

Nom :

Mathématiques

Cours

**double-diplôme
ESCP x CentraleSupélec**

Livret V

Chapitre

5. Déterminants

2026

La science consiste à passer d'un étonnement à un autre.

Aristote

Philosophe grec de l'Antiquité (384-322 av. J.-C), disciple de Platon.

1 Déterminant d'une matrice

Définition 1 (Application multilinéaire, antisymétrique)

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, une application. On dit que :

→ f est **multilinéaire** si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, toute famille de matrices colonnes $(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$, toute colonne $\widehat{C}_i$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$f\left([C_1 \mid \dots \mid \underbrace{\lambda C_i + \widehat{C}_i}_{i\text{-ième colonne}} \mid \dots \mid C_n]\right) = \lambda f\left([C_1 \mid \dots \mid C_i \mid \dots \mid C_n]\right) + f\left([C_1 \mid \dots \mid \widehat{C}_i \mid \dots \mid C_n]\right).$$

→ f est **antisymétrique** si le signe est inversé quand on permute deux colonnes. Autrement dit, si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, toute famille de colonnes $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$f\left([C_1 \mid \dots \mid C_i \mid \dots \mid C_j \mid \dots \mid C_n]\right) = -f\left([C_1 \mid \dots \mid C_j \mid \dots \mid C_i \mid \dots \mid C_n]\right).$$

Remarques. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$.

- Si f est antisymétrique et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient deux colonnes identiques, alors $f(A) = 0$.
- Si f est multilinéaire et antisymétrique et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est non inversible, alors $f(A) = 0$.

Exemple. On vérifie que l'application $f : \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto ad - bc \in \mathbb{R}$ est multilinéaire et antisymétrique.

On peut montrer que l'ensemble des formes multilinéaires antisymétriques sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitue une droite vectorielle. On en déduit la proposition/définition suivante :

Théorème 2 (définition du déterminant)

Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ vérifiant :

- i)** f est multilinéaire; **ii)** f est antisymétrique; **iii)** $f(I_n) = 1$.

Cette application est appelée **déterminant** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note alors $\det(A)$, le déterminant de la matrice A .

Exemple. Par unicité, on retrouve bien que l'application déterminant est donnée par :

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Remarques.

- Le déterminant se note fréquemment avec des barres verticales :

$$\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

- On peut donner une formule générale :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$$

où $\mathfrak{S}_n$ désigne l'ensemble des permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$, et $\varepsilon(\sigma) \in \{-1; 1\}$, la signature d'une permutation. Notons surtout que le déterminant est une fonction polynomiale en les coefficients de la matrice. On peut expliciter ce produit pour $n = 3$, on obtient alors la règle de Sarrus :

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} a & d & g & a & d \\ b & e & h & b & e \\ c & f & j & c & f \\ a & d & g & & \\ b & e & h & & \end{array} = \underbrace{aej + bfg + cdh}_{\text{diagonales descendantes}} - \underbrace{ceg - afh - bdj}_{\text{diagonales montantes}}$$

2

Propriétés du déterminant

2.1 Les opérations élémentaires

Théorème 3 (opérations élémentaires et déterminant)

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts.

- L'échange des colonnes $C_i \leftrightarrow C_j$ dans A change le déterminant en son opposé.
- Si $\lambda \neq 0$, l'opération élémentaire $C_i \leftarrow \lambda C_i$ dans A multiplie le déterminant par λ .
- L'opération élémentaire $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ dans A ne change pas le déterminant.

Remarque. Ces opérations élémentaires peuvent s'obtenir par des produits matriciels :

- Si on note $\bar{A}$, la matrice obtenue à partir de A en effectuant l'opération $C_i \leftrightarrow C_j$ (échange), alors

$$\bar{A} = P_{i,j}A \quad \text{où} \quad P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}.$$

- Si on note $\hat{A}$, la matrice obtenue à partir de A en effectuant l'opération $C_i \leftarrow \lambda C_i$ (dilatation), alors

$$\hat{A} = D_i(\lambda)A \quad \text{où} \quad D_i(\lambda) = \text{Diag}(1, \dots, 1, \lambda, 1, \dots, 1) = I_n + \lambda E_{i,i}.$$

- Si on note $\tilde{A}$, la matrice obtenue à partir de A en effectuant l'opération $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ (transvection), alors

$$\tilde{A} = T_{i,j}(\lambda)A \quad \text{où} \quad T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}.$$

- Conséquences :** Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si A n'est pas inversible, alors $\det(A) = 0$.

- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses coefficients diagonaux.

Rappels : méthode de Gauss pour des matrices inversibles

- À l'aide du pivot de Gauss, on montre que toute matrice inversible A peut être transformée, par une suite de transvections sur les colonnes, en une matrice diagonale.
- Si de plus A est triangulaire inférieure ou supérieure, alors on peut choisir ces transvections de manière à laisser la diagonale de A inchangée.

Le deuxième point donne directement :

Proposition 4 (déterminant d'une matrice triangulaire)

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

2.2 Déterminant : produit et inversibilité

Théorème 5 (caractérisation des matrices inversibles)

Une matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Théorème 6 (déterminant et produit matriciel)

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec C inversible.

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \quad \text{et} \quad \det(C^{-1}) = \frac{1}{\det(C)}.$$

On en déduit que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et toute matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible

$$\det(A^p) = (\det A)^p \quad \text{et} \quad \det(P^{-1}AP) = \det A.$$

 **Attention.** L'application déterminant n'est pas linéaire. En général : $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

2.3 Invariance par transposition

Notation. En ECG, la transposée d'une matrice A est notée tA . Dans la suite, on utilisera plutôt la notation des filières plus scientifiques : A^T .

Proposition 7 (déterminant et transposée)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\det(A) = \det(A^T).$$