

**Nom :**

# Mathématiques

**Cours**

**double-diplôme  
ESCP x CentraleSupélec**

**Livret V**

**Chapitre**

5. Déterminants

2026



*La science consiste à passer d'un étonnement à un autre.*

Aristote

Philosophe grec de l'Antiquité (384-322 av. J.-C), disciple de Platon.

### 1 Déterminant d'une matrice

#### Définition 1 (Application multilinéaire, alternée)

Soit  $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ , une application. On dit que :

→  $f$  est **multilinéaire** si pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , toute famille de matrices colonnes  $(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$ , toute colonne  $\widehat{C}_i$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a

$$f\left([C_1 \mid \dots \mid \underbrace{\lambda C_i + \widehat{C}_i}_{i\text{-ième colonne}} \mid \dots \mid C_n]\right) = \lambda f\left([C_1 \mid \dots \mid C_i \mid \dots \mid C_n]\right) + f\left([C_1 \mid \dots \mid \widehat{C}_i \mid \dots \mid C_n]\right).$$

→  $f$  est **alternée** si le signe est inversé quand on permute deux colonnes.

Autrement dit, si pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  avec  $i \neq j$ , toute famille de colonnes  $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{K}^n$ , on a :

$$f\left([C_1 \mid \dots \mid C_i \mid \dots \mid C_j \mid \dots \mid C_n]\right) = -f\left([C_1 \mid \dots \mid C_j \mid \dots \mid C_i \mid \dots \mid C_n]\right).$$

**Remarques.** Soit  $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ .

- Si  $f$  est alternée et si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  contient deux colonnes identiques, alors  $f(A) = 0$ .
- Si  $f$  est multilinéaire et alternée et si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est non inversible, alors  $f(A) = 0$ .

**Exemple.** On vérifie que l'application  $f : \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto ad - bc \in \mathbb{R}$  est multilinéaire et alternée.

On peut montrer que l'ensemble des formes multilinéaires alternées sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  constitue une droite vectorielle. On en déduit la proposition/définition suivante :

#### Théorème 2 (définition du déterminant)

Il existe une unique application  $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  vérifiant :

- i)  $f$  est multilinéaire;
- ii)  $f$  est alternée;
- iii)  $f(I_n) = 1$ .

Cette application est appelée **déterminant** sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On note alors  $\det(A)$ , le déterminant de la matrice  $A$ .

**Exemple.** Par unicité, on retrouve bien que l'application déterminant est donnée par :

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

**Remarques.**

- Le déterminant se note fréquemment avec des barres verticales :

$$\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

- On peut donner une formule générale :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$$

où  $\mathfrak{S}_n$  désigne l'ensemble des permutations de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ , et  $\varepsilon(\sigma) \in \{-1; 1\}$ , la signature d'une permutation. Notons surtout que le déterminant est une fonction polynomiale en les coefficients de la matrice. On peut expliciter ce produit pour  $n = 3$ , on obtient alors la règle de Sarrus :

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} a & d & g & a & d \\ b & e & h & b & e \\ c & f & j & c & f \\ a & d & g & & \\ b & e & h & & \end{array} = \underbrace{aej + bfg + cdh}_{\text{diagonales descendantes}} - \underbrace{ceg - afh - bdj}_{\text{diagonales montantes}}$$

## 2

## Propriétés du déterminant

### 2.1

### Les opérations élémentaires

#### Théorème 3 (opérations élémentaires et déterminant)

Soient  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  distincts.

- L'échange des colonnes  $C_i \leftrightarrow C_j$  dans  $A$  change le déterminant en son opposé.
- Si  $\lambda \neq 0$ , l'opération élémentaire  $C_i \leftarrow \lambda C_i$  dans  $A$  multiplie le déterminant par  $\lambda$ .
- L'opération élémentaire  $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$  dans  $A$  ne change pas le déterminant.

**Remarque.** Ces opérations élémentaires peuvent s'obtenir par des produits matriciels :

- Si on note  $\bar{A}$ , la matrice obtenue à partir de  $A$  en effectuant l'opération  $C_i \leftrightarrow C_j$  (échange), alors

$$\bar{A} = AP_{i,j} \quad \text{où} \quad P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}.$$

- Si on note  $\hat{A}$ , la matrice obtenue à partir de  $A$  en effectuant l'opération  $C_i \leftarrow \lambda C_i$  (dilatation), alors

$$\hat{A} = AD_i(\lambda) \quad \text{où} \quad D_i(\lambda) = \text{Diag}(1, \dots, 1, \lambda, 1, \dots, 1) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}.$$

- Si on note  $\tilde{A}$ , la matrice obtenue à partir de  $A$  en effectuant l'opération  $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$  (transvection), alors

$$\tilde{A} = AT_{i,j}(\lambda) \quad \text{où} \quad T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}.$$

- Conséquences.** Soient  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- Si  $A$  n'est pas inversible, alors  $\det(A) = 0$ .
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ .
- Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses coefficients diagonaux.

### Rappels : méthode de Gauss pour des matrices inversibles

- À l'aide du pivot de Gauss, on montre que toute matrice inversible  $A$  peut être transformée, par une suite de transvections sur les colonnes, en une matrice diagonale.
- Si de plus  $A$  est triangulaire inférieure ou supérieure, alors on peut choisir ces transvections de manière à laisser la diagonale de  $A$  inchangée.

Le deuxième point donne directement :

#### Proposition 4 (déterminant d'une matrice triangulaire)

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

## 2.2 Déterminant : produit et inversibilité

#### Théorème 5 (Inversibilité, produit, transposition)

Soient  $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec  $C$  inversible.

→ La matrice  $A$  est inversible si et seulement si  $\det(A) \neq 0$ .

→ On a aussi :

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \quad \text{et} \quad \det(C^{-1}) = \frac{1}{\det(C)}.$$

→ De plus,  $\det(A) = \det(A^T)$ .

**Remarque.** On en déduit que pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et toute matrice  $P$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  inversible

$$\det(A^p) = (\det A)^p \quad \text{et} \quad \det(P^{-1}AP) = \det A.$$



**Attention.** L'application déterminant n'est pas linéaire. En général :  $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ .

## 2.3 Développement selon une ligne ou une colonne

#### Définition 6 (Les mineurs, cofacteurs)

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ .

→ Le déterminant de la matrice où on a barré la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne est le mineur du couple  $(i, j)$ , on le note  $m_{i,j}$ .

→ Le cofacteur du couple  $(i, j)$  est le réel  $C_{i,j} = (-1)^{i+j} m_{i,j}$ .

#### Théorème 7 (développement selon une ligne ou une colonne)

Soit  $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1; n \rrbracket} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $(C_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1; n \rrbracket}$  la liste de ses cofacteurs.

Alors :

i) Le développement par rapport à la  $i$ -ème ligne est :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} C_{i,j}.$$

ii) Le développement par rapport à la  $j$ -ème colonne :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} C_{i,j}.$$

### 3

## Pratique du calcul du déterminant

**Exemple.** Calculons, en fonction du paramètre  $x$  et sous forme factorisée, le déterminant :

$$d(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & x & x \end{vmatrix}.$$

La première idée est d'utiliser la règle de Sarrus. On obtient alors  $d(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ . Mais on obtient alors une forme développée et il peut être compliqué (voir impossible si la taille de la matrice excède 5) de trouver les racines de  $d$ . On privilégiera donc dans la suite l'utilisation des opérations élémentaires.

$$d(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & x & x \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 + C_2} \begin{vmatrix} x+1 & 1 & -1 \\ 1+x & x & 2 \\ 1+x & x & x \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \begin{vmatrix} x+1 & 1 & -1 \\ 0 & x-1 & 3 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x+1)(x-1)(x-2).$$

#### Exercice 1



♦ Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Calculer, sous forme factorisée, le déterminant de la matrice d'ordre  $n$  :

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

# CeDet1

#### Exercice 2



♦♦ Soient  $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$  et la matrice

$$C_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

1. Justifier que  $\det(C_P) = (-1)^n a_0$ .

2. Généraliser en montrant que  $\det(C_P - \lambda I_n)$  s'exprime à l'aide de  $P(\lambda)$ .

# CeDet2

### 4

## Déterminants d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme

### 4.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

#### Définition 8 (déterminant d'une famille de vecteurs dans une base)

Soient  $E$ , un espace vectoriel de dimension finie  $n$  dont  $\mathcal{B}$  est une base et  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ .

Le déterminant de la matrice de la famille  $\mathcal{F}$  dans la base  $\mathcal{B}$  est appelé **déterminant de la famille  $\mathcal{F}$  dans la base  $\mathcal{B}$** , noté  $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ .



**Attention.** Le nombre de vecteurs de la famille doit être égal à  $\dim(E)$ .

**Exemple.**  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$ .

#### Théorème 9 (caractérisation des bases)

Une famille de  $n$  vecteurs de  $E$  est une base si et seulement si son déterminant (dans n'importe quelle base) est non nul.

### Exercice 3



Les questions sont indépendantes

1. Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ , une base de  $E$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on pose  $u_i = \sum_{k=1}^i e_k$ . Est-ce que la famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est une base de  $E$ ?
2. Justifier que si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  sont deux bases orthonormées de  $E$ , alors pour toute famille  $\mathcal{F}$  à  $n$  vecteurs de  $E$ , on a

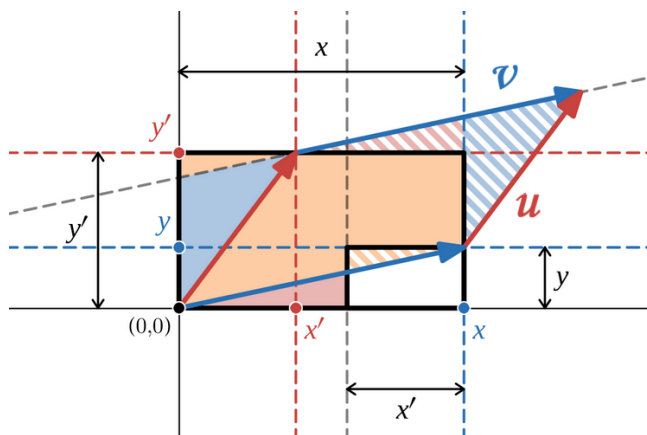
$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \pm \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}).$$

# CeDet3

### Interprétation géométrique du déterminant

→ Soit  $\mathcal{B}$ , la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Soient  $u, v \in \mathbb{R}^2$ , et  $\mathcal{A}_{u,v}$ , l'aire du parallélogramme engendré par  $u$  et  $v$ , alors

$$\mathcal{A}_{u,v} = |\det_{\mathcal{B}}(u, v)|.$$



→ De même qu'en dimension 2, on montre que pour  $\mathcal{B}$ , la base canonique de  $\mathbb{R}^3$

$$|\det_{\mathcal{B}}(u, v, w)| = \mathcal{V}(u, v, w)$$

où  $\mathcal{V}(u, v, w)$  désigne le volume du parallélépipède formé par  $u, v$  et  $w$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

## 4.2 Déterminant d'un endomorphisme

### Définition 10 (déterminant d'un endomorphisme)

Soit  $\varphi$ , un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$ .  
Le déterminant de la matrice  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$  est indépendant de la base  $\mathcal{B}$  choisie.  
Ce nombre est appelé le **déterminant de l'endomorphisme**  $\varphi$ , noté  $\det(\varphi)$ .

### Exercice 4



- ♦ Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & M^T \end{cases}$ . Donner  $\det(\varphi)$ .

# CeDet4

### Quelques règles de calculs

À partir des relations vues précédemment sur le déterminant de matrices et des formules de changement de bases, on montre que :

- Si
- $(u_1, \dots, u_n)$  est une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ ;
  - $f, g$  sont des endomorphismes de  $E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ ;

Alors :

- i)  $\det(0_{\mathcal{L}(E)}) = 0, \det(\text{Id}_E) = 1$ .
- ii)  $\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ .
- iii)  $\det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g)$ .
- iv)  $f$  est bijectif si et seulement si  $\det(f) \neq 0$ . Dans ce cas,  $\det(f^{-1}) = 1/\det(f)$ .

**Remarque.** Soient  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . La famille  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  engendre un parallélépipède en dimension  $n$  de volume 1, et  $\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est le volume du parallélépipède  $f(e_1), \dots, f(e_n)$ .



## Exercices



**Exercice 5.** ♦ Déterminer l'ensemble des  $x \in \mathbb{R}$  tels que la matrice  $M_x$  ci-dessous soit inversible :

# CeDet5

$$M_x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

**Exercice 6.** ♦ Soient  $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$ . Calculer le déterminant suivant :

# CeDet6

$$\begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{vmatrix}$$

**Exercice 7.** ♦ Soit  $\Delta_n$  le déterminant de taille  $n$  suivant :

# CeDet7

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Démontrer que, pour tout  $n \geq 1$ , on a  $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$ .
2. En déduire la valeur de  $\Delta_n$  pour tout  $n \geq 1$ .

**Exercice 8.** ♦ Calculer le déterminant de la matrice

# CeDet8

$$M_n(a, b) = \begin{bmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{bmatrix}.$$

**Exercice 9.** ♦♦ Soit  $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ . On note  $A(x)$  la matrice dont le terme général est  $a_{i,j} + x$ .

# CeDet9

1. Montrer que la fonction  $x \mapsto \det(A(x))$  est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 1.
2. Applications.
  - a) Pour  $a$  et  $b$  deux réels distincts et  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , en déduire la valeur du déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & a & \dots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & \alpha_n \end{vmatrix}$$

- b) Soit  $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  une matrice alternée et soit  $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1. Démontrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\det(A + xJ) = \det(A)$ .

**Exercice 10.** ♦♦ Pour  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , on pose

# CeDet10

$$d(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & c & c & \dots & c \\ b & a & \dots & \dots & c \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}.$$

De plus, pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $P(x) = d(a+x, b+x, c+x)$ .

1. Justifier que  $P$  est une fonction polynomiale de degré au plus 1.
2. En déduire, pour  $b \neq c$ , la valeur de  $d(a, b, c)$ .
3. Traiter le cas où  $b = c$ .

**Exercice 11. ♦♦ Déterminant de Vandermonde**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ , on considère le déterminant :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de d'établir la formule :  $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ .

**1. Preuve 1**

- a) Vérifier que la formule est vraie si deux des  $a_i$  sont égaux. Dans la suite, on les supposera donc distincts.
- b) En faisant des opérations élémentaires, montrer la formule suivante avant de conclure.

$$V(a_1, \dots, a_n) = V(a_2, \dots, a_n) \prod_{i=2}^n (a_i - a_1) \quad (\bullet)$$

**2. Preuve 2**

- a) Soit  $X$  une indéterminée, vérifier que  $V(X, a_2, \dots, a_n)$  est un polynôme en  $X$  de degré  $n - 1$ .
- b) Calculer son coefficient dominant et préciser ses racines évidentes.
- c) Retrouver la formule  $(\bullet)$ .