

DS 11 - sujet A

THÈMES : OPTIMISATION, ESTIMATEURS

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Cours Intervalle de confiance

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, une suite de variables aléatoires de même loi de X et indépendantes. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

1. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier qu'un intervalle de confiance de p , au niveau de confiance $1 - \alpha$, est donné par :

$$I_{n,\alpha} = \left[\overline{X}_n - \frac{1}{2\sqrt{\alpha n}}; \overline{X}_n + \frac{1}{2\sqrt{\alpha n}} \right].$$

2. Par le théorème central limite, montrer qu'un intervalle de confiance asymptotique de p , au niveau de confiance $1 - \alpha$ est

$$\widetilde{I}_{n,\alpha} = \left[\overline{X}_n - \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}; \overline{X}_n + \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} \right]$$

où $t_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$ avec Φ , la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

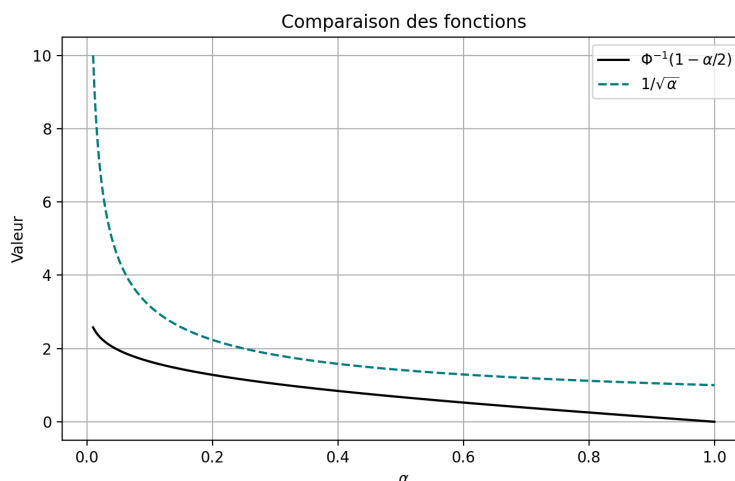
3. À l'aide des courbes suivantes, qui semble être le meilleur intervalle de confiance?

Editeur

```
# Domaine de alpha
alpha = np.linspace(0.01,
                    1, 500)

# Fonctions
y1 = norm.ppf(1 - alpha/2)
# Phi^{-1}(1 - alpha/2)
y2 = 1/np.sqrt(alpha)
# sqrt(alpha)

# Tracé
plt.plot(alpha, y1)
plt.plot(alpha, y2)
plt.show()
```



Exercice Optimisation sous contrainte

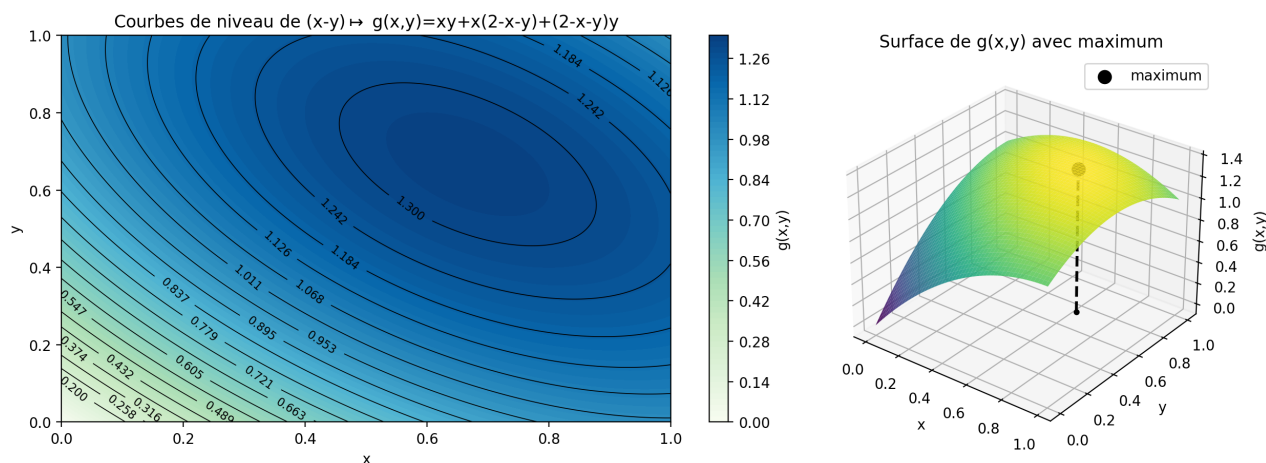
Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = xy + yz + xz$ et $\mathcal{C}$ la contrainte définie par $x + y + z = 2$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et admet un unique point critique $a_0 = (x_0, y_0, z_0)$ sous la contrainte $\mathcal{C}$.
2. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des solutions de $x + y + z = 0$. Déterminer une base orthogonale (e_1, e_2) de $\mathcal{H}$.

3. Vérifier que $\nabla^2 f(x, y, z)$ ne dépend pas de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On note q la forme quadratique associée à cette matrice hessienne. C'est-à-dire, pour tout $h \in \mathbb{R}^3$, $q(h) = {}^t H \nabla^2 f(x, y, z) H$ où H est la matrice de h dans la base canonique.
4. Calculer $q((1, 1, 1))$ et $q((0, 1, -1))$. La forme quadratique q est-elle de signe constant sur $\mathbb{R}^3$?
5. Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, calculer $q(\lambda e_1 + \mu e_2)$ et en déduire que pour tout $h \in \mathcal{H}$, $q(h) \leq 0$.
6. Soient $a \in \mathcal{C}$, $h = a - a_0 \in \mathcal{H}$ et $g: t \mapsto f(a_0 + th)$.
 - a) Rappeler pourquoi g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$? Préciser $g'(0)$ et $g''(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
 - b) Donner la formule de Taylor avec reste intégrale. En déduire que

$$\forall h \in \mathcal{H}, \quad f(a_0 + h) = f(a_0) + \langle \nabla f(a_0), h \rangle + \int_0^1 (1-u) q(h) du.$$

- c) En déduire que f admet un maximum global en a_0 sous la contrainte $\mathcal{C}$.
7. Commenter le résultat obtenu avec ces représentations graphiques.



Problème 1

Estimateurs et intervalles de confiance

Dans tout le problème :

- Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
- On considère une variable aléatoire X à valeurs strictement positives suivant la loi exponentielle de paramètre λ .

Partie I. Comparaison de deux estimateurs de $\frac{1}{\lambda}$

L'objectif de cette partie est de comparer deux estimateurs sans biais et convergents du paramètre inconnu $1/\lambda$.

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, une suite de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que X . On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad \bar{X}_n = \frac{1}{n} Y_n \quad \text{et} \quad M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

On rappelle que si T et T' sont deux estimateurs sans biais admet un moment d'ordre 2, on dit que T est « meilleur » que T' si

$$\mathbf{V}(T) \leq \mathbf{V}(T').$$

1. Calculer $\mathbf{E}(\bar{X}_n)$ et $\mathbf{V}(\bar{X}_n)$. En déduire que $\bar{X}_n$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre $1/\lambda$.
2. a) Vérifier que M_n est à densité et qu'une densité f_{M_n} est donnée par :

$$f_{M_n}(x) = \begin{cases} n\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

- b) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de l'espérance $\mathbf{E}(M_n)$ de la variable aléatoire M_n .

- c) En posant $z = 1 - e^{-\lambda x}$, justifier pour tout $a > 0$, l'égalité :

$$\int_0^a x e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} dx = -\frac{1}{\lambda^2} \int_0^{1-e^{-\lambda a}} z^{n-1} \ln(1-z) dz$$

En déduire que

$$\mathbf{E}(M_n) = -\frac{n}{\lambda} \int_0^1 z^{n-1} \ln(1-z) dz.$$

- d) Montrer que la fonction $s : z \mapsto (1-z)(1-\ln(1-z))$ définie sur l'intervalle $[0, 1[$, est une primitive de la fonction $z \mapsto \ln(1-z)$.
À l'aide d'une intégration par parties, en déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{E}(M_{n+1}) = \mathbf{E}(M_n) + \frac{1}{\lambda(n+1)}.$$

- e) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \sum_{j=1}^n 1/j$. Déduire de la question précédente que $\mathbf{E}(M_n) = u_n/\lambda$.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M'_n = \frac{M_n}{u_n}$ et $v_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2}$. On admet que $\mathbf{V}(M_n) = \frac{1}{\lambda^2} v_n$.

- a) Préciser $\mathbf{E}(M'_n)$ et $\mathbf{V}(M'_n)$.

En déduire que M'_n est un estimateur sans biais et convergent du paramètre $1/\lambda$.

- b) À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $u_n^2 \leq n v_n$.

- c) Qui est le meilleur estimateur entre M'_n et $\bar{X}_n$?

4. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $T_n(a) = a\bar{X}_n + (1-a)M'_n$.

- a) Est-ce que $T_n(a)$ est un estimateur sans biais ?

- b) En admettant que $\text{Cov}(\bar{X}_n, M'_n) = \frac{1}{n\lambda^2}$, simplifier $\mathbf{V}(T_n(a))$.

- c) Peut-on obtenir un meilleur estimateur sans biais de $1/\lambda$ avec $T_n(a)$?

5. *Python*

- a) Soient X et Y deux variables aléatoires dont on admet que l'on peut simuler à l'aide des fonctions `simuX()` et `simuY()`. On suppose que ces variables admettent des moments d'ordre 2. Proposer un programme python pour avoir une estimation de la covariance entre X et Y .

- b) En déduire un programme python qui permet de tester le résultat admis à la question 4.b).

Partie II. Un exemple

Les notations et le contexte sont ceux de la partie I. Dans cette partie, on suppose que la durée de vie (en heures) d'un composant électronique est une variable aléatoire X à valeurs strictement positives suivant la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

On suppose qu'en cas de panne, le composant électronique est immédiatement remplacé par un composant neuf dont la durée de vie est indépendante et de même loi que celle des composants précédents.

Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on note X_j la variable aléatoire égale à la durée de vie du j -ème composant.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on constitue ainsi un n -échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que X .

On note $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une réalisation du n -échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et on pose : $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

6. a) Donner une interprétation de $\frac{1}{\lambda}$. Dans quelle unité s'exprime $\frac{1}{\lambda}$?
b) Soit $p \in]0; 1[$. Déterminer en fonction de p et λ , l'unique réel h_p pour lequel on a $\mathbf{P}([X > h_p]) = p$.
c) Quelle est la loi de $\mathbf{1}_{[X > h_p]}$? En déduire un estimateur H_n sans biais et convergent pour le paramètre h_p .
d) On suppose que sur un échantillon de 100 composants, on a obtenu : $\sum_{i=1}^{100} x_i = 10^5$ heures.
Donner une estimation de $h_{\frac{1}{2}}$ (on donne $\ln 2 \approx 0,7$).

7. On admet sans démonstration que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction de répartition F_{Y_n} de la variable aléatoire Y_n est donnée par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $t > 0$ un réel fixé et $N(t)$ la variable aléatoire égale au nombre de pannes dans l'intervalle $[0, t]$.

- a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $N(t)$.

- b) Donner une estimation "naturelle" du nombre moyen de pannes dans l'intervalle $[0, t]$.

8. L'objectif de cette question est de déterminer un intervalle de confiance asymptotique du paramètre inconnu $\frac{1}{\lambda}$ au niveau de confiance $1 - \alpha$ où $0 < \alpha < 1$.

- a) Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et soit t_1 et t_2 deux réels vérifiant $\Phi(t_1) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ et $\Phi(t_2) = \frac{\alpha}{2}$. Montrer que $t_2 = -t_1$.
- b) On pose : $R_n = \sqrt{n}(\lambda \bar{X}_n - 1)$. Justifier que la suite de variables aléatoires $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
- c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([-t_1 \leq R_n \leq t_1]) = 1 - \alpha$.
- d) Déterminer un intervalle de confiance asymptotique de $\frac{1}{\lambda}$ au niveau de confiance $1 - \alpha$.
- e) Que se passe-t-il lorsque α est proche de 0 ou lorsque α est proche de 1 ?
- f) Pour $\alpha = 0,05$, on donne $t_1 \approx 2$. Montrer qu'avec l'échantillon de la question 5.d), la réalisation de l'intervalle de confiance asymptotique de $1/\lambda$ au niveau de confiance 0,95 est : $[833, 1250]$.

Problème 2
Réponse à une question d'Éléonore

Partie I : inégalités harmonico-géométrico-ecgco-arithmétiques

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $c \in \mathbb{R}$, on définit la fonction f_n et l'ensemble $\mathcal{C}_{n,c}$ par

$$f_n : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \exp(x_i) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{n,c} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \mid \sum_{i=1}^n x_i = c\}$$

1. a) Vérifier que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ puis préciser le gradient et la matrice hessienne de f_n .
b) Justifier que f_n admet un unique point, noté x_c , sous la contrainte linéaire $\mathcal{C}_{n,c}$. Vérifier que $f_n(x_c) = ne^{c/n}$.
On admet qu'en reprenant la démonstration de la question 6.b) de l'exercice, on prouve que $f_n(x_c)$ est le minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}_{n,c}$.
2. Vérifier que pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$: $\sum_{i=1}^n e^{x_i} \geq n \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)$.
3. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_*^{+n}$. Avec les choix $x_i = \pm \ln(a_i)$, justifier que

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i.$$

Partie II : Estimateurs en moyenne

• **A- Préliminaires**

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance, avec $X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$.

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, strictement positives, indépendantes et de même loi que X . On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad G_n(X) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n X_i}, \quad H_n(X) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}.$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n(X)$ admet une espérance et l'exprimer à l'aide de l'espérance de X . En déduire que $G_n(X)$ et $H_n(X)$ admettent une espérance strictement positive.
2. On considère aussi la variable aléatoire $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ et $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que U . On pose

$$a(n) = \frac{1}{\mathbf{E}(A_n(U))}, \quad g(n) = \frac{1}{\mathbf{E}(G_n(U))} \quad \text{et} \quad h(n) = \frac{1}{\mathbf{E}(H_n(U))}.$$

- a) Vérifier que

$$a(n) = 2 \quad \text{et} \quad g(n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

- b) i) Proposer un programme python qui prend en argument n et simule la variable aléatoire $H_n(U)$.
ii) En déduire une fonction `aproxh` qui prend en argument n et renvoie une approximation de $h(n)$.

• **Partie B : estimations d'une étendue en moyenne arithmétique et géométrique**

Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$. Dans toute la suite, on suppose que

$$X \mapsto \mathcal{U}([0, \theta]).$$

3. Le cas arithmétique

- a) Vérifier que $\widehat{A}_n(X) = a(n) A_n(X)$ est un estimateur sans biais de θ .
- b) Justifier que cet estimateur est convergent vers θ .

4. Le cas géométrique

On pose maintenant :

$$\widehat{G}_n(X) = g(n) G_n(X).$$

- a) En remarquant que $G_n(X)$ et $\theta G_n(U)$ ont même loi, justifier que $\widehat{G}_n(X)$ est un estimateur sans biais de θ .

• L'objectif de la suite est de prouver que cet estimateur est convergent. On propose deux preuves.

b) Preuve 1

i) Vérifier que $V(G_n(U)) = \left(\frac{n}{n+2}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$.

- ii) En déduire que $\widehat{G}_n(X)$ est un estimateur convergent de θ .

c) Preuve 2

- i) Justifier rapidement que $-\ln(U)$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

ii) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \overline{U}_n = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(U_i).$

Déduire de la question précédente la convergence en probabilité de la suite de variables $(\overline{U}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers une variable que l'on précisera.

- iii) Exprimer $G_n(U)$ à l'aide de θ et $\overline{U}_n$. En déduire que

$$G_n(U) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} e^{-1}.$$

- iv) Retrouver le fait que $\widehat{G}_n(X)$ est un estimateur convergent de θ .

on pourra commencer par montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un entier N tel que pour tout entier $n \geq N$, $|g(n) - e| \leq \varepsilon/(2\theta)$.

– FIN –



DS 11 - sujet *

THÈMES : OPTIMISATION, ESTIMATEURS

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Cours

Intervalle de confiance

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, une suite de variables aléatoires de même loi de X et indépendantes. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

1. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier qu'un intervalle de confiance de p , au niveau de confiance $1 - \alpha$, est donné par :

$$I_{n,\alpha} = \left[\bar{X}_n - \frac{1}{2\sqrt{\alpha n}}; \bar{X}_n + \frac{1}{2\sqrt{\alpha n}} \right].$$

2. Par le théorème central limite, montrer qu'un intervalle de confiance asymptotique de p , au niveau de confiance $1 - \alpha$ est

$$\widetilde{I}_{n,\alpha} = \left[\bar{X}_n - \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}; \bar{X}_n + \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} \right]$$

où $t_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$ avec Φ , la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

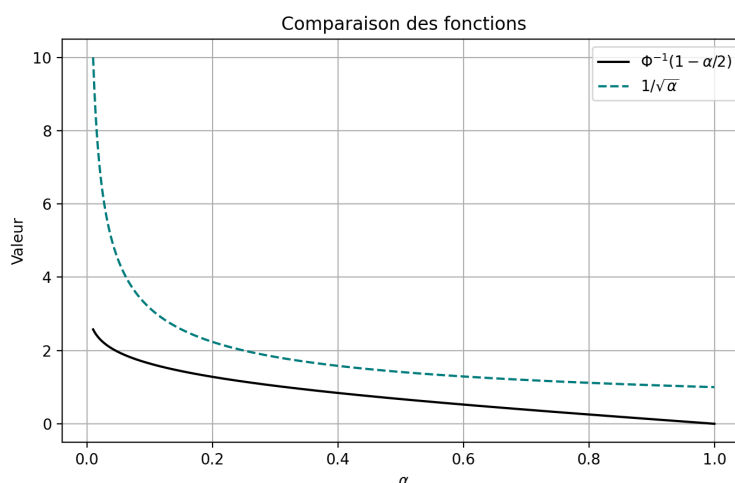
3. À l'aide des courbes suivantes, qui semble être le meilleur intervalle de confiance?

Editeur

```
# Domaine de alpha
alpha = np.linspace(0.01,
                    1, 500)

# Fonctions
y1 = norm.ppf(1 - alpha/2)
# Phi^{-1}(1 - alpha/2)
y2 = 1/np.sqrt(alpha)
# sqrt(alpha)

# Tracé
plt.plot(alpha, y1)
plt.plot(alpha, y2)
plt.show()
```



Exercice

Optimisation sous contrainte

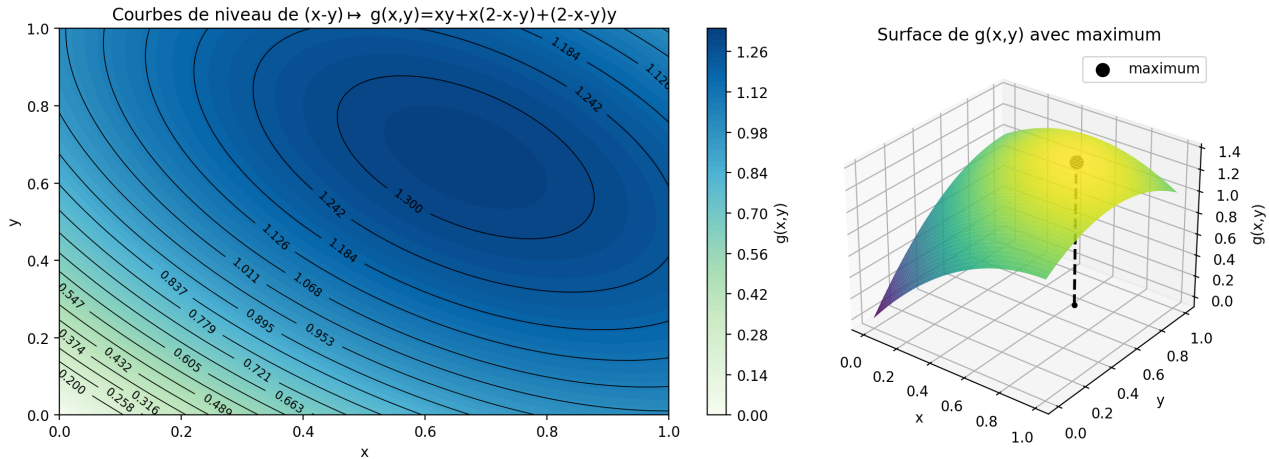
Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = xy + yz + xz$ et $\mathcal{C}$ la contrainte définie par $x + y + z = 2$.

- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et admet un unique point critique $a_0 = (x_0, y_0, z_0)$ sous la contrainte $\mathcal{C}$.
- On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des solutions de $x + y + z = 0$. Déterminer une base orthogonale (e_1, e_2) de $\mathcal{H}$.
- Vérifier que $\nabla^2 f(x, y, z)$ ne dépend pas de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On note q la forme quadratique associée à cette matrice hessienne.

4. La forme quadratique q est-elle de signe constant sur $\mathbb{R}^3$?
5. Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, calculer $q(\lambda e_1 + \mu e_2)$ et en déduire que pour tout $h \in \mathcal{H}$, $q(h) \leq 0$.
6. Soient $a \in \mathcal{C}$, $h = a - a_0 \in \mathcal{H}$ et $g: t \mapsto f(a_0 + th)$.
- Rappeler pourquoi g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$? Préciser $g'(0)$ et $g''(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
 - Justifier que

$$\forall h \in \mathbb{R}^3, \quad f(a_0 + h) = f(a_0) + \langle \nabla f(a_0), h \rangle + \int_0^1 (1-u) q(h) du.$$

- En déduire que f admet un maximum global en a_0 sous la contrainte $\mathcal{C}$.
7. Commenter le résultat obtenu avec ces représentations graphiques.



Problème 1

Estimateurs et intervalles de confiance

Dans tout le problème :

- Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
- On considère une variable aléatoire X à valeurs strictement positives suivant la loi exponentielle de paramètre λ .

Partie I. Comparaison de deux estimateurs de $\frac{1}{\lambda}$

L'objectif de cette partie est de comparer deux estimateurs sans biais et convergents du paramètre inconnu $1/\lambda$.

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, une suite de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que X . On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad \overline{X}_n = \frac{1}{n} Y_n \quad \text{et} \quad M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

On rappelle que si T et T' sont deux estimateurs sans biais admet un moment d'ordre 2, on dit que T est « meilleur » que T' si

$$\mathbf{V}(T) \leq \mathbf{V}(T').$$

- Calculer $\mathbf{E}(\overline{X}_n)$ et $\mathbf{V}(\overline{X}_n)$. En déduire que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre $1/\lambda$.
- Vérifier que M_n est à densité et qu'une densité f_{M_n} est donnée par :

$$f_{M_n}(x) = \begin{cases} n\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

- Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de l'espérance $\mathbf{E}(M_n)$ de la variable aléatoire M_n .
- À l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$\mathbf{E}(M_n) = -\frac{n}{\lambda} \int_0^1 z^{n-1} \ln(1-z) dz.$$

- d) Donner la dérivée de $s : z \in [0; 1] \mapsto (1 - z)(1 - \ln(1 - z))$. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(M_{n+1}) = \mathbf{E}(M_n) + \frac{1}{\lambda(n+1)}$.
- e) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \sum_{j=1}^n 1/j$. Déduire de la question précédente que $\mathbf{E}(M_n) = u_n/\lambda$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M'_n = \frac{M_n}{u_n}$ et $v_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2}$. On admet que $\mathbf{V}(M_n) = \frac{1}{\lambda^2} v_n$.
- a) Préciser $\mathbf{E}(M'_n)$ et $\mathbf{V}(M'_n)$.
En déduire que M'_n est un estimateur sans biais et convergent du paramètre $1/\lambda$.
- b) À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $u_n^2 \leq n v_n$.
- c) Qui est le meilleur estimateur entre M'_n et $\bar{X}_n$?
4. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on pose $T_n(a, b) = a\bar{X}_n + bM'_n$ et $f : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbf{V}(T_n(a, b))$.
- a) Préciser l'ensemble $\mathcal{C}$ des couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que l'estimateur $T_n(a, b)$ est sans biais de $1/\lambda$.
- b) En admettant que $\text{Cov}(\bar{X}_n, M'_n) = \frac{1}{n\lambda^2}$, expliciter $f(a, b)$.
- c) Vérifier que f admet un minimum sous la contrainte $\mathcal{C}$. Peut-on obtenir un meilleur estimateur sans biais de $1/\lambda$ avec $T_n(a, b)$?
5. Python
- a) Soient X et Y deux variables aléatoires dont on admet que l'on peut simuler à l'aide des fonctions `simuX()` et `simuY()`. On suppose que ces variables admettent des moments d'ordre 2. Proposer un programme python pour avoir une estimation de la covariance entre X et Y .
- b) En déduire un programme python qui permet de tester le résultat admis à la question 4.b).

Partie II. Un exemple

Les notations et le contexte sont ceux de la partie I. Dans cette partie, on suppose que la durée de vie (en heures) d'un composant électronique est une variable aléatoire X à valeurs strictement positives suivant la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

On suppose qu'en cas de panne, le composant électronique est immédiatement remplacé par un composant neuf dont la durée de vie est indépendante et de même loi que celle des composants précédents.

Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on note X_j la variable aléatoire égale à la durée de vie du j -ème composant.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on constitue ainsi un n -échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que X .

On note $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une réalisation du n -échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et on pose : $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

6. a) Donner une interprétation de $\frac{1}{\lambda}$. Dans quelle unité s'exprime $\frac{1}{\lambda}$?
- b) Soit $p \in]0; 1[$. Déterminer en fonction de p et λ , l'unique réel h_p pour lequel on a $\mathbf{P}([X > h_p]) = p$.
- c) Proposer un estimateur H_n sans biais et convergent pour le paramètre h_p .
- d) On suppose que sur un échantillon de 100 composants, on a obtenu : $\sum_{i=1}^{100} x_i = 10^5$ heures.
Donner une estimation de $h_{\frac{1}{2}}$ (on donne $\ln 2 \simeq 0,7$).
7. On admet sans démonstration que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction de répartition F_{Y_n} de la variable aléatoire Y_n est donnée par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $t > 0$ un réel fixé et $N(t)$ la variable aléatoire égale au nombre de pannes dans l'intervalle $[0, t[$.

- a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $N(t)$.
- b) Donner une estimation "naturelle" du nombre moyen de pannes dans l'intervalle $[0, t[$.
8. L'objectif de cette question est de déterminer un intervalle de confiance asymptotique du paramètre inconnu $\frac{1}{\lambda}$ au niveau de confiance $1 - \alpha$ où $0 < \alpha < 1$.
- a) Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et soit t_1 et t_2 deux réels vérifiant $\Phi(t_1) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ et $\Phi(t_2) = \frac{\alpha}{2}$. Montrer que $t_2 = -t_1$.
- b) On pose : $R_n = \sqrt{n}(\lambda\bar{X}_n - 1)$. Justifier que la suite de variables aléatoires $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
- c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([-t_1 \leq R_n \leq t_1]) = 1 - \alpha$.
- d) Déterminer un intervalle de confiance asymptotique de $\frac{1}{\lambda}$ au niveau de confiance $1 - \alpha$.
- e) Que se passe-t-il lorsque α est proche de 0 ou lorsque α est proche de 1?
- f) Pour $\alpha = 0,05$, on donne $t_1 \simeq 2$. Montrer qu'avec l'échantillon de la question 5.d), la réalisation de l'intervalle de confiance asymptotique de $1/\lambda$ au niveau de confiance 0,95 est : $[833, 1250]$.

Problème 2
Réponse à une question d'Éléonore

Partie I : inégalités harmonico-géométrico-ecgco-arithmétiques

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $c \in \mathbb{R}$, on définit la fonction f_n et l'ensemble $\mathcal{C}_{n,c}$ par

$$f_n : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \exp(x_i) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{n,c} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \mid \sum_{i=1}^n x_i = c\}$$

1. **a)** Vérifier que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ puis préciser le gradient et la matrice hessienne de f_n .
b) Justifier que f_n admet un unique point, noté x_c , sous la contrainte linéaire $\mathcal{C}_{n,c}$. Vérifier que $f_n(x_c) = ne^{c/n}$.
On admet qu'en reprenant la démonstration de la question 6.b) de l'exercice, on prouve que $f_n(x_c)$ est le minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}_{n,c}$.
2. Vérifier que pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$: $\sum_{i=1}^n e^{x_i} \geq n \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)$.
3. Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_*^{+n}$. Justifier à l'aide de la question précédente que : $\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$.

Partie II : Estimateurs en moyenne

• **Préliminaires**

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance, avec $X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$.

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, strictement positives, indépendantes et de même loi que X . On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad G_n(X) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n X_i}, \quad H_n(X) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}.$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n(X)$ admet une espérance et l'exprimer à l'aide de l'espérance de X . En déduire que $G_n(X)$ et $H_n(X)$ admettent une espérance strictement positive.
2. On considère aussi la variable aléatoire $U \mapsto \mathcal{U}([0, 1])$ et $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que U . On pose

$$a(n) = \frac{1}{\mathbb{E}(A_n(U))}, \quad g(n) = \frac{1}{\mathbb{E}(G_n(U))} \quad \text{et} \quad h(n) = \frac{1}{\mathbb{E}(H_n(U))}.$$

a) Vérifier que

$$a(n) = 2 \quad \text{et} \quad g(n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

- b)** i) Proposer un programme python qui prend en argument n et simule la variable aléatoire $H_n(U)$.
ii) En déduire une fonction `aproxh` qui prend en argument n et renvoie une approximation de $h(n)$.

Partie A : estimations d'une étendue en moyenne arithmétique et géométrique

Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$. Dans toute la suite, on suppose que

$$X \mapsto \mathcal{U}([0, \theta]).$$

3. Le cas arithmétique

- a)** Vérifier que $\widehat{A}_n(X) = a(n)A_n(X)$ est un estimateur sans biais de θ .
- b)** Justifier que cet estimateur est convergent vers θ .

4. Le cas géométrique

On pose maintenant :

$$\widehat{G}_n(X) = g(n)G_n(X).$$

- a)** En remarquant que $G_n(X)$ et $\theta G_n(U)$ ont même loi, justifier que $\widehat{G}_n(X)$ est un estimateur sans biais de θ .

- L'objectif de la suite est de prouver que cet estimateur est convergent. On propose deux preuves.
- b)** *Preuve 1*

- i) Vérifier que $V(G_n(U)) = \left(\frac{n}{n+2}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$.
- ii) En déduire que $\widehat{G}_n(X)$ est un estimateur convergent de θ .
- c) *Preuve 2*
- i) Justifier rapidement que $-\ln(U)$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
- ii) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \overline{U}_n = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(U_i)$.
- Déduire de la question précédente la convergence en probabilité de la suite de variables $(\overline{U}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers une variable que l'on précisera.
- iii) Exprimer $G_n(U)$ à l'aide de θ et $\overline{U}_n$. En déduire que $G_n(U) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} e^{-1}$.
- iv) Retrouver le fait que $\widehat{G}_n(X)$ est un estimateur convergent de θ .
on pourra commencer par montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_^+$, il existe un entier N tel que pour tout entier $n \geq N$, $|g(n) - e| \leq \varepsilon/(2\theta)$.*

Partie B : estimation d'une étendue en moyenne harmonique

5. pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $N_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{[U_i \leq \frac{1}{n}]}$ où $U_i \hookrightarrow \mathcal{U}(]0; 1[)$

et pour tout indice i , $\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbf{1}_{[U_i \leq \frac{1}{n}]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } U_i(\omega) \leq 1/n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

- a) Reconnaître la loi de N_n .
- b) Vérifier que pour tout $K \in \mathbb{N}^*$: $E(N_n) = 1, \quad V(N_n) \leq 1$ puis $P(N_n > K) \leq \frac{1}{K^2}$.
- c) Que dire de la convergence en loi de la suite $(N_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

L'objectif de la suite est de prouver que : $\ln(n) H_n(U) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 1$.

Pour cela, on pose pour tous $i, n \in \mathbb{N}^*$

$$Y_i = \frac{1}{U_i} \mathbf{1}_{[U_i > \frac{1}{n}]}, \quad W_i = \frac{1}{U_i} \mathbf{1}_{[U_i \leq \frac{1}{n}]} \quad \text{et} \quad S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{U_i}, \quad T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \quad R_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i.$$

6. Étude de T_n

- a) Soit Y une variable aléatoire à densité à valeurs dans $[0; n]$. Montrer que

$$E(Y) = \int_0^n P(Y \geq t) dt \quad \text{et} \quad E(Y^2) = \int_0^n 2t P(Y \geq t) dt.$$

- b) En admettant que ces formules s'appliquent encore à Y_i , vérifier que (On pourra distinguer $t \in [0; 1]$ et $t \in [1; n]$)

$$E(Y_i) = \ln(n) \quad \text{et} \quad V(Y_i) = n - 1 - \ln(n)^2.$$

- c) En déduire l'espérance, la variance de T_n puis : $\frac{T_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 1$.

7. Étude de R_n

- a) Justifier que pour tout réel $\varepsilon > 0$, tout entier $K \geq 2$, $P\left(\frac{R_n}{\ln n} \geq \varepsilon\right) \leq P(N_n > K) + P\left(\left[\sum_{i=1}^n W_i \geq n\varepsilon \ln(n)\right] \cap [N_n \leq K]\right)$.

En déduire que $P\left(\frac{R_n}{\ln n} \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{K^2} + nP\left(W_1 \geq \frac{n\varepsilon \ln(n)}{K}\right)$.

- b) Expliciter et simplifier cette majoration avec $K = \lfloor \sqrt{\ln(n)} \rfloor$. En déduire : $\frac{R_n}{\ln n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$.

8. Conclusion

- a) Justifier que $\frac{S_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 1$, puis $\ln(n) H_n(U) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 1$.
- b) En déduire que $\ln(n) H_n(X)$ est un estimateur convergent de θ .

- FIN -



DS 11- solution

Cours

Exercice

Optimisation sous contrainte

1. La fonction f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ car polynomiale avec

$$\partial_1 f(x, y, z) = y + z, \quad \partial_2 f(x, y, z) = x + z, \quad \partial_3 f(x, y, z) = x + y$$

Il y a une unique contrainte linéaire $g(x, y, z) = x + y + z = 2$ avec

$$\nabla g(x, y, z) = (1, 1, 1).$$

On sait alors que (x, y, z) est point critique sous la contrainte si et seulement si

$$\begin{cases} g(x, y, z) = 2 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g \end{cases} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + z = \lambda \\ x + z = \lambda \\ x + y = \lambda \end{cases}$$

En effectuant $L_1 - L_2, L_1 - L_3$ et $L_1 - L_4$, on constate que $x = y = z$. En revenant à L_1 , on trouve un unique point critique :

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

2. vérifier qu'une base orthogonale possible de cet espace de dimension 2 est :

$$e_1 = (0, 1, -1) \quad \text{et} \quad e_2 = (2, -1, -1).$$

3. En continuant les calculs de la question 1 :

$$\partial_{11}^2 f(x, y, z) = 0 = \partial_{22}^2 f(x, y, z) = \partial_{33}^2 f(x, y, z)$$

$$\partial_{12}^2 f(x, y, z) = \partial_{21}^2 f(x, y, z) = 1 \quad (\text{de même pour } \partial_{ij}^2 f, i \neq j)$$

La matrice hessienne est alors :

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Rédaction 1.

Notons $a_{i,j}$, les coefficients de la matrice hessienne. Pour $H = {}^t[h_1, h_2, h_3]$, on a

$$\begin{aligned} {}^t H \nabla^2 f(x, y, z) H &= \sum_{i=1}^3 a_{ii} h_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_{ij} h_i h_j \\ &= 0 + 2(h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3). \end{aligned}$$

On peut alors tester avec

$$q((1, 1, 1)) > 0 \quad \text{et} \quad q((0, 1, -1)) = -2 < 0.$$

Il y a un changement de signe.

Rédaction 2.

On a $\nabla^2 f(x, y, z) = J - I_3$.

$$\text{rg}(\nabla^2 f(x, y, z) + I_3) = 1$$

donc -1 est valeur propre et l'espace propre associé est de dimension 2 (théorème du rang). De plus

$$\nabla^2 f \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\neq 0}$$

et $2 \in \text{Sp}(\nabla^2 f(x, y, z))$. Par un compte des dimensions, il n'y a pas d'autres valeurs propres.

$$\text{Sp}(\nabla^2 f(x, y, z)) = \{-1; 2\}.$$

Cela suffit pour le changement de signe.

5. Rédaction 1

Soit $h \in \mathcal{H}$. Notons que

$$\nabla^2 f(e_1) = -e_1 \quad \text{et} \quad \nabla^2 f(e_2) = -e_2.$$

Comme (e_1, e_2) est une famille génératrice de $\mathcal{H}$, il existe deux réels λ, μ tels que $h = \lambda e_1 + \mu e_2$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} q(h) &= {}^t(\lambda e_1 + \mu e_2) \nabla^2 f(\lambda e_1 + \mu e_2) \\ &= {}^t(\lambda e_1 + \mu e_2)(-\lambda e_1 - \mu e_2) \\ &= -\lambda^2 \|e_1\|^2 + (-\mu^2) \|e_2\|^2 \quad \text{car } {}^t e_1 e_2 = \langle e_1, e_2 \rangle = 0 \\ q(h) &\leq 0. \end{aligned}$$

Rédaction 2

On peut faire le calcul directement. Pour $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathcal{H}$, on a $h_3 = -h_1 - h_2$ puis la simplification :

$$\begin{aligned} q(h) &= 2(h_1 h_2 + h_1(-h_1 - h_2) + h_2(-h_1 - h_2)) \\ &= 2(-h_1^2 - h_2^2 - h_1 h_2) \\ &= -2h_1^2 - 2h_2^2 - 2h_1 h_2 \\ &= -h_1^2 - h_2^2 - (h_1 + h_2)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

- 6.a) D'après le cours sur les dérivées directionnelles, on sait que g est $\mathcal{C}^2$ avec

$$g'(0) = \langle \nabla f(a_0), h \rangle;$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g''(t) = q_{a+th}(h) = {}^t H \nabla^2 f(a_0 + th) H.$$

où q_{a+th} désigne la forme quadratique associée à la matrice symétrique $\nabla^2 f(a + th)$. Comme cette dernière est constante, on a plus simplement :

$$g''(t) = q(h).$$

6.b et c) D'après la formule de Taylor avec reste intégral sur g de classe C^2 entre 0 et 1 :

$$g(1) = g(0) + g'(0)(1-0) + \int_0^1 (1-u)g''(u) \, du.$$

D'où

$$f(a_0 + h) = f(a_0) + \underbrace{\langle \nabla f(a_0), h \rangle}_{=0} + \underbrace{\int_0^1 (1-u) q(h) \, du}_{\leq 0 \text{ car } h \in \mathcal{H}}.$$

On a alors $f(a_0 + h) \leq f(a_0)$ pour tout $h \in \mathcal{H}$. Dit autrement

$$\forall b \in \mathcal{C}, \quad f(b) \leq f(a_0).$$

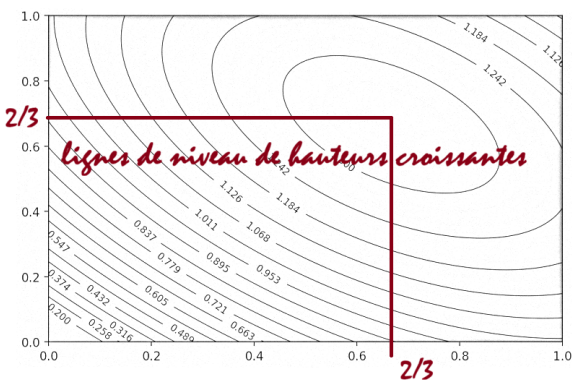
On retrouve la définition d'un maximum sous la contrainte.

7. On représente la fonction :

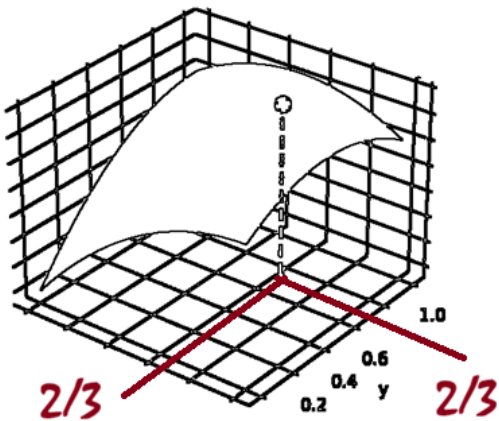
$$(x, y) \mapsto f(x, y, 2 - x - y) \quad \text{car } z = 2 - x - y$$

de deux manières :

→ À l'aide de quelques unes de ses lignes de niveau



→ ou directement par le tracé de sa surface.



On conjecture un maximum global pour $(x, y) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.
Dans ce cas

$$z = 2 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

On retrouve bien le maximum global sous la contrainte en procédant par substitution.

Problème 1

Estimateurs et intervalles de confiance

1. Par linéarité de l'espérance

$$\mathbf{E}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

Et par indépendance des (X_i) :

$$\mathbf{V}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i) = \frac{\mathbf{V}(X_1)}{n} = \frac{1}{n\lambda^2}.$$

2.a) Par égalité en loi et indépendance des variables X_i , on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F_{M_n}(t) = \mathbf{P}(M_n \leq t) = \mathbf{P}(X_1 \leq t, X_2 \leq t, \dots, X_n \leq t)$$

$$= \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i \leq t) = \mathbf{P}(X_1 \leq t)^n$$

$$F_{M_n}(t) = F_{X_1}(t)^n.$$

Par composition, F_{M_n} est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sauf en 0. Ainsi M_n est à densité et une densité est obtenue par dérivation :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad F'_{M_n}(t) = nF'_{X_1}(t)F_{X_1}(t)^{n-1}.$$

puis $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{M_n}(t) = n f_{X_1}(t) F_{X_1}(t)^{n-1}.$

D'où le résultat.

2.b) Rédaction 1. On a

$$0 \leq M_n \leq \sum_{i=1}^n X_i.$$

Par domination, M_n admet une espérance.

→ Rédaction 2

On peut aussi dire que $t \in \mathbb{R} \mapsto t f_{M_n}(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ nulle sur $\mathbb{R}^-$, on a donc une intégrale généralisée en $+\infty$. De plus par les croissances comparées :

$$tf_{M_n}(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

On en déduit par les critères de négligeabilité et de Riemann, la convergence en $+\infty$. Comme l'intégrande est, positive, on a même convergence absolue, M_n admet une espérance.

2.c) Il suffit de faire le changement de variable $\mathcal{C}^1$

$$z = 1 - e^{-\lambda x}, \quad dz = \lambda e^{-\lambda x} dx, \quad x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - z)$$

pour avoir

$$\begin{aligned} & \int_0^a x e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} dx \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} \int_0^a (-\lambda x) (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} \int_0^{1-e^{-\lambda a}} \ln(1-z) \cdot z^{n-1} dz. \end{aligned}$$

La suite en découle en prenant $a \rightarrow +\infty$.

2.d) La fonction s est dérivable sur $]0; 1[$ par produit et composition avec

$$\forall z \in]0; 1[, \quad s'(z) = (1-z) \left(\frac{1}{1-z} \right) + (-1)(1 - \ln(1-z)) \\ = \ln(1-z).$$

Soit $\varepsilon \in]0; 1[$. Procédons par intégration par parties (les fonctions sont $\mathcal{C}^1$). D'où

$$\int_0^{1-\varepsilon} z^n \ln(1-z) dz = \int_0^{1-\varepsilon} z^n s'(z) dz \\ = [z^n s(z)]_0^{1-\varepsilon} - n \int_0^{1-\varepsilon} z^{n-1} s(z) dz.$$

Notons que par croissances comparées $s(z) \xrightarrow{z \rightarrow 1} 0$ et $s(0) = 0$. Le crochet tend vers 0 :

$$[z^n s(z)]_0^{1-\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

et

$$\int_0^{1-\varepsilon} z^{n-1} s(z) dz = \int_0^{1-\varepsilon} z^{n-1} (1-z)(1 - \ln(1-z)) dz \\ = \int_0^{1-\varepsilon} z^{n-1} dz - \int_0^{1-\varepsilon} z^n dz - \int_0^{1-\varepsilon} z^{n-1} \ln(1-z) dz \\ + \int_0^{1-\varepsilon} z^n \ln(1-z) dz \\ \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + I_{n-1} - I_n \\ \text{où on a posé } I_n = \int_0^1 z^n \ln(1-z) dz. \text{ Ainsi}$$

$$I_n = -n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - I_{n-1} + I_n \right].$$

D'où

$$(n+1)I_n = -\frac{1}{n+1} + nI_n \quad \text{et} \quad \frac{-(n+1)I_n}{\lambda} = \frac{1}{\lambda(n+1)} - \frac{nI_n}{\lambda}$$

ce qui donne :

$$\mathbf{E}(M_{n+1}) = \frac{1}{\lambda(n+1)} + \mathbf{E}(M_n).$$

2.e) On peut procéder par récurrence ou par télescopage :

$$\mathbf{E}(M_n) - \mathbf{E}(M_1) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{E}(M_{k+1}) - \mathbf{E}(M_k) \\ = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda(k+1)} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\lambda k} = \frac{u_n - 1}{\lambda}.$$

On obtient bien le résultat demandé car

$$\mathbf{E}(M_1) = \mathbf{E}(X_1) = \frac{1}{\lambda}.$$

3.a) Par linéarité

$$\mathbf{V}(M'_n) = \frac{\mathbf{E}(M_n)}{u_n} = \frac{1}{\lambda}$$

et on a aussi en utilisant le fait que $v_n \leq S = \sum_{j=1}^{+\infty} 1/j^2$:

$$\mathbf{V}(M'_n) = \frac{v_n}{u_n^2 \lambda^2} \leq \frac{S}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{u_n^2}.$$

De plus, la série $\sum 1/j$ est divergente, comme (u_n) est croissante $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$. On obtient par encadrement

$$\mathbf{V}(M'_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Sachant que le biais est nul, on sait que dans ce cas l'estimateur est convergent.

3.b) L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique donne :

$$\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Avec le choix $y_i = 1, x_i = 1/i$, on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \cdot \sum_{i=1}^n 1^2.$$

C'est-à-dire

$$u_n^2 \leq v_n \cdot n.$$

3.c) D'une part

$$\mathbf{V}(M'_n) = \frac{v_n}{u_n^2 \lambda^2}.$$

D'autre part

$$\mathbf{V}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n} \mathbf{V}(X_1) = \frac{1}{\lambda^2 n}.$$

On a

$$\frac{\mathbf{V}(M'_n)}{\mathbf{V}(\overline{X}_n)} = \frac{v_n \cdot n}{u_n^2} \geq 1$$

puis

$$\mathbf{V}(M'_n) \geq \mathbf{V}(\overline{X}_n).$$

Les deux estimateurs étant sans biais, $\overline{X}_n$ est meilleur que M'_n .

4.a) On a

$$\mathbf{E}(T_n(a, b)) = a \mathbf{E}(\overline{X}_n) + b \mathbf{E}(M'_n) \\ = (a + b) \frac{1}{\lambda}.$$

Ainsi $T_n(a, b)$ est sans biais si et seulement si $a + b = 1$. Dit autrement :

$$\mathcal{C} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a + b = 1\}.$$

4.b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$f(a, b) = \mathbf{V}(T_n(a, b)) \\ = \mathbf{V}(a \overline{X}_n + b M'_n) \\ = a^2 \mathbf{V}(\overline{X}_n) + 2ab \text{Cov}(\overline{X}_n, M'_n) + b^2 \mathbf{V}(M'_n) \\ = a^2 \cdot \frac{1}{\lambda_n^2} + 2ab \cdot \frac{1}{\lambda_n^2} + b^2 \frac{v_n}{u_n^2 - 1} \\ = \frac{1}{\lambda_n^2} \left(a^2 + 2ab + b^2 \frac{v_n}{u_n^2} \right).$$

4.c) Procédons par substitution avec $b = 1 - a$. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(a) = f(a, 1-a) = \frac{1}{\lambda_n^2} \left(a^2 + 2a(1-a) + (1-a)^2 \frac{nv_n}{v_1^2} \right) \\ = \frac{1}{\lambda_n^2} \left(2a - a^2 + (1-a)^2 \frac{nv_n}{u_n^2} \right).$$

La fonction g est polynomiale de degré 2 avec un coefficient dominant positif. Il y a donc un minimum atteint au point critique

$$\begin{aligned} g'(a) = 0 &\iff 2 - 2a + 2(a-1) \frac{nv_n}{u_n^2} = 0 \\ &\iff a = 1. \end{aligned}$$

L'estimateur $\bar{X}_n$ reste le meilleur estimateur sans biais.

5.a)

```
def covariance():
    cxy=0
    cx=0
    cy=0
    m=50000
    for i in range(m):
        X=simuX()
        Y=simuY()
        cxy+=X*Y
        cx+=X
        cy+=Y
    return cxy/m - (cx/m)*(cy/m)
```

5.b) Pour tester, on fait un premier programme pour simuler $\bar{X}_n$ et M'_n en prenant bien garde à prendre les mêmes réalisations des $(X_1, \dots, X_n)$.

```
def simuXM(n):
    X=rd.exponential(1,n)
    u=0
    for j in range(1,n+1):
        u+=1/j
    Xnbar=np.mean(X)
    Mnprime=np.max(X)/u
    return Xnbar, Mnprime
```

Ensuite, on modifie le code précédent pour estimer la covariance :

```
def covariance2(n):
    cxy=0
    cx=0
    cy=0
    m=50000
    for i in range(m):
        X,Y=simuXM(n)
        cxy+=X*Y
        cx+=X
        cy+=Y
    return cxy/m - (cx/m)*(cy/m)
```

Remarque. Voici la vérification en estimant l'inverse de la covariance pour différentes valeurs de n et en testant si on a retrouvé bien une bonne approximation de n .

```
for n in range(1,15):
    print(np.round(1/covariance2(n),2))

>>>0.99
2.01
2.95
3.95
4.97
6.01
7.01
8.02
9.04
10.07
10.99
12.08
```

13.08
13.96

6.a) Le terme $\frac{1}{\lambda} = \mathbf{E}(X_1)$ correspond à la durée de vie moyenne du composant. Il s'exprime en heures.

6.b) On a

$$\begin{aligned} p = \mathbf{P}(X > h_p) &\iff p = 1 - \mathbf{P}(X \leq h_p) = 1 - (1 - e^{-\lambda h_p}) \\ &\iff p = e^{-\lambda h_p} \\ &\iff \frac{-\ln(p)}{\lambda} = h_p. \end{aligned}$$

6.c) Posons

$$H_n = -\ln(p)\bar{X}_n$$

de sorte que

$$\mathbf{E}(H_n) = -\ln(p)\mathbf{E}(\bar{X}_n) = -\ln(p) \times \frac{1}{\lambda} = h_p.$$

De plus, d'après la loi faible des grands nombres (les variables X_i sont indépendants avec un moment d'ordre 2) :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} \mathbf{E}(X) = -\frac{h_p}{\ln(p)}.$$

$$\text{D'où} \quad H_n = -\ln(p)\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} h_p.$$

L'estimateur est convergent.

6.d) D'après la loi faible des grands nombres (les variables X_i sont indépendants avec un moment d'ordre 2) :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} \mathbf{E}(X) = -\frac{h_{1/2}}{\ln(1/2)} = \frac{h_{1/2}}{\ln(2)}.$$

C'est-à-dire, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{h_{1/2}}{\ln(2)}\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \varepsilon.$$

Dit autrement : avec grande probabilité, la réalisation $\bar{x}$ est proche de $h_{1/2}/\ln 2$. Ou encore, $\ln(2)\bar{x}$ est proche de $h_{1/2}$. D'où

$$h_{1/2} \simeq 0,7 \cdot \frac{1}{100} \cdot 10^5 = \frac{7}{10^3} \cdot 10^5 = 700.$$

7.a) Notons que

$$N(t)(\Omega) = \mathbb{N}$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$[N(t) \geq k] = [Y_k \leq t]$$

Dès lors

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N(t) \geq k) &= \mathbf{P}(Y_k \leq t) = F_{Y_k}(t) \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N(t) = k) &= \mathbf{P}(N(t) \geq k) - \mathbf{P}(N(t) \geq k+1) \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^k \frac{(\lambda t)^i}{i!} - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \end{aligned}$$

On constate que $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt .



Pour prouver le résultat, on peut passer par la stabilité des lois gamma et dériver la fonction de répartition donnée pour vérifier qu'elle correspond bien.

7.b) Le nombre moyen de panne est donné par $E(N(t)) = \lambda t$.

8.a) On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$. D'où

$$\Phi(t_2) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \Phi(t_2) = \Phi(-t_2)$$

Or Φ est injective (car strictement croissante) donc

$$t_1 = -t_2.$$

8.b) Les variables X_i sont indépendantes, de même loi, avec un moment d'ordre 2. On sait alors que

$$\overline{X_n}^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Z \text{ où } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Or on a aussi que

$$\overline{X_n}^* = \frac{\overline{X_n} - E(\overline{X_n})}{\sqrt{V(\overline{X_n})}} = \frac{\overline{X_n} - 1/\lambda}{1/(\sqrt{n}\lambda)} = \sqrt{n}(\lambda\overline{X_n} - 1).$$

Le résultat s'en déduit.

8.c) On a

$$P(-t_1 \leq R_n \leq t_1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Phi(t_1) - \Phi(-t_1) = 1 - \alpha.$$

8.d) On a aussi

$$\begin{aligned} P(-t_1 \leq R_n \leq t_1) &= P\left(1 - \frac{t_1}{\sqrt{n}} \leq \lambda\overline{X_n} \leq 1 + \frac{t_1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(\frac{(1 - t_1/\sqrt{n})}{\overline{X_n}} \leq \lambda \leq \frac{(1 + t_1/\sqrt{n})}{\overline{X_n}}\right) \quad (*) \end{aligned}$$

en inversant les inégalités (décroissance de $t \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto 1/t$), on a l'intervalle de confiance asymptotique :

$$\left[\frac{\overline{X_n}}{1 + t_1/\sqrt{n}}; \frac{\overline{X_n}}{1 - t_1/\sqrt{n}} \right].$$

8.e) — Si $\alpha \rightarrow 0$, $\Phi(t_1) \rightarrow 1$, soit $t_1 \rightarrow +\infty$.

Dans ce cas, l'étape (*) cesse d'être valable et on ne peut construire d'intervalle asymptotique pertinent.

→ La longueur de l'intervalle précédent est

$$\begin{aligned} \overline{X_n} \left(\frac{1}{1 + t_1/\sqrt{n}} - \frac{1}{1 - t_1/\sqrt{n}} \right) &= \\ = \overline{X_n} \left(\frac{2t_1/\sqrt{n}}{1 - t_1^2/n} \right) &= \overline{X_n} \left(\frac{2t_1}{\sqrt{n} - t_1^2/\sqrt{n}} \right). \end{aligned}$$

Pour « n grand »

$$\text{longueur} \simeq \frac{2t_1}{\sqrt{n}} = \frac{2\varphi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})}{\sqrt{n}}.$$

Pour α croissant, la longueur diminue. Plus, on s'autorise de prendre de risque, plus on peut choisir un intervalle avec peu d'amplitude.

8.f) Dans ce cas, $t_1 \simeq 2$.

$$\frac{\overline{X_n}}{1 - \frac{t_1}{\sqrt{n}}} = \frac{1000}{1 - 0,2} = \frac{1000}{\frac{8}{10}} = 1250.$$

Puis
$$\frac{\overline{X_n}}{1 - t_1/\sqrt{n}} = \frac{10000}{12}.$$

Or $833 \times 12 = 8330 + 2 \times 833 = 8330 + 1666 = 9996$

Donc
$$\frac{\overline{X_n}}{1 - t_1/\sqrt{n}} \geq 833.$$

Ainsi

$$\left[\frac{\overline{X_n}}{1 - \frac{t_1}{\sqrt{n}}}; \frac{\overline{X_n}}{1 - t_1/\sqrt{n}} \right] \subset [833, 1250]$$

Ce qui conclut.

Problème 2

Estimateurs de moyennes

Partie I

1.a) Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. La fonction coordonnée $x \in \mathbb{R}^n \mapsto x_k$ est $\mathcal{C}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Par composition avec la fonction $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \exp(x_k)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$. Par somme, f est bien $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

1.b) On a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\nabla f(x) = (e^{x_1}, e^{x_2}, \dots, e^{x_n})$$

$$\nabla^2 f(x) = \text{Diag}(e^{x_1}, e^{x_2}, \dots, e^{x_n}).$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$ est point critique sous la f contrainte $g(x) = c$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathcal{C} \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \nabla f(x) = \lambda \nabla g \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n x_i = c \\ \exists \lambda (e^{x_1}, \dots, e^{x_n}) = \lambda(1, \dots, 1) \end{array} \right.$$

On constate alors que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $x_i = \ln(\lambda)$. D'où

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

Avec la condition $\sum_{i=1}^n x_i = c$, on a bien un unique point critique donné par

$$x_c = \left(\frac{c}{n}, \frac{c}{n}, \dots, \frac{c}{n} \right).$$

Dans ce cas

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{c}{n}\right) = n \exp\left(\frac{c}{n}\right).$$

Ce qui conclut.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, Posons $c = \sum_{i=1}^n x_i$. Par construction $x \in \mathcal{C}_{n,c}$ et avec la question précédente

$$f(x) \geq f(x_c) \text{ soit } \sum_{i=1}^n e^{x_i} \geq n \exp\left(\frac{c}{n}\right) = n \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right).$$

3. Avec le choix $x_i = \ln a_i$, on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i &= \sum_{i=1}^n e^{x_i} \geq n \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \\ &\geq n \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(a_i)\right) \\ &\geq n \exp\left(\ln\left(\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n}\right)\right) \\ \sum_{i=1}^n a_i &\geq n \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n}. \end{aligned}$$

D'où
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}.$$

Le choix $x_i = -\ln a_i$ donne la seconde inégalité.

Partie II

1. Par linéaire de l'espérance, on a l'existence de $E(A_n(X))$ et son calcul

$$E(A_n(X)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X) = E(X).$$

De plus, on a vu que

$$0 \leq H_n(X) \leq G_n(X) \leq A_n(X).$$

Par domination, $H_n(X)$, $G_n(X)$ admettent une espérance. Précisons que si $E(H_n(X)) = 0$ avec $H_n(X) \geq 0$. On en déduirait que $H_n(X)$ est la variable presque sûrement constante égale à 0. Absurde. D'où $E(H_n(X)) > 0$. Comme $E(G_n(X))$ est minorée par $E(H_n(X))$, elle est aussi strictement positive.

2.a) On a

$$E(A_n(U)) = E(U) = \frac{1}{2}.$$

D'où $a(n) = 2$.

Ensuite, par indépendance des variables U_i (et donc des variables $U_i^{1/n}$ par le lemme des coalitions) :

$$\begin{aligned} E(G_n(U)) &= E\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n U_i}\right) = E\left(\prod_{i=1}^n U_i^{1/n}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n E(U_i^{1/n}) \\ &= E(U^{1/n})^n \quad (\text{par égalité en loi}). \end{aligned}$$

Or le théorème de transfert donne :

$$\begin{aligned} E(U^{1/n}) &= \int_0^1 t^{1/n} f_U(t) dt = \int_0^1 t^{1/n} dt = \left[\frac{t^{1/n+1}}{1/n+1} \right] \\ &= \frac{1}{1/n+1} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Le résultat sur $g(n)$ s'en déduit.

2.bi)

```
import numpy.random as rd

def simuH(n):
    U = rd.random(n)
    s = 0
    for i in range(n):
        s += 1 / U[i]
    return n / s
```

2.bii) En s'appuyant sur la loi faible des grands nombres :

```
def approx_h(n):
    m = 1000
    s = 0
    for i in range(m):
        s += simuH(n)
    return s / m
```

3.a) Précisons que $\widehat{A}_n(X)$ ne dépend pas de θ .

Par linéarité de l'espérance :

$$E(\widehat{A}_n(X)) = a(n)E(A_n(X)) = a(n)E(X) = 2 \cdot \frac{\theta}{2} = \theta.$$

On a bien un estimateur sans biais.

3.b) La variable X admet un moment d'ordre 2 et les variables X_i sont indépendantes. La loi faible des grands nombres s'applique

$$A_n(X) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} E(X) = \frac{\theta}{2} \quad (\text{variable constante})$$

puis
$$\widehat{A}_n(X) = 2A_n(X) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta.$$

Ce qui est la définition d'un estimateur convergent.

4. D'après les règles de transformation affine

$$\forall i \in [1; n], \quad X_i \text{ et } \theta U_i \text{ ont même loi.}$$

Par indépendance des variables, les vecteurs aléatoires

$$(X_1, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad (\theta U_1, \dots, \theta U_n)$$

ont même loi. Par conséquent, par continuité de la fonction

$$f: (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \mapsto \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i},$$

on sait d'après le cours que

$$G_n(X) \quad \text{et} \quad G_n(\theta U) \quad \text{ont même loi}$$

Or

$$G_n(\theta U) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (\theta U_i)} = \theta \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n U_i} = \theta G_n(U).$$

L'égalité en loi donne l'égalité des espérances :

$$E(G_n(X)) = E(G_n(\theta U)) = \theta E(G_n(U)) = \frac{\theta}{g(n)}.$$

On a bien $\mathbf{E}(\widehat{G}_n(X)) = \theta$.

Comme $\widehat{G}_n(X)$ ne dépend pas de θ , c'est bien un estimateur et il est sans biais.

4.bi) On utilise la formule de Koenig-Huygens et la formule de transfert. En reprenant le raisonnement de la 2.a)

$$\mathbf{E}(G_n(U)^2) = \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n U_i^{2/n}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}(U_i^{2/n}) = \mathbf{E}(U^{2/n})^n$$

$$\text{avec } \mathbf{E}(U^{2/n})^n = \int_0^1 t^{2/n} dt = \frac{1}{\frac{2}{n} + 1} = \frac{n}{n+2}.$$

Ce qui conclut.

4.bii) Notons que

$$\begin{aligned} g(n) &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} = e^{n(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))} \\ &= e^{1+o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \quad \text{par continuité de l'exponentielle.} \end{aligned}$$

De même, on a

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{n}{n+2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-2}.$$

$$\text{Ainsi } \mathbf{V}(G_n(U)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-2} - e^{-2} = 0.$$

On en déduit que :

$$\mathbf{V}(\widehat{G}_n(X)) = g(n)^2 \mathbf{V}(G_n(U)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^2 \times 0 = 0.$$

Comme $\widehat{G}_n(X)$ est sans biais, on sait d'après le cours que cela prouve le fait que $\widehat{G}_n(X)$ est un estimateur convergent vers θ .

4.ci) Voir la méthode inversion :

$$-\ln U \hookrightarrow \mathcal{E}(1).$$

4.cii) De nouveau, la loi faible s'applique (il y a un moment d'ordre 2 et l'indépendance des $-\ln U_i$ par le lemme des coalitions)

$$\overline{U_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} \mathbf{E}(-\ln U) = 1.$$

4.ciii) Notons que

$$G_n(U) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n e^{\ln U_i}} = \frac{1}{\exp\left(-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln U_i\right)} = \frac{1}{\exp(\overline{U_n})}.$$

Comme la fonction $t \mapsto 1/\exp(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, on sait que

$$G_n(U) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

4.civ) Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En reprenant l'égalité en loi de $\widehat{G}_n(X)$ et $\theta \widehat{G}_n(U)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|\widehat{G}_n(X) - \theta| \leq \varepsilon) &= \mathbf{P}(|\theta \widehat{G}_n(U) - \theta| \leq \varepsilon) \\ &= \mathbf{P}\left(|g(n)G_n(U) - 1| \leq \frac{\varepsilon}{\theta}\right). \end{aligned}$$

Or, $|G_n(U)| \leq 1$ et

$$\begin{aligned} |g(n)G_n(U) - 1| &= |(g(n) - e)G_n(U) + eG_n(U) - 1| \\ &\leq |(g(n) - e)G_n(U)| + e|G_n(U) - e^{-1}| \end{aligned}$$

$$|g(n)G_n(U) - 1| \leq |g(n) - e| + e|G_n(U) - e^{-1}|.$$

Comme $g(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$, il existe un rang N tel que $|g(n) - e| \leq \frac{\varepsilon}{2\theta}$ pour tout $n \geq N$. Pour de tel entier n

$$|g(n)G_n(U) - 1| \leq \frac{\varepsilon}{2\theta} + e|G_n(U) - e^{-1}|.$$

Dès lors, on a l'inclusion

$$\left[|G_n(U) - e^{-1}| \leq \frac{\varepsilon}{2e\theta}\right] \subset \left[|g(n)G_n(U) - 1| \leq \frac{\varepsilon}{\theta}\right],$$

puis la minoration

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(|G_n(U) - e^{-1}| \leq \frac{\varepsilon}{2e\theta}\right) &\leq \mathbf{P}\left(|g(n)G_n(U) - 1| \leq \frac{\varepsilon}{\theta}\right) \\ &\leq \mathbf{P}(|\widehat{G}_n(X) - \theta| \leq \varepsilon). \end{aligned}$$

Or la convergence en probabilité établie précédemment donne

$$\mathbf{P}\left(|G_n(U) - e^{-1}| \leq \frac{\varepsilon}{2e\theta}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Par encadrement

$$\mathbf{P}(|\widehat{G}_n(X) - \theta| \leq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\text{ou encore } \mathbf{P}(|\widehat{G}_n(X) - \theta| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

C'est la définition de la convergence de l'estimateur.

5.a) On sait que

$$\mathbf{1}_{[U_i \leq \frac{1}{n}]} \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \quad \text{où } p = \mathbf{P}\left(U_i \leq \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

$$\text{Dès lors, } N_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right)$$

car on somme n variables de Bernoulli de même paramètre et indépendantes (lemme des coalitions).

5.b) On sait que

$$\mathbf{E}(N_n) = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(N_n) = n \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \leq 1.$$

D'après L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N_n > K) &= \mathbf{P}(N_n - \mathbf{E}(N_n) > K - 1) \\ &= \mathbf{P}(N_n - \mathbf{E}(N_n) \geq K) \quad (\text{des entiers}) \\ &\leq \mathbf{P}(|N_n - \mathbf{E}(N_n)| \geq K) \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(N_n > K) \leq \frac{\mathbf{V}(N_n)}{K^2} \leq \frac{1}{K^2}.$$

5.c) On sait d'après le cours que

$$N_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad n \cdot \frac{1}{n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$N_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Z \quad \text{où } Z \hookrightarrow \mathcal{P}(1).$$

6.a) Procéder par intégration par parties.

6.b) Vérifier que

$$Y(\Omega) \subset \{0\} \cup [1; n].$$

Précisons pour tout $t \in [0; n]$, la valeur de $\mathbf{P}(Y \geq t)$.

→ Si $t \in [0; 1]$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y \geq t) &= 1 - \mathbf{P}(Y < t) = 1 - \mathbf{P}(Y = 0) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(U_i \leq \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

→ Si $t \in [1; n]$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y \geq t) &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{1}{U_i} \geq t\right] \cap \left[U_i \geq \frac{1}{n}\right]\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{1}{n} \leq U_i \leq \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_i) &= \int_0^n \mathbf{P}(Y_i \geq t) dt \\ &= \int_0^1 \underbrace{\mathbf{P}(Y_i \geq t)}_{=1-1/n} dt + \int_1^n \underbrace{\mathbf{P}(Y_i \geq t)}_{=1/t-1/n} dt \\ &= 1 - \frac{1}{n} + \left[\ln(t) - \frac{t}{n}\right]_1^n \\ &= 1 - \frac{1}{n} + \ln(n) - \frac{(n-1)}{n} \\ \mathbf{E}(Y_i) &= \ln(n). \end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_i^2) &= \int_0^n 2t \mathbf{P}(Y_i \geq t) dt \\ &= \int_0^1 2t \mathbf{P}(Y_i \geq t) dt + \int_1^n 2t \mathbf{P}(Y_i \geq t) dt \\ &= \int_0^1 2t \left(1 - \frac{1}{n}\right) dt + \int_1^n 2t \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{n}\right) dt \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2} + 2(n-1) - \frac{1}{n}(n^2-1) \\ \mathbf{E}(Y_i^2) &= n-1. \end{aligned}$$

Noter que la variable Y_i n'est ni discrète (son ensemble des valeurs prises est indénombrable) :

$$Y_i(\Omega) = \{0\} \cup [1; n]$$

et ni à densité

$$\mathbf{P}(Y_i = 0) = \mathbf{P}(U_i \leq 1/n) = \frac{1}{n} \neq 0$$

Ce qui explique le résultat admis.

6.c) Par linéarité, vérifier que

$$\mathbf{E}(T_n) = \ln(n)$$

et par indépendance des variables Y_i (lemme des coalitions)

$$\mathbf{V}(T_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(Y_i) = \frac{\mathbf{V}(Y_1)}{n} \leq 2 \quad (\text{égalité en loi})$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\left|\ln(n)^{-1}T_n - 1\right| \geq \varepsilon\right) &= \mathbf{P}(|T_n - \mathbf{E}(T_n)| \geq \varepsilon \ln(n)) \\ &\leq \frac{\mathbf{V}(T_n)}{(\varepsilon \ln(n))^2} \leq \frac{2}{\varepsilon^2 \ln(n)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

On a bien $\frac{T_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} 1$.

7.a) D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $[N \leq k]$, $[N > k]$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\frac{R_n}{\ln n} \geq \varepsilon\right) &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{R_n}{\ln n} \geq \varepsilon\right] \cap [N_n > k]\right) + \mathbf{P}\left(\left[\frac{R_n}{\ln n} \geq \varepsilon\right] \cap [N_n \leq k]\right) \\ &\leq \mathbf{P}(N > K) + \mathbf{P}\left(\left[\sum_{i=1}^n W_i \geq n\varepsilon \ln n\right] \cap [N_n \leq K]\right). \end{aligned}$$

On a déjà vu que $\mathbf{P}(N_n > K) \leq \frac{1}{K^2}$.

Ensuite si l'événement $\left[\sum_{i=1}^n W_i \geq n\varepsilon \ln n\right] \cap [N_n \leq K]$ est réalisé alors il y a au plus K termes de la somme non nuls. Précisons qu'il y a alors au moins un terme W_i (avec $i \in [1; n]$) supérieur à $n\varepsilon \ln n/K$. Dès lors, on a l'inclusion

$$\left[\sum_{i=1}^n W_i \geq n\varepsilon \ln n\right] \cap [N_n \leq K] \subset \bigcup_{i=1}^n \left[W_i \geq \frac{n\varepsilon \ln n}{K}\right].$$

On en déduit par croissance de la probabilité

$$\mathbf{P}\left(\left[\sum_{i=1}^n W_i \geq n\varepsilon \ln n\right] \cap [N_n \leq K]\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}\left(W_i \geq \frac{n\varepsilon \ln n}{K}\right)$$

Noter ici que l'on a utilisé le résultat suivant : si $A_1, \dots, A_n$ désignent des événements alors

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i).$$

puis par égalité en loi des W_i

$$\mathbf{P}\left(\left[\sum_{i=1}^n W_i \geq n\varepsilon \ln n\right] \cap [N_n \leq K]\right) \leq n \mathbf{P}\left(W_1 \geq \frac{n\varepsilon \ln n}{K}\right).$$

Ce qui conclut.

7.b) Posons $\tilde{\varepsilon}_n = n\varepsilon \ln(n)/K$. Appliquons la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(W_1 \geq \tilde{\varepsilon}_n) &= \mathbf{P}\left([W_1 \geq \tilde{\varepsilon}_n] \cap \left[U_1 \leq \frac{1}{n}\right]\right) + \mathbf{P}\left([W_1 \geq \tilde{\varepsilon}_n] \cap \left[U_1 > \frac{1}{n}\right]\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{1}{U_1} \geq \tilde{\varepsilon}_n\right] \cap \left[U_1 \leq \frac{1}{n}\right]\right) + 0 \\ &= \mathbf{P}\left(\left[U_1 \leq \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_n}\right] \cap \left[U_1 \leq \frac{1}{n}\right]\right) \\ &= \min\left(\frac{1}{n}; \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_n}\right) \\ &\leq \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_n} \quad \text{dès que } \frac{\varepsilon \ln(n)}{k} \geq 1. \end{aligned}$$

Au final,

$$0 \leq \mathbf{P}\left(\frac{R_n}{\ln n} \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{K^2} + \frac{K}{\varepsilon \ln n}.$$

Avec le choix $K = \lfloor (\ln n)^{1/2} \rfloor$, on a

$$\frac{1}{K^2} + \frac{K}{\varepsilon \ln n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Par encadrement

$$\mathbf{P}\left(\frac{R_n}{\ln n} \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n \rightarrow 0]{\mathbf{P}} 0.$$

Ce qui conclut.

8.a) On sait que la convergence en probabilité a une propriété de linéarité

$$\frac{S_n}{\ln n} = \underbrace{\frac{T_n}{\ln n}}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} 1} + \underbrace{\frac{R_n}{\ln n}}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} 0} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} 1.$$

De plus, la fonction inverse étant continue sur $\mathbb{R}_*^+$

$$\ln(n) H_n(U) = \frac{\ln n}{S_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} \frac{1}{1} = 1.$$

8.b) Vérifier que $H_n(X)$ et $\theta H_n(U)$ ont même loi. Donc

$$\ln(n) H_n(X) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} \theta.$$

Commentaires pour l'auto-correction

- Malus si les copies ne sont pas numérotées (-4) ou les résultats non soulignés (-4).

• Cours

Peu de tolérance sur les questions de cours.

1. +1 pour énoncé de Bienaymé-Tchebychev. +2 pour une bonne gestion de la variance.
2. +1 pour un énoncé précis du TCL.
3. Pas de blabla. On met des points si on parle bien d'une comparaison de la longueur/étendue/amplitude des intervalles.

• Exercice

1. +2 pour la méthode de calcul du point critique. -2 si on oublie de justifier le caractère $\mathcal{C}^1$.
2. +1 si une base (non nécessairement orthonormée), +1 si tentative d'orthonormalisation.
3. Notation binaire 0 ou 4/4.
4. +2 si calcul du spectre. +2 s'il y a l'explication du lien entre le spectre et le signe de la forme quadratique.
- 6.a) Cours. +2 pour $\mathcal{C}^2$ et $g'(0)$ puis +2 pour $g''(t)$.
- 6.b) +2 si mention de Taylor-Reste intégral avec les bonnes hypothèses. +2 pour toute l'étude.

7. +2 si explication que c'est la fonction obtenue par "substitution des contraintes". +1 pour l'explication des lignes de niveau, +1 pour la surface.

• Problème 1

1. -2 si oubli de l'indépendance dans la variance.
- 2.a) -2 si oubli de justifier que M_n est à densité en regardant la régularité de la fonction de répartition.
- 2.c) -1 si oubli de justifier le changement de variables.
- 3.b) +2 si énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- 4.b) +2 si idée de la substitution.
5. On note large sur les question python.
- 5.a) +1 si formule de la covariance. +2 si réalisation d'une moyenne empirique.
- 5.b) +2 si simulation de $\bar{X}_n$ et M_n . +2 si la simulation est faite avec le même échantillon. 6/4 si tout bon.
- 6.a) +2 pour l'interprétation. +2 pour l'unité (c'est la première ligne de la partie!).
- 6.b) Facile, notation binaire 0/4 ou 4/4.
- 6.c) +2 pour la proposition +1+1 pour la preuve de sans biais et convergent.
- 6.d) Repérer si la question a été évitée. On valorise tout calcul.
- 7.a) 0/4 si on propose une loi binomiale ou Bernoulli (loi discrète finie) avec le commentaire VILAIN! (lire vilain factorielle). +1 si Poisson sans justification. -1 si oubli de la majuscule à Poisson.
- 8.a) On connaît le résultat mais on veut une explication. On attend donc une justification précise par exemple en rappelant la formule $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$ (+2) et en invoquant de l'injectivité/bijektivité (+2).
- 8.b) -2 si oubli de l'indépendance. Dans ce cas, on écrit en gros INDEPENDANCE et on souligne 3 fois rageusement. -1 si oubli de l'égalité en loi, -1 pour le moment d'ordre 2.
- 8.e) Pas de blabla, on veut une justification convaincante avec par exemple la longueur de l'intervalle. bonus si on pense à revenir au calcul précédent avec la fonction inverse (voir solution).
- 8.f) Question très valorisée et on valorise toute tentative application numérique.

• Problème 2

- 1.a) +2 si le caractère $\mathcal{C}^2$ est bien rédigé. Attention aux ensembles de définition ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$?)
- 1.b) +2 pour la méthode. +2 pour la résolution complète. Attention, il faut bien justifier l'unicité.
3. +2 pour l'inégalité gauche, +2 pour celle de droite.
La suite est facultative. Elle n'est pas comptée dans le barème.

Le problème 2 est adapté du sujet HEC voie E 2015. Voici une troisième partie :

Partie III. Un résultat asymptotique

Les notations et le contexte sont ceux des parties précédentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = M_n - \frac{1}{\lambda} \ln n$ et on note F_{T_n} la fonction de répartition de T_n .

1.
 - a) Montrer que pour tout x réel, on a : $F_{T_n}(x) = \left(F_X\left(x + \frac{1}{\lambda} \ln n\right)\right)^n$.
 - b) Pour chaque réel x fixé, déterminer un entier naturel N_x (qui dépend de x) tel que pour tout entier $n \geq N_x$, on a : $x + \frac{1}{\lambda} \ln n > 0$. En déduire que pour tout entier $n \geq N_x$, on a : $F_X\left(x + \frac{1}{\lambda} \ln n\right) = 1 - \frac{e^{-\lambda x}}{n}$.
 - c) Montrer que pour tout x réel, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{T_n}(x) = \exp\left(-e^{-\lambda x}\right) = e^{-e^{-\lambda x}}$.
2. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que : $F(x) = \exp\left(-e^{-\lambda x}\right)$.
 - a) Justifier que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]0, 1[$.
 - b) En déduire que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire T admettant une densité f_T continue sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera; on dit que T suit la loi de Gumbel de paramètre λ .
 - c) Justifier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers la variable aléatoire T .
3.
 - a) Établir l'existence de l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T .
 - b) On pose : $Z = -\frac{1}{\lambda} \ln(\lambda X)$. Montrer que les variables aléatoires Z et T sont de même loi.
 - c) Justifier l'égalité : $E(T) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt$.
 - d) À l'aide de la concavité de la fonction logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$, établir l'inégalité : $E(T) \geq 0$.