

DS - calcul

Question 1. On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & -4 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

- Calculer $A^2 - 3A$.
- En déduire un polynôme annulateur de A .
- Que peut-on en déduire sur le spectre de A ?

Question 2. On reprend la matrice A de la question précédente.

- Donner le rang de la matrice $A - I_4$.
On admet dans la suite que 2 est bien valeur propre.
- Calculer $\dim \ker(A - 2I_4) + \dim \ker(A - I_4)$ (on expliquera brièvement son raisonnement).

Question 3. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[x], \quad \varphi(P)(x) = (x^2 + 1)P''(x) + 2xP'(x).$$

- Donner la matrice de φ dans la base canonique, en déduire le spectre de φ .
- Expliciter un vecteur propre pour la valeur propre 6 dont la somme des coordonnées dans la base canonique fait 4.

Question 4. Les intégrales suivantes sont bien définies. Les calculer.

$$I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} t^{666} \sin(t) dt, \quad J = \int_0^1 10^x dx \quad \text{et} \quad K = \int_1^4 \frac{1}{t + \sqrt{t}} dt \quad \text{poser } u = \sqrt{t}.$$

Question 5. Soient $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$. On considère l'endomorphisme f de E tel que :

$$\forall M \in E, \quad f(M) = AM - MB.$$

Pour $a, c \in \mathbb{R}$, on pose $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix}$.

- Déterminer deux réels a, c non nuls tels que D soit dans le noyau de f .
- En déduire si les matrices A et B sont semblables ou non (expliquer brièvement).

Question 6. Simplifier

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt + \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt.$$

Question 7.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, donner une relation simple entre $\cos(x)^2$ et $\cos(2x)$.
- Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{t(1-t)}} dt$$

à l'aide du changement de variable $t = \frac{1+\cos x}{2}$.

Question 8. Soit φ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\varphi^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $\varphi^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$. Calculer le rang de φ .

DS - feuille réponse

Question 1. On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & -4 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

- Calculer $A^2 - 3A$.
- En déduire un polynôme annulateur de A .
- Que peut-on en déduire sur le spectre de A ?

Question 2.

Question 3.

Question 4.

Question 5.

Question 6.

Question 7.

Question 8.

DS calcul - réponses

1. On trouve $-2I_4$. Ce qui donne

$$A^2 - 3A + 2I_4 = 0_4.$$

Un polynôme annulateur est $x^2 - 3x + 2$. Les racines sont 1 et 2. Le spectre de la matrice est inclus dans $\{1; 2\}$.

2. On constate que

$$A - I_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & -4 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Les colonnes sont proportionnelles à la première qui est non nulle, le rang de la matrice est 3. D'après le théorème du rang, le noyau de $A - I_4$ est donc de dimension 3.

De plus, il est admis que 2 est valeur propre, la dimension du noyau est donc au moins 1. Comme les sous-espaces propres sont en somme directe, la somme des dimensions est égale à la dimension de la somme qui ne peut excéder 4. Finalement,

$$\dim \ker(A - 2I_4) + \dim \ker(A - I_4) = 4.$$

3. La matrice vaut

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

Elle est triangulaire, on lit le spectre sur la diagonale :

$$\text{Sp}(\varphi) = \text{Sp}(B) = \{0; 2; 6; 12\}.$$

On trouve ensuite comme vecteur propre $3x^2 + 1$.

4. Comme l'intégrande est impaire sur un intervalle centré :

$$I = 0.$$

Ensuite

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 e^{x \ln(10)} dx = \left[\frac{e^{x \ln(10)}}{\ln(10)} \right]_0^1 \\ &= \frac{10 - 1}{\ln(10)} = \frac{9}{\ln(10)}. \end{aligned}$$

Posons $u = \sqrt{t}$, changement de variable $\mathcal{C}^1$. Alors $t = u^2, dt = 2u du$. Les bornes : $t = 1 \mapsto u = 1, t = 4 \mapsto u = 2$. Alors

$$\begin{aligned} K &= \int_1^4 \frac{1}{t + \sqrt{t}} dt = \int_1^2 \frac{1}{u^2 + u} 2u du \\ &= \int_1^2 \frac{2u}{u(u+1)} du = \int_1^2 \frac{2}{u+1} du. \end{aligned}$$

On intègre :

$$K = 2[\ln(u+1)]_1^2 = 2(\ln 3 - \ln 2) = 2 \ln \frac{3}{2}.$$

5. La solution est colinéaire à la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

On en déduit que $AD = DB$ et D est inversible. Oui, les matrices sont semblables.

6. À l'aide d'une intégration par partie sur la première intégration, on trouve 0.

7. $\cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1$. Ensuite, on trouve $3\pi/8$.

8. Comme φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, son rang ne peut excéder 3. Si ce dernier vaut exactement 3, on aurait

$$\text{Im } \varphi \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \dim \text{Im } \varphi = \text{rg } \varphi = 3.$$

D'où l'égalité $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme φ serait donc surjectif. En tant qu'endomorphisme de dimension finie, φ serait bijectif. La composée $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi$ le serait aussi. Or $\varphi^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$, donc φ ne peut être bijectif. On a donc une contradiction : le rang ne peut valoir 3.

Soit $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $\varphi^2(x) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Justifions que la famille $(\varphi(x), \varphi^2(x))$ est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$0_{\mathbb{R}^3} = \lambda_1 \varphi(x) + \lambda_2 \varphi^2(x).$$

En appliquant φ , linéaire,

$$0_{\mathbb{R}^3} = \varphi(0_{\mathbb{R}^3}) = \lambda_1 \varphi^2(x) + \lambda_2 \varphi^3(x) = \lambda_1 \varphi^2(x).$$

Comme $\varphi^2(x) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $\lambda_1 = 0$. Ensuite $\lambda_2 = 0$. Dès lors $(\varphi(x), \varphi^2(x))$ est une famille libre de $\text{Im } \varphi$ qui est donc de dimension au moins 2. Finalement

$$\text{rg } \varphi = 2.$$

Dans le cas d'un endomorphisme nilpotent φ d'indice p , il est souvent utile d'introduire la famille :

$$\mathcal{F}_x = (x, \varphi(x), \dots, \varphi^{p-1}(x)) \quad \text{où} \quad \varphi^{p-1}(x) \neq 0_E.$$

Cette famille est libre. Pour s'en convaincre, on part du test de liberté

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \varphi^i(x) = 0_E$$

et en composant successivement par $\varphi^{p-1}, \varphi^{p-2}, \dots$, on obtient $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots$