(x_0) \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} dt \leq \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \varphi(t) dt \leq \varphi(x_1) \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} dt.$$

Et donc, après calcul de ces deux intégrales,

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \varphi(x_0) \leq \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \varphi(t) dt \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \varphi(x_1).$$

7.a.iii. On a, d'après la question précédente,

$$\varphi(x_0) \leq \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \varphi(t) dt \leq \varphi(x_1).$$

La fonction φ étant continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$

tel que $\varphi(c) = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \varphi(t) dt$ soit encore

7.b. Puisque g est $\mathcal{C}^2$, la formule de Taylor avec reste intégral montre que

$$g(b) = g(a) + (b-a)g'(a) + \int_a^b (b-t)g''(t) dt.$$

Et par la question précédente appliquée à la fonction continue g'' avec $n = 1$, il existe

$c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b (b-t)g''(t) dt = g''(c) \frac{(b-a)^2}{2}$. Et alors

$$g(b) = g(a) + g'(a)(b-a) + g''(c) \frac{(b-a)^2}{2}.$$

Taylor-Lagrange

Cette formule est appelée égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2. Elle est plus forte que l'inégalité du même nom, qui en est une conséquence immédiate si l'on majore $g''(c)$ par M , où M est un majorant de g'' sur $[a, b]$.

7.c. Il a été prouvé en cours que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ car f l'est, et que

$g'(t) = \langle \nabla f(a+th), h \rangle$ et $g''(t) = q_{x+th}(h)$.

En lui appliquant le résultat de la question 7.b, il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(\theta) \Leftrightarrow f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2}q_{x+\theta h}(h).$$

8. Étude d'une fonction de plusieurs variables

8.a. Les fonctions

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto 4x_1, (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_2, (x_1, x_2, x_3) \mapsto 9x_3$$

sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^3$ et à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$. La fonction inverse étant $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+^*$, on en déduit, par composition et par somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ que f est $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^3$. On a alors

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{1}{4x_1^2}, -\frac{1}{x_2^2}, -\frac{1}{9x_3^2} \right).$$

De même, on a

$$\partial_{1,1}^2 f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2x_1^3}, \partial_{2,2}^2 f(x_1, x_2, x_3) = \frac{2}{x_2^3}, \partial_{3,3}^2 f(x_1, x_2, x_3) = \frac{2}{9x_3^3}.$$

Et pour $i \neq j$, $\partial_{i,j}^2 f(x_1, x_2, x_3) = 0$.

8.b. D'après ce qui précède, on a

$$\nabla^2 f(a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a_1^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{a_2^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9a_3^3} \end{pmatrix}$$

et donc si $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \neq 0$, il vient

$${}^t H \nabla^2 f(a_1, a_2, a_3) H = (h_1, h_2, h_3) \begin{pmatrix} \frac{h_1}{2a_1^3} \\ \frac{2h_2}{a_2^3} \\ \frac{2h_3}{9a_3^3} \end{pmatrix} = \frac{h_1^2}{2a_1^3} + \frac{2h_2^2}{a_2^3} + \frac{2h_3^2}{9a_3^3} > 0.$$

Forme quadratique

On peut aussi remarquer que la hessienne de f en a n'a que des valeurs propres strictement positives, et donc pour $h \neq 0$, $q_a(h) > 0$.

8.c. (a_1, a_2, a_3) est un point critique de f si et seulement si $\nabla f(a_1, a_2, a_3) = 0$.
Or nous avons calculé précédemment le gradient de f , qui ne peut s'annuler sur $]0, +\infty[^3$.
Donc f n'admet aucun point critique sur $]0, +\infty[^3$, et donc n'admet pas d'extremums locaux.

8.d. (a_1, a_2, a_3) est un point critique de f sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 110 \\ \nabla f(a_1, a_2, a_3) = \lambda(1, 1, 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 110 \\ -\frac{1}{4a_1^2} = \lambda \\ -\frac{1}{a_2^3} = \lambda \\ -\frac{1}{9a_3^3} = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 110 \\ 4a_1^2 = a_2^2 = 9a_3^2 \end{cases}$$

Puisque a_1, a_2, a_3 sont positifs, on en déduit que $2a_1 = a_2 = 3a_3$.

Et donc la première équation devient $\frac{a_2}{2} + a_2 + \frac{a_2}{3} = 110 \Leftrightarrow a_2 = 60$.

Et donc f admet un unique point critique sous la contrainte $a_1 + a_2 + a_3 = 110$, qui est $(30, 60, 20)$.

Nous savons que $x = (x_1, x_2, x_3)$ vérifie la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$ si et seulement si

$$(x_1, x_2, x_3) = (30 + h_1, 60 + h_2, 20 + h_3) \text{ avec } h = (h_1, h_2, h_3) \in \text{Vect}(1, 1, 1)^\perp.$$

Notons $a = (30, 60, 20)$ le point critique de f sous la contrainte.

Ainsi, si $(x_1, x_2, x_3) = (30 + h_1, 60 + h_2, 20 + h_3)$ vérifie $x_1 + x_2 + x_3 = 110$, d'après le résultat de la question 7.c, il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(30 + h_1, 60 + h_2, 20 + h_3) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} q_{a+\theta h}(h).$$

Or, $\langle \nabla f(a), h \rangle = 0$ et par la question 8.b, $q_{a+\theta h} \geq 0$.

On en déduit que $f(x) \geq f(a)$, et donc f admet un minimum global en $a = (30, 60, 20)$ sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$.

9. Méthode de stratification

9.a. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[T \in I_1], [T \in I_2], [T \in I_3]\}$, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$P(g(\tilde{U}) \leq x) = P(T \in I_1)P_{[T \in I_1]}(g(\tilde{U}) \leq x) + P(T \in I_2)P_{[T \in I_2]}(g(\tilde{U}) \leq x) + P(T \in I_3)P_{[T \in I_3]}(g(\tilde{U}) \leq x).$$

Or T suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, de sorte que

$$P(T \in I_1) = P(0 \leq T < a) = a, \quad P(T \in I_2) = b - a, \quad P(T \in I_3) = 1 - b.$$

De plus, la loi de $g(\tilde{U})$ sachant $[T \in I_1]$ est la loi de $g(U_1)$.

Donc $P_{[T \in I_1]}(g(\tilde{U}) \leq x) = P(g(U_1) \leq x)$.

De même, on a $P_{[T \in I_2]}(g(\tilde{U}) \leq x) = P(g(U_2) \leq x)$ et $P_{[T \in I_3]}(g(\tilde{U}) \leq x) = P(g(U_3) \leq x)$. On a donc

$$P(g(\tilde{U}) \leq x) = aP(g(U_1) \leq x) + (b - a)P(g(U_2) \leq x) + (1 - b)P(g(U_3) \leq x).$$

Hypothèses

Le résultat de 7.c s'applique car pour tout $t \in [0, 1]$, $a + th \in]0, +\infty[^3$.

Remarque

Cette méthode prouve que le minimum est global sous la contrainte car la forme quadratique associée à la hessienne est positive **en tout point** de $]0, +\infty[^3$.
Le fait qu'elle soit positive en $(30, 60, 20)$ ne permet de déterminer que la nature locale du minimum.

Si $g(U_1), g(U_2), g(U_3)$ sont des variables à densité, alors leurs fonctions de répartition sont continues sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Et donc

$$x \mapsto F_{g(\tilde{U})}(x) = aF_{g(U_1)}(x) + (b-a)F_{g(U_2)}(x) + (1-b)F_{g(U_3)}(x)$$

est également continue sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points. On en déduit que $g(\tilde{U})$ est une variable à densité.

Si on dérive cette expression là où elle est dérivable⁴, il vient

$$F'_{g(\tilde{U})}(x) = af_{g(U_1)}(x) + (b-a)f_{g(U_2)}(x) + (1-b)f_{g(U_3)}(x).$$

⁴ C'est-à-dire sauf en un nombre fini de points.

Puisqu'il est toujours possible de choisir arbitrairement la valeur d'une densité de $g(\tilde{U})$ là où $F_{g(\tilde{U})}$ n'est pas dérivable, on peut prendre pour densité de $g(\tilde{U})$ la fonction

$$f_{g(\tilde{U})} = af_{g(U_1)}(x) + (b-a)f_{g(U_2)}(x) + (1-b)f_{g(U_3)}(x).$$

En particulier, si g est la fonction identité, alors les variables $g(U_1), g(U_2)$ et $g(U_3)$ suivent des lois uniformes sur respectivement $[0, a]$, $[a, b]$ et $[b, 1]$. On peut alors prendre comme densités respectives de U_1, U_2, U_3 les fonctions,

Et alors, $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$f_{\tilde{U}}(x) = \begin{cases} a\frac{1}{a} & \text{si } 0 \leq x < a \\ (b-a)\frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ (1-b)\frac{1}{1-b} & \text{si } b \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On reconnaît là la densité d'une loi uniforme sur $[0, 1]$, donc $\tilde{U} \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.

9.b. Sous réserve de convergence, on a

$$E(g(\tilde{U})) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_{g(\tilde{U})}(x) dx = a \int_{-\infty}^{+\infty} f_{g(U_1)}(x) dx + (b-a) \int_{-\infty}^{+\infty} f_{g(U_2)}(x) dx + (1-b) \int_{-\infty}^{+\infty} f_{g(U_3)}(x) dx.$$

Mais les $g(U_i)$ possèdent une espérance pour les mêmes raisons qu'à la question 1.a, et

$$E(g(U_i)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{g(U_i)}(x) dx.$$

Donc $g(\tilde{U})$ possède bien une espérance, et on a

$$E(g(\tilde{U})) = aE(g(U_1)) + (b-a)E(g(U_2)) + (1-b)E(g(U_3)).$$

9.c. Les $U_{i,j}$ étant mutuellement indépendantes, il en est de même des $g(U_{i,j})$. Et donc

$$V(Z) = a^2 \frac{1}{n_1^2} \sum_{i=1}^{n_1} V(g(U_{1,i})) + (b-a)^2 \frac{1}{n_2^2} \sum_{i=1}^{n_2} V(g(U_{2,i})) + (1-b)^2 \frac{1}{n_3^2} \sum_{i=1}^{n_3} V(g(U_{3,i})).$$

Mais pour tout $i \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket$, $g(U_{1,i})$ a même loi que $g(U_1)$ et donc

$$\sum_{i=1}^{n_1} V(g(U_{1,i})) = n_1 V(g(U_1)).$$

En procédant de même pour les $g(U_{2,i})$ et $g(U_{3,i})$ on en conclut que

$$V(Z) = a^2 \frac{1}{n_1} V(g(U_1)) + (b-a)^2 \frac{1}{n_2} V(g(U_2)) + (1-b)^2 \frac{1}{n_3} V(g(U_3)).$$

9.b. Sous réserve de convergence, on a

$$E(g(\tilde{U})) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{g(\tilde{U})}(x) dx = a \int_{-\infty}^{+\infty} f_{g(U_1)}(x) dx + (b-a) \int_{-\infty}^{+\infty} f_{g(U_2)}(x) dx + (1-b) \int_{-\infty}^{+\infty} f_{g(U_3)}(x) dx.$$

Mais les $g(U_i)$ possèdent une espérance pour les mêmes raisons qu'à la question 1.a, et

$$E(g(U_i)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{g(U_i)}(x) dx.$$

Donc $g(\tilde{U})$ possède bien une espérance, et on a

$$E(g(\tilde{U})) = aE(g(U_1)) + (b-a)E(g(U_2)) + (1-b)E(g(U_3)).$$

9.c. Les $U_{i,j}$ étant mutuellement indépendantes, il en est de même des $g(U_{i,j})$. Et donc

$$V(Z) = a^2 \frac{1}{n_1^2} \sum_{i=1}^{n_1} V(g(U_{1,i})) + (b-a)^2 \frac{1}{n_2^2} \sum_{i=1}^{n_2} V(g(U_{2,i})) + (1-b)^2 \frac{1}{n_3^2} \sum_{i=1}^{n_3} V(g(U_{3,i})).$$

Mais pour tout $i \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket$, $g(U_{1,i})$ a même loi que $g(U_1)$ et donc

$$\sum_{i=1}^{n_1} V(g(U_{1,i})) = n_1 V(g(U_1)).$$

En procédant de même pour les $g(U_{2,i})$ et $g(U_{3,i})$ on en conclut que

$$V(Z) = a^2 \frac{1}{n_1} V(g(U_1)) + (b-a)^2 \frac{1}{n_2} V(g(U_2)) + (1-b)^2 \frac{1}{n_3} V(g(U_3)).$$

9.d. Application numérique

Notons que

$$\begin{aligned} E(Z) &= a \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} E(g(U_{1,i})) + (b-a) \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} E(g(U_{2,i})) + (1-b) \frac{1}{n_3} \sum_{i=1}^{n_3} E(g(U_{3,i})) \\ &= aE(g(U_1)) + (b-a)E(g(U_2)) + (1-b)E(g(U_3)) = E(g(U)) = J. \end{aligned}$$

Ainsi, Z est un estimateur sans biais de J , de sorte que son risque quadratique est égal à sa variance.

Cette variance vaut donc $V(Z) = \frac{1}{4n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{9n_3}$.

Puisque l'on tire 110 points, il faut donc avoir $n_1 + n_2 + n_3 = 110$.

Par le résultat de la question 8.d, la valeur de $V(Z)$ est alors minimale pour $n_1 = 30, n_2 = 60$ et $n_3 = 20$.

Précision

L'énoncé est relativement vague lorsqu'il évoque «le plus petit risque d'erreur possible». Interprétons donc cela comme le risque quadratique de Z en tant qu'estimateur de J .

Problème B

La première partie est extraite de l'oral ESCP 2012. Les mots en **bleu** sont des mots clefs attendus dans la rédaction.

10. Les deux fonctions à intégrer étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, une intégration par parties donne :

$$I_n = \left[-\frac{1}{n} f(t) \cos(nt) \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi f'(t) \cos(nt) dt.$$

Les fonctions f et f' sont **continues** et bornées sur le **segment** $[0, \pi]$ par M_0 et M_1 respectivement. Si on pose $M = \max(M_0, M_1)$, on obtient par inégalité triangulaire

$$|I_n| \leq \frac{2M}{n} + \frac{\pi M}{n}.$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Donc par encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

11. On sait que

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Par différence, on en déduit que

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin a \sin b.$$

En particulier, on obtient ici

$$\sin kt \sin \ell t = \frac{1}{2} \cos(k-\ell)t - \frac{1}{2} \cos(k+\ell)t,$$

il vient par intégration

$$\int_0^\pi \sin(kt) \sin(\ell t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \ell \\ \pi/2 & \text{si } k = \ell \end{cases}$$

12. On développe l'intégrande, il vient

$$\begin{aligned} &F(a_1, \dots, a_n) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(t) dt - 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k(f) + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^n a_k \sin(kt) \right)^2 dt \end{aligned}$$

Lorsqu'on développe le carré de la dernière expression, tous les termes des doubles produits ont une intégrale nulle, alors que l'intégrale des autres termes vaut $\frac{\pi}{2}$. On obtient ainsi :

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^n a_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k(f) + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(t) dt$$

13. Vérifier que

$$F(a_1, \dots, a_n) - F(b_1(f), \dots, b_n(f)) = \sum_{k=1}^n [a_k - b_k(f)]^2 \geq 0$$

en tant que somme de termes positifs.

Il en résulte que F admet un minimum global atteint en $(b_1(f), \dots, b_n(f))$.

14. Comme F est à valeurs positives, son minimum est positif ou nul, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^n b_k(f)^2 - 2 \sum_{k=1}^n b_k(f) b_k(f) + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t)^2 dt \geq 0$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{k=1}^n b_k(f)^2 \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t)^2 dt.$$

La suite des sommes partielles $\sum b_k(f)^2$ est **croissante** car les termes de la série sont positifs et elle est **majorée**. D'après le théorème de convergence monotone, la suite des sommes partielles est convergente. Dit autrement, la série converge et on a la majoration :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k(f)^2 \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t)^2 dt.$$

15. La série converge, donc son terme général tend vers 0, c'est-à-dire :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} b_k(f) = 0.$$

16. Extrait corrigé M. Vienney

Procédons à une intégration par parties en posant $u(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t$ et $v'(t) = \cos(nt)$. Alors $u'(t) = \frac{t}{\pi} - 1$ et $v(t) = \frac{1}{n} \sin(nt)$, et les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt &= \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \frac{1}{n} \sin(nt) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \frac{1}{n} \sin(nt) dt \\ &= -\frac{1}{n} \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \sin(nt) dt \end{aligned}$$

Alors une seconde intégration par parties en posant $f(t) = \frac{t}{\pi} - 1$ et $g'(t) = \sin(nt)$, soit $f'(t) = \frac{1}{\pi}$ et $g(t) = -\frac{1}{n} \cos(nt)$, où f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ nous donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) dt &= \left[-\frac{1}{n^2} \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \cos(nt) \right]_0^\pi + \frac{1}{n^2} \int_0^\pi \frac{1}{\pi} \cos(nt) dt \\ &= -\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} [\sin(nt)]_0^\pi \\ &= -\frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$\boxed{\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}.}$$

17.

La fonction $t \mapsto \sin \frac{t}{2}$ est continue et ne s'annule pas sur $]0, \pi]$, donc f est continue sur $]0, \pi]$ par quotient de fonctions continues. De plus, au voisinage de 0, on a

$$\frac{t^2}{2\pi} - t \sim -t \text{ et } 2 \sin \frac{t}{2} \sim 2 \frac{t}{2} \sim t$$

de sorte que $\frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin \frac{t}{2}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-t}{t} = -1 \xrightarrow{t \rightarrow 0} -1$.

On en déduit que f est continue en 0, et donc $\boxed{\text{est continue sur } [0, \pi].}$

18.

on a

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^m \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \left(\sum_{m=1}^n \cos(mt) \right) dt.$$

Et en utilisant le résultat de la question 2, il vient

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \frac{\cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt = \int_0^\pi 2f(t) \cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2} dt.$$

Mais d'après la question 5.a, avec $b = \frac{(m+1)t}{2}$ et $a = \frac{mt}{2}$, on a

$$\cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{(2m+1)t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right).$$

Et donc

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^\pi 2f(t) \sin \frac{t}{2} dt = \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) dt.$$

Reste juste à calculer cette dernière intégrale :

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) dt = \left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi^2}{3}.$$

Il vient donc

$$\boxed{\sum_{m=1}^n \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt.}$$

19. La fonction f étant continue, d'après la première partie, on a

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt = 0$$

Puis

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

C'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

20.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} A_p + B_p &= \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{k} + \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} && \text{relation de Chasles} \\ &= \sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} 1^k 1^{2p+1-k} && \text{formule du binôme de Newton} \\ &= (1+1)^{2p+1} \\ &= 2^{2p+1}. \end{aligned}$$

Pour calculer $A_p - B_p$, utilisons la propriété de symétrie des coefficients binomiaux.

$$B_p = \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} = \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{2p+1-k}.$$

Ainsi, à l'aide du changement d'indice $i = 2p+1-k$,

$$B_p = \sum_{i=0}^p \binom{2p+1}{i} = A_p, \quad \text{donc} \quad A_p - B_p = 0.$$

On en déduit $2A_p = A_p + B_p = 2^{2p+1}$ et $A_p = B_p = 2^p$.

21. Pour tout réel t ,

$$at^2 + bt + c = a \left[\left(t + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right].$$

En introduisant le discriminant Δ , on obtient la forme canonique

$$at^2 + bt + c = a \left[\left(t + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right].$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} e^{-(at^2+bt+c)} &= e^{\frac{\Delta}{4a}} e^{-a \left(t + \frac{b}{2a} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{\Delta}{4a}} \times \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2a}} \sqrt{2\pi}} e^{\frac{- \left(t - \left(-\frac{b}{2a} \right) \right)^2}{2 \times \frac{1}{2a}}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{\Delta}{4a}} f(t) \end{aligned}$$

où f est la densité de la loi normale $\mathcal{N} \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1}{2a} \right)$. En particulier, on a la convergence et l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

On en déduit la convergence par linéarité et l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2+bt+c)} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{\Delta}{4a}}.$$

22. Effectuer une intégration par parties sur le segment $[\epsilon, 1]$.

DS 11* - solution

Problème A

Voir sujet A.

Problème B

La première partie est extraite de l'oral ESCP 2012. Les mots en *bleus* sont des mots clefs attendus dans la rédaction.

10. Les deux fonctions à intégrer étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, une intégration par parties donne :

$$I_n = \left[-\frac{1}{n} f(t) \cos(nt) \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi f'(t) \cos(nt) dt$$

Les fonctions f et f' sont *continues* et bornées sur le *segment* $[0, \pi]$ par M_0 et M_1 respectivement. Si on pose $M = \max(M_0; M_1)$, on obtient :

$$|I_n| \leq \frac{2M}{n} + \frac{\pi M}{n}.$$

cette dernière expression tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Donc par encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

11. On sait que

$$\begin{aligned} \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b. \end{aligned}$$

Par différence, on en déduit que

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin a \sin b.$$

En particulier, on obtient ici

$$\sin kt \sin \ell t = \frac{1}{2} \cos(k-\ell)t - \frac{1}{2} \cos(k+\ell)t,$$

il vient par intégration

$$\int_0^\pi \sin(kt) \sin(\ell t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \ell \\ \pi/2 & \text{si } k = \ell \end{cases}$$

12. On développe l'intégrande, il vient

$$\begin{aligned} F(a_1, \dots, a_n) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(t) dt - 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k(f) + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^n a_k \sin(kt) \right)^2 dt \end{aligned}$$

Lorsqu'on développe le carré de la dernière expression, tous les termes des doubles produits ont une intégrale

nulle, alors que l'intégrale des autres termes vaut $\frac{\pi}{2}$. On obtient ainsi :

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^n a_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k(f) + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(t) dt$$

13. Vérifier que

$$F(a_1, \dots, a_n) - F(b_1(f), \dots, b_n(f)) = \sum_{k=1}^n [a_k - b_k(f)]^2 \geq 0$$

en tant que somme de termes positifs.

Il en résulte que F admet un minimum global atteint en $(b_1(f), \dots, b_n(f))$.

14. Comme F est à valeurs positives, son minimum est positif ou nul, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^n b_k(f)^2 - 2 \sum_{k=1}^n b_k(f) b_k(f) + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t)^2 dt \geq 0$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{k=1}^n b_k(f)^2 \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t)^2 dt.$$

La suite des sommes partielles $\sum b_k(f)^2$ est *croissante* car les termes de la série sont positifs et elle est *majorée*. D'après le théorème de convergence monotone, la suite des sommes partielles est convergente. Dit autrement, la série converge et on a la majoration :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k(f)^2 \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t)^2 dt.$$

15. La série converge, donc son terme général tend vers 0, c'est-à-dire :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} b_k(f) = 0.$$

16. Soient $f \in E_0$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$\left| \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{N_0(f)}{1+t^2}.$$

Car la fonction arctangente est minorée et majorée par $-\pi/2$ et $\pi/2$. Or, pour $A \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\int_0^A \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^A \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}.$$

En particulier, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ est convergente. Par le critère de comparaison, on en déduit la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \left| \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} \right| dt.$$

Par conséquent

$$\int_0^{+\infty} \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} dt$$

est absolument convergente.

17. Soit $x \in \mathbb{R}$. À l'aide de l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |\Phi(f)(x)| &= \left| \int_0^{+\infty} \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} dt \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left| \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} \right| dt \\ &\leq \frac{\pi}{2} N_0(f) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\ |\Phi(f)(x)| &\leq \frac{\pi^2}{4} N_0(f). \end{aligned}$$

En reprenant le calcul de la question précédente.

18.a) Soit $x \in \mathbb{R}$ Comme la fonction arctangente est impaire :

$$g(-x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(-tx)}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} -\frac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt = -g(x)$$

La fonction g est impaire.

De plus, la question précédente donne la majoration par $\pi^2/4$.

18.b) Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{4} - g(x) &= \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(tx) \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) dt. \end{aligned}$$

Par une étude fonction, on prouve :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad |\arctan(\alpha)| \leq \alpha.$$

Enfin par croissance de l'intégrale

$$\begin{aligned} \left| \frac{\pi^2}{4} - g(x) \right| &\leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{tx} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \\ &\leq \frac{1}{x} \cdot \text{Cste}. \end{aligned}$$

Par le théorème d'encadrement

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{4}.$$

19. L'intégrande est continue.

- En $+\infty$, on dispose par les croissances comparées de

$$\frac{\ln t}{1-t^2} = o_{+\infty}(t^{-3/2}).$$

Par les critères de Riemann et de comparaison, l'intégrale est convergente en $+\infty$.

- En 0^+ , on dispose de l'équivalent

$$\frac{\ln(t)}{1-t^2} \sim \ln(t)$$

Or l'intégrale $\int_0^1 \ln t dt$ est convergente, par le critère d'équivalence des intégrales de fonctions négatives, l'intégrale est convergente.

Ce qui conclut.

20. Comme indiqué, on effectue le changement de variable $u = 1/t$ strictement décroissant de $]1; +\infty[$ dans $]0; 1[$ et de classe $\mathcal{C}^1$. L'intégrale obtenue est convergente et

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2} dt &= \int_1^0 \frac{\ln \frac{1}{u}}{1-\frac{1}{u^2}} \left(-\frac{1}{u^2} \right) du \\ &= \int_0^1 \frac{-\ln u}{u^2-1} du \\ &= \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u^2} du \end{aligned}$$

On conclut à l'aide de la relation de Chasles

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2} dt &= \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt + \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u^2} du \\ &= 2 \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt. \end{aligned}$$

21. Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\sum_{k=0}^n t^{2k} = \frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2} \Leftrightarrow \frac{1}{1-t^2} = \sum_{k=0}^n t^{2k} + \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}$$

En effet, on reconnaît une somme géométrique de raison $t^2 \neq 1$. D'où

$$\frac{\ln t}{1-t^2} = \sum_{k=0}^n (\ln t) t^{2k} + \frac{\ln t}{1-t^2} t^{2n+2}.$$

Par intégration, on obtient le résultat demandé.

22. Soient $A, B \in]0; 1[$. Procédons par une intégration par parties en considérant les fonctions u et v (de classe $\mathcal{C}^1$) définies sur $[A; B]$ par

$$u(t) = \ln(t) \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{t^{2n+1}}{2n+1}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} &\int_A^B (\ln t) t^{2n} dt \\ &= \left[\ln t \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_A^B - \int_A^B \frac{t^{2n+1}}{t(2n+1)} dt \\ &= \frac{1}{2n+1} (\ln(B) B^{2n+1} - \ln(A) A^{2n+1}) - \int_A^B \frac{t^{2n}}{2n+1} dt \\ &= \frac{1}{2n+1} (\ln(B) B^{2n+1} - \ln(A) A^{2n+1}) - \left[\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)^2} \right]_A^B \\ &= \frac{1}{2n+1} (\ln(B) B^{2n+1} - \ln(A) A^{2n+1}) - \frac{1}{(2n+1)^2} (B^{2n+1} - A^{2n+1}) \end{aligned}$$

Lorsque $A \rightarrow 0^+$ et $B \rightarrow 1^-$, il vient

$$\int_0^1 (\ln t) t^{2n} dt = -\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

23. Posons pour tout $t \in]0; 1[$

$$h(t) = \frac{t^2 \ln(t)}{1-t^2}.$$

Par les croissances comparées

$$h(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{ } 0.$$

De plus, en reprenant l'équivalent de la question 33

$$h(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1]{ } \frac{1}{2}.$$

La fonction h est continue sur $]0; 1[$ et prolongeable par continuité en 0 et 1. La fonction est donc bornée sur $[0; 1]$: il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall t \in]0; 1[, \quad |h(t)| \leq K.$$

Puis

$$\forall t \in]0; 1[, \quad \left| \frac{\ln(t)}{1-t^2} t^{2n+2} \right| \leq K t^{2n}.$$

Par croissance de l'intégrale

$$\left| \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2} t^{2n+2} dt \right| \leq K \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{K}{2n+1}.$$

Comme $K/(2n+1) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{ } 0$, on termine par encadrement

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2} t^{2n+2} dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{ } 0.$$

24. En passant à la limite $n \rightarrow +\infty$ dans la question 21, on obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln(t) dt}{1-t^2} = - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

En reprenant ensuite la question 20

$$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t) dt}{1-t^2} = - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

25. À l'aide de la question 18 b, on a

$$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t) dt}{t^2-1} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\pi^2}{8}.$$

On en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

• En distinguant les indices pairs et impairs

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

$$\text{D'où} \quad \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

• Et l'on conclut ce sujet par

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

DS - Compléments

THÈME : PARADOXE DE WALTER PENNEY

Dans tout le problème, on considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée, c'est-à-dire pour laquelle, à chaque lancer, les apparitions de « pile » et de « face » sont équiprobables.

On admet que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par R_n l'événement « *pile apparaît au lancer de rang n* » et par S_n l'événement « *face apparaît au lancer de rang n* »

Partie I : Un résultat utile

On considère une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et, pour tout entier naturel non nul n , on pose : $a_n = \mathbf{P}([X = n])$.

1. a) Justifier que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de nombres réels positifs ou nuls vérifiant $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$.
 b) Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, la série de terme général $a_n x^n$ est convergente.

2. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par : $\forall x \in [0, 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

On suppose que cette fonction est dérivable au point 1 ; elle vérifie donc :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = f'(1)$$

- a) Établir pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0, 1[$ l'égalité : $\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)$.

- b) En déduire que la fonction $x \mapsto \frac{f(1) - f(x)}{1 - x}$ est croissante sur $[0, 1[$ et qu'elle vérifie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0, 1[$ les inégalités suivantes : $0 \leq \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq f'(1)$.

- c) Montrer que, pour tout entier naturel N non nul, on a : $0 \leq \sum_{n=1}^N n a_n \leq f'(1)$.

En déduire que la série de terme général $n a_n$ est convergente.

- d) À l'aide des résultats des question a) et c), justifier pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0, 1[$, les inégalités suivantes : $0 \leq \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leq f'(1)$

- e) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance donnée par :

$$\mathbf{E}(X) = f'(1)$$

Partie II : Loi du temps d'attente de la première configuration « pile, pile, face »

Soit Y la variable aléatoire désignant le rang du lancer où pour la première fois apparaît un face précédé de deux piles si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît jamais.

Par exemple, si les résultats des premiers lancers sont (face, face, pile, face, pile, face, pile, pile, face, ...), la variable aléatoire Y prend la valeur 9.

On pose $c_1 = c_2 = 0$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $c_n = \mathbf{P}([Y = n])$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on note B_n l'événement $R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n$ et U_n l'événement $\bigcup_{i=3}^n B_i$.

1. On pose $u_1 = u_2 = 0$, et pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_n = \mathbf{P}(U_n)$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est monotone et convergente.
2. a) Calculer, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, la probabilité de l'événement B_n .
b) Vérifier que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.
c) En déduire les valeurs des nombres u_3, u_4 et u_5 .
3. Soit n un entier n supérieur ou égal à 5.
a) Justifier l'égalité des événements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$ et préciser leur probabilité.
b) Exprimer l'événement U_{n+1} en fonction des événements U_n et B_{n+1} ; en déduire l'égalité suivante :
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}).$$

c) Vérifier les égalités suivantes $u_3 = u_2 + \frac{1}{8}(1 - u_1)$ et $u_4 = u_3 + \frac{1}{8}(1 - u_2)$.
d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ et en déduire la probabilité de l'événement $[Y = 0]$.
4. Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $v_n = 1 - u_n$.
a) Préciser les nombres v_1, v_2, v_3, v_4 .
b) Exprimer, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, v_{n+1} en fonction de v_n et de v_{n-2} .
c) En déduire pour tout entier N supérieur ou égal à 1, l'égalité suivante : $\frac{7}{8} - v_{N+3} = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^N v_k$.
d) Montrer que la série de terme général v_n est convergente et calculer sa somme.
5. Soit g et h les fonctions définies sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n \quad \text{et} \quad h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n$$

- a) Soit n un entier supérieur ou égal à 4. Exprimer l'événement $[Y = n]$ en fonction des événements $\overline{U_{n-1}}$ et U_n ($\overline{U_{n-1}}$ désignant l'événement contraire de U_{n-1}). En déduire l'égalité : $c_n = v_{n-1} - v_n$.
- b) Valider l'égalité $c_n = v_{n-1} - v_n$ dans le cas où n est égal à 2 ou 3.
- c) Établir pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, l'égalité : $g(x) = (x-1)h(x) + x$.
- d) Exprimer pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0, 1[$, le quotient $\frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$ en fonction de $h(x)$.
- e) Justifier la croissance de la fonction h et, pour tout entier naturel N non nul et tout nombre réel x de l'intervalle $[0, 1]$, la double inégalité suivante : $\sum_{k=1}^N v_k x^k \leq h(x) \leq h(1)$.
En déduire la relation suivante : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} h(x) = h(1)$.
- f) Montrer que g est dérivable au point 1 et, à l'aide de la **Partie I**, en déduire que la variable aléatoire Y admet une espérance égale à 8.

Partie III : Paradoxe de Walter Penney (1969)

Deux joueurs J et J' s'affrontent dans un jeu utilisant la même expérience aléatoire que précédemment avec les règles suivantes :

- le joueur J est gagnant si la configuration « pile, pile, face » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « face, pile, pile » n'apparaisse ;
- le joueur J' est gagnant si la configuration « face, pile, pile » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « pile, pile, face » n'apparaisse ;
- si l'un des joueurs est gagnant, l'autre est perdant.

On se propose de démontrer que, dans ce jeu, le joueur J' possède un net avantage sur le joueur J .

1. Soit Y' la variable aléatoire désignant le rang du lancer où, pour la première fois, apparaît un pile précédé d'un pile lui-même précédé d'un face si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît jamais.

Par exemple, si les résultats des premiers lancers sont (face, face, pile, face, pile, pile, face, ...), la variable aléatoire Y' prend la valeur 6.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on désigne par B'_n l'événement $S_{n-2} \cap R_{n-1} \cap R_n$, par U'_n l'événement $\bigcup_{i=3}^n B'_i$ et on note u'_n la probabilité de U'_n .

- a) Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
Les événements B'_n, B'_{n+1} et B'_{n+2} sont-ils deux à deux incompatibles ?
 - b) En déduire que, si on pose $u'_1 = u'_2 = 0$, le même raisonnement que dans la **Partie II**, conduit à l'égalité $u'_{n+1} = u'_n + \frac{1}{8}(1 - u'_{n-2})$, pour tout entier n supérieur ou égal à 3.
 - c) En déduire l'égalité des suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(u'_n)_{n \geq 1}$.
 - d) Prouver que les deux variables aléatoires Y et Y' suivent la même loi et vérifient : $E(Y) = E(Y')$.
2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on note G_n l'événement « le joueur J est déclaré gagnant à l'issue du lancer de rang n » et g_n la probabilité de G_n .
 - a) Calculer g_3 et g_4 et établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, l'égalité suivante : $g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
 - b) En déduire la probabilité pour que le joueur J soit déclaré gagnant.
 3. Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par d_n la probabilité que lors des n premiers lancers n'apparaissent jamais deux piles consécutifs.
 - a) Préciser d_1 et d_2 .
 - b) En considérant les résultats des lancers de rang 1 et 2, justifier pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante : $d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n$.
 - c) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β que l'on ne cherchera pas à calculer, telles que, pour tout entier naturel n non nul, on ait : $d_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$.
 - d) En déduire que la série de terme général d_n converge et, en utilisant l'égalité du b), prouver l'égalité suivante : $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 5$.
 4. On désigne par T la variable aléatoire qui prend pour valeur le rang du lancer à l'issue duquel l'un des joueurs est déclaré gagnant, si cela se produit, et la valeur 0 si aucun des joueurs n'est gagnant.
 - a) Justifier, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'égalité : $P([T > n] \cup [T = 0]) = \frac{1}{2^n} + d_n$.
 - b) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, l'égalité : $P([T = n]) = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$.
 - c) Montrer que la probabilité que l'un des joueurs soit déclaré gagnant est égale à 1.

5. Calculer la probabilité que le joueur J' soit déclaré gagnant et conclure.
6. Si la configuration gagnante du joueur J avait été « pile, pile, face, pile, pile, face » et la configuration gagnante du joueur J' avait été « face, face, pile, face, face, pile », quelle aurait-été la conclusion ?
7. Soit d et t les fonctions définies sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad d(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n \quad \text{et} \quad t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}([T = n]) x^n$$

- a) Établir pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ l'égalité suivante :

$$t(x) = (x - 1) \left(d(x) + \frac{x^2}{2(2 - x)} \right) + x$$

- b) Exprimer pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0, 1[$, le quotient $\frac{t(x) - t(1)}{x - 1}$ en fonction de $d(x)$.
- c) En s'inspirant de la question 5.e de la **Partie II**, justifier l'égalité suivante : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} d(x) = d(1)$.
- d) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance et préciser $\mathbf{E}(T)$.

– FIN –