CHAPITRE 5

Déterminants

La science consiste à passer d'un étonnement à un autre.

Aristote
Philosophe grec de l'Antiquité (384-322 av. J.-C), disciple de Platon.

1 Déterminant d'une matrice

DÉFINITION — **Application multilinéaire, alternée**

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, une application.

On dit que

→ *f est **multilinéaire** si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, toute famille de matrices colonnes $(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$, toute colonne $\widehat{C_i}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a*

$$f\Big(\big[\, C_1 \mid \cdots \mid \underbrace{\lambda C_i + \widehat{C_i}}_{i\text{-ième colonne}} \mid \cdots \mid C_n \big]\Big) = \lambda f\Big(\big[\, C_1 \mid \cdots \mid C_i \mid \cdots \mid C_n \,\big]\Big) + f\Big(\big[\, C_1 \mid \cdots \mid \widehat{C_i} \mid \cdots \mid C_n \,\big]\Big).$$

→ *f est **alternée** si le signe est inversé quand on permute deux colonnes.*
Autrement dit, si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, toute famille de colonnes $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$f\Big(\big[\, C_1 \mid \cdots \mid C_i \mid \cdots \mid C_j \mid \cdots \mid C_n \,\big]\Big) = -f\Big(\big[\, C_1 \mid \cdots \mid C_j \mid \cdots \mid C_i \mid \cdots \mid C_n \,\big]\Big).$$

Remarques. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
- Si f est alternée et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient deux colonnes identiques, alors $f(A) = 0$.
- Si f est multilinéaire et alternée et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est non inversible, alors $f(A) = 0$.

Exemple. L'application $f : \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longmapsto ad - bc \in \mathbb{R}$ est multilinéaire et alternée. En effet, f est alternée car pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$f\left(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc = -(bc - ad) = -f\left(\begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix}\right).$$

De plus, f est linéaire par rapport à la première colonne. Pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a', b' \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix}\right) &= (a+a')\,d - c\,(b+b') = ad - bc + a'd - b'c \\ &= f\left(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Comme f est alternée, on a la linéarité par rapport à deuxième colonne. D'où la multilinéarité.

On peut montrer que l'ensemble des formes multilinéaires alternées sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitue une droite vectorielle. On en déduit la proposition/définition suivante :

THÉORÈME **définition du déterminant**

Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant :

- **i)** *f est multilinéaire ;*
- **ii)** *f est alternée ;*
- **iii)** $f(\mathrm{I}_n) = 1$.

*Cette application est appelée **déterminant** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note alors* $\det(\mathrm{A})$*, le déterminant de la matrice* A.

Résultat admis.

Exemple. Par unicité, on retrouve bien que l'application déterminant est donnée par :

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

En effet, on a vu que l'application est linéaire, alternée et $\det(\mathrm{I}_2) = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$.

Remarques.

- Le déterminant se note fréquemment avec des barres verticales :

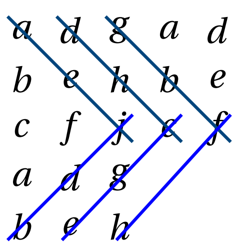
$$\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

- On peut donner une formule générale :

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

où $\mathfrak{S}_n$ désigne l'ensemble des permutations de $[\![1;n]\!]$, et $\varepsilon(\sigma) \in \{-1;1\}$, la signature d'une permutation. Notons surtout que le déterminant est une fonction polynomiale en les coefficients de la matrice. On peut expliciter ce produit pour $n = 3$, on obtient alors la règle de Sarrus :

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{vmatrix} =$$



$$= \underbrace{aej + bfg + cdh}_{\text{diagonales descendantes}} \underbrace{- ceg - afh - bdj}_{\text{diagonales montantes}}$$

2 Propriétés du déterminant

2.1 Les opérations élémentaires

THÉORÈME **opérations élémentaires et déterminant**

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$ distincts.

- *L'échange des colonnes $C_i \leftrightarrow C_j$ dans A change le déterminant en son opposé.*
- *Si $\lambda \neq 0$, l'opération élémentaire $C_i \leftarrow \lambda C_i$ dans A multiplie le déterminant par λ.*
- *L'opération élémentaire $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ dans A ne change pas le déterminant.*

Remarque. Ces opérations élémentaires peuvent s'obtenir par des produits matriciels. Si on note $(E_{i,j})$, la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée des matrices élémentaires, on a :
- Si on note $\overline{A}$, la matrice obtenue à partir de A en effectuant l'opération $C_i \leftrightarrow C_j$ (échange), alors

$$\overline{A} = AP_{i,j} \quad \text{où} \quad P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}.$$

- Si on note $\widehat{A}$, la matrice obtenue à partir de A en effectuant l'opération $C_i \leftarrow \lambda C_i$ (dilatation), alors

$$\widehat{A} = AD_i(\lambda) \quad \text{où} \quad D_i(\lambda) = \mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, \lambda, 1, \ldots 1) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}.$$

- Si on note $\tilde{A}$, la matrice obtenue à partir de A en effectuant l'opération $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ (transvection), alors

$$\tilde{A} = AT_{i,j}(\lambda) \quad \text{où} \quad T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}.$$

Précisons que $P_{i,j}$, $D_i(\lambda)$ (avec $\lambda \neq 0$) et $T_{i,j}(\lambda)$ sont inversibles. Elles ne changent donc pas le rang de la matrice.

- **Conséquences.** Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Si A n'est pas inversible, alors $\det(A) = 0$.
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses coefficients diagonaux.

Preuve. Soit $A = \mathrm{Diag}(d_1, \cdots, d_n)$ une matrice diagonale. Procédons par disjonctions des cas.
- Si l'un des coefficients diagonales de A est nul, alors A n'est pas inversible. On sait alors que $\det(A) = 0 = \prod_{j=1}^{n} d_j$.
- Si tous les coefficients diagonaux de A sont non nuls. À l'aide des opérations élémentaires $C_j \leftarrow \frac{1}{d_j} C_j$ à A, pour j allant de 1 à n, on a

$$\det(A) = d_1 \cdots d_n \det(I_n) = d_1 \cdots d_n.$$

Ce qui conclut. ■

Rappels : méthode du pivot de Gauss pour des matrices inversibles

($\star$) On montre que toute matrice inversible A peut être transformée, par une suite de transvections sur les colonnes, en une matrice diagonale.
($\star\star$) Si de plus A est triangulaire inférieure ou supérieure, alors on peut choisir ces transvections de manière à laisser la diagonale de A inchangée.

Le deuxième point donne directement :

THÉORÈME **déterminant d'une matrice triangulaire**

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Preuve. - Si A est non inversible. Dans le cas triangulaire, il y a au moins un coefficient diagonal non nul et le produit des coefficients diagonaux est nul. Or on a vu que $\det(A) = 0$ pour A non inversible. L'énoncé est vérifié dans ce cas.

- Si A est inversible, on peut par des transvections se ramener à une matrice D diagonale avec les mêmes coefficients diagonaux de A. Donc

$$\det A = \det D = \prod_{i=1}^{n} [D]_{ii} \overset{(\star\star)}{=} \prod_{i=1}^{n} [A]_{i1}.$$

Ce qui conclut. ■

Exemples. On a $\det \mathrm{D}_i(\lambda) = \lambda$ et $\det(\mathrm{T}_{i,j}(\lambda) = 1$.

2.2 Déterminant : produit et inversibilité

THÉORÈME — **caractérisation des matrices inversibles**

Une matrice A *est inversible si et seulement si* $\det(\mathrm{A}) \neq 0$.

Preuve. On a déjà établi que si la matrice A est non inversible alors $\det(\mathrm{A}) = 0$.
Réciproquement, supposons A inversible. D'après ($\star$), A se transforme par transvections en une matrice diagonale D. On a donc

$$\det(\mathrm{A}) = \det \mathrm{D} = \prod_{i=1}^{n} [\mathrm{D}]_{ii}.$$

(ici A et D n'ont pas nécessairement les mêmes coefficients diagonaux). Or on a remarqué que les transvections ne changent pas le rang :

$$\operatorname{rg} \mathrm{D} = \operatorname{rg} \mathrm{A} = n \quad (\text{ car A inversible }).$$

Donc D est inversible. D'après ce qui précède, $\det \mathrm{D} \neq 0$. On a bien la réciproque.

■

THÉORÈME — **déterminant et produit matriciel**

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *avec* C *inversible.*

$$\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A}) \cdot \det(\mathrm{B}) \quad \textit{et} \quad \det\left(\mathrm{C}^{-1}\right) = \frac{1}{\det(\mathrm{C})}.$$

Preuve. • Si A n'est pas inversible, alors le produit AB non plus. Dans ce cas, on a bien

$$\det(\mathrm{AB}) = 0 = \det(\mathrm{A}) \cdot \det(\mathrm{B}).$$

• Supposons maintenant que A est inversible. Son déterminant est non nul et on peut considérer l'application

$$\varphi : \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \frac{\det(\mathrm{AM})}{\det(\mathrm{A})} \in \mathbb{R}.$$

On montre que φ est multilinéaire et alternée avec $\varphi(\mathrm{I}_n) = 1$. Par unicité, on a $\varphi = \det$. On retrouve alors

$$\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\varphi(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{A}) \det(\mathrm{B}).$$

Le second point est direct car $\mathrm{CC}^{-1} = \mathrm{I}_n$ donc

$$1 = \det(\mathrm{I}_n) = \det(\mathrm{C}) \cdot \det\left(\mathrm{C}^{-1}\right).$$

■

Remarque. On en déduit que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et toute matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible

$$\det\left(\mathrm{A}^p\right) = (\det \mathrm{A})^p \quad \text{et} \quad \det\left(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\right) = \det \mathrm{A}.$$

On traduit la seconde propriété en disant que le déterminant est un invariant de similitude.

⚠ **Attention.** L'application déterminant n'est pas linéaire. En général : $\det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \neq \det(\mathrm{A}) + \det(\mathrm{B})$.

2.3 Invariance par transposition

Notation. En ECG, la transposée d'une matrice A est notée ${}^t\mathrm{A}$. Dans la suite, on utilisera plutôt la notation A^{T} des filières plus scientifiques.

THÉORÈME — **déterminant et transposée**

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\det(\mathrm{A}) = \det\left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right).$$

Preuve. Raisonnons par disjonction des cas.

→ Si A n'est pas inversible, alors A^{T} non plus. On a donc

$$\det\left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right) = 0 = \det(\mathrm{A}).$$

→ Si A est inversible. D'après ($\star$), il existe une matrice M, produit de matrices de transvections (correspondants à des opérations élémentaires effectuées sur les colonnes de A), telle que $\mathrm{A} \cdot \mathrm{M} = \operatorname{diag}(d_1, \cdots, d_n)$. Dans ce cas, $\det(\mathrm{A}) = \prod_{k=1}^{n} d_k$. Transposons cette relation, il vient :

$$\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \operatorname{diag}(d_1, \cdots, d_n)^{\mathrm{T}} = \operatorname{diag}(d_1, \cdots, d_n)$$

donc $\det\left(\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right) = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k = \det(\mathrm{A})$. Or la transposée d'une matrice de transvection est aussi une matrice de transvection, donc M^{T} est un produit de matrices de transvection. En particulier $\det\left(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\right) = 1$. Donc

$$\det(\mathrm{A}) = \det\left(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right) = \det\left(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\right)\det\left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right) = \det\left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right)$$

■

2.4 Développement selon une ligne ou une colonne

DÉFINITION — **Les mineurs, cofacteurs**

Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $i, j \in [\![1;n]\!]$.

→ *Le déterminant de la matrice où on a barré la* i*-ème ligne et la* j*-ème colonne est le mineur du couple* (i, j)*, on le note* $m_{i,j}$.

→ *Le cofacteur du couple* (i, j) *est le réel* $\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j} m_{i,j}$.

THÉORÈME — **développement selon une ligne ou une colonne**

Soit $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{i,j \in [\![1;n]\!]} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $\left(\Delta_{i,j}\right)_{i,j \in [\![1;n]\!]}$ *la liste de ses cofacteurs.*
Alors :

i) *Le développement par rapport à la* j*-ème colonne :*

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\Delta_{i,j}.$$

ii) *Le développement par rapport à la* i*-ème ligne est :*

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\Delta_{i,j}.$$

Exemple. Si on développe suivant la seconde ligne :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -6(-13) + 3(-2) - 14 = 58.$$

La preuve se fait en deux temps. On commence par un premier lemme :

$$\forall\,(m_{i,j})_{i,j},\qquad \begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n-1} & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{n-1,n} & \dots & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n-1,n} & \dots & m_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

Preuve. Considérons l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \mathrm{A} & \longmapsto & \begin{vmatrix} \mathrm{A} & * \\ 0_{n-1,1} & 1 \end{vmatrix} \end{array} \right. .$$

Alors f est multilinéaire, antisymétrique et vérifie $f(\mathrm{I}_{n-1}) = 1$. Par unicité d'une telle application, on obtient $f = \det$. Ce qui conclut sur ce premier point. ■

On peut maintenant enchaîner pour démontrer l'énoncé sur les colonnes. Précisons tout de suite que par invariance par transposition, on a l'énoncé sur les lignes.

Preuve.

$$\begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,j} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & \dots & m_{i,j} & \dots & m_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,j} & \dots & m_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} \begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & 0 & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & \dots & 1 & \dots & m_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & 0 & \dots & m_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-j} m_{i,j} \begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & \dots & m_{1,n} & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ m_{i,1} & \dots & \dots & m_{i,n} & 1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & \dots & m_{n,n} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-j}(-1)^{n-i} m_{i,j} \begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & \dots & m_{1,n} & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & \dots & m_{n,n} & 0 \\ m_{i,1} & \dots & \dots & m_{i,n} & 1 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{i,j} \Delta_{i,j}.$$

■

3 Pratique du calcul du déterminant

Exemple. Calculons, en fonction du paramètre x et sous forme factorisée, le déterminant :

$$d(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & x & x \end{vmatrix}.$$

La première idée est d'utiliser la règle de Sarrus. On obtient alors $d(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Mais on obtient alors une forme développée et il peut être compliqué (voir impossible si la taille de la matrice excède 5) de trouver les racines de d. On privilégiera donc dans la suite de passer par les opérations élémentaires.

$$d(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & x & x \end{vmatrix} \overset{\mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2}{=} \begin{vmatrix} x+1 & 1 & -1 \\ 1+x & x & 2 \\ 1+x & x & x \end{vmatrix} \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2}}{=} \begin{vmatrix} x+1 & 1 & -1 \\ 0 & x-1 & 3 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x+1)(x-1)(x-2).$$

Exercice 1

✧ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Calculer, sous forme factorisée, le déterminant de la matrice d'ordre n :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

CeDet1

Exercice 2

✦✦ Soient $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ et la matrice

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

1. Justifier que $\det(C) = (-1)^n a_0$.
2. Généraliser en montrant que $\det(C - \lambda I_n)$ s'exprime à l'aide de $P(\lambda)$.

CeDet2

4 Déterminants d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme

4.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

DÉFINITION — **déterminant d'une famille de vecteurs dans une base**

Soient E, *un espace vectoriel de dimension finie n dont $\mathscr{B}$ est une base et $\mathscr{F} = (u_1, \cdots, u_n)$ une famille de n vecteurs de* E.
Le déterminant de la matrice de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$ est appelé ***déterminant de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$****, noté* $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \cdots, u_n)$.

⚠ **Attention.** Le nombre de vecteurs de la famille doit être égal à $\dim(E)$.

Exemple. $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.

THÉORÈME — **caractérisation des bases**

Une famille de n vecteurs de E *est une base si et seulement si son déterminant (dans n'importe quelle base) est non nul.*

Preuve. C'est une conséquence directe de la formule de changement de bases. ■

Exemple. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on pose $\mathscr{B} = \left(1, X, X^2, X^3\right)$, la base canonique et on considère la famille

$$P_1 = X + X^2 + X^3, \quad P_2 = 1 + X^2 + X^3, \quad P_3 = 1 + X + X^3 \quad \text{et} \quad P_4 = 1 + X + X^2.$$

En reprenant l'exercice précédent
$$\det_{\mathscr{B}}(P_1, P_2, P_3, P_4) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Ainsi, la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 3

✦ *Les questions sont indépendantes*

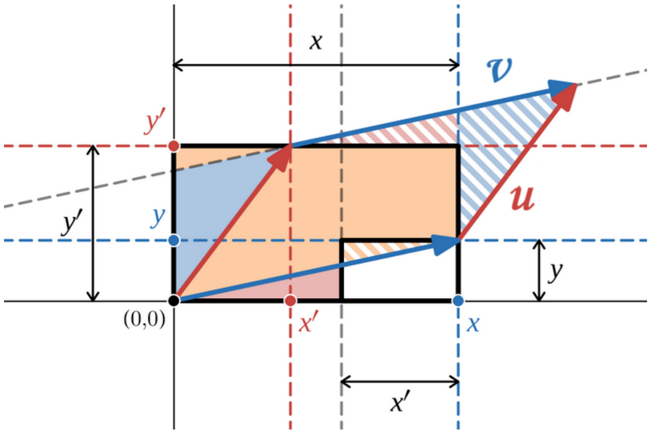
1. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, une base de E. Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on pose $u_i = \sum_{k=1}^{i} e_k$. Est-ce que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E ?
2. Justifier que si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont deux bases orthonormées de E, alors pour toute famille $\mathscr{F}$ à n vecteurs de E, on a
$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \pm \det_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}).$$

CeDet3

Interprétation géométrique

→ Soit $\mathscr{B}$, la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soient $u,\ v \in \mathbb{R}^2$, et $\mathscr{A}_{u,v}$ l'aire du parallélogramme engendré par u et v, alors

$$\mathscr{A}_{u,v} = |\det_{\mathscr{B}}(u, v)|.$$



On a pour $v = (x', y')$, $v = (x, y)$

$$
\begin{aligned}
|\det_{\mathscr{B}}(u,v)| &= \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \\
&= \underbrace{xy'}_{\substack{\text{Aire grand}\\ \text{rectangle noir}}} - \underbrace{yx'}_{\substack{\text{Aire petit}\\ \text{rectangle noir}}} = \mathscr{A}_{u,v}
\end{aligned}
$$

→ De même qu'en dimension 2, on montre que pour $\mathscr{B}$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$|\det_{\mathscr{B}}(u,v,w)| = \mathscr{V}(u,v,w)$$

où $\mathscr{V}(u,v,w)$ désigne le volume du parallélépipède formé par u, v et w trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

4.2 Déterminant d'un endomorphisme

DÉFINITION — **déterminant d'un endomorphisme**

Soit φ, un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.
Le déterminant de la matrice $M_{\mathscr{B}}(\varphi)$ de φ dans la base $\mathscr{B}$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ choisie.
Ce nombre est appelé le ***déterminant de l'endomorphisme*** *φ, noté $\det(\varphi)$.*

Exercice 4

✦ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & M^T \end{array} \right.$. Donner $\det(\varphi)$.

CeDet4

Quelques règles de calculs
À partir des relations vues précédemment sur le déterminant de matrices et des formules de changement de bases, on montrer que :

Si
- → $(u_1, \cdots, u_n)$ est une famille de n vecteurs de E ;
- → f, g sont des endomorphismes de E et $\lambda \in \mathbb{K}$;

Alors :

i) $\det(0_{\mathscr{L}(E)}) = 0$, $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$.

ii) $\det_{\mathscr{B}}\big(f(u_1), \cdots, f(u_n)\big) = \det(f)\det_{\mathscr{B}}(u_1, \cdots, u_n)$.

iii) $\det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g)$.

iv) f est bijectif si et seulement si $\det(f) \neq 0$. Dans ce cas, $\det\big(f^{-1}\big) = 1/\det(f)$.

Remarque. Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. La famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ engendre un parallélépipède en dimension n de volume 1, et $\det(f) = \det_{\mathscr{B}}\big((f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ est le volume du parallélépipède $f(e_1), \ldots, f(e_n)$.

5 Complément : déterminant d'une matrice par blocs

Si $A \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, on peut définir une matrice $M \in \mathcal{M}_{n+p,q+r}(\mathbb{K})$ par blocs de la façon suivante :

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right].$$

On peut définir les opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produits, transposition). Par exemple, sous réserve de compatibilité de la taille des blocs et en respectant l'ordre dans les produits matriciels, on a

$$\left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} E & G \\ \hline F & H \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} AE+CF & AG+CH \\ \hline BE+DF & BG+DH \end{array}\right].$$

Ces définitions et règles de calculs s'étendent à un nombre finis de blocs : si $A_{i,j}$ désignent des matrices dont les tailles sont compatibles, alors on pose

$$M = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,p} \end{bmatrix}.$$

On dit qu'une matrice est **triangulaire supérieure par blocs** si elle s'écrit sous la forme

$$M = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,p} \\ \mathbf{0} & A_{2,2} & \dots & A_{2,p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & A_{n,p} \end{bmatrix}.$$

On a une définition équivalente avec triangulaire inférieure par blocs ou encore diagonale par blocs.

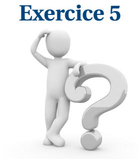
PROPOSITION — **déterminant d'une matrice triangulaire par blocs**

Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs dont les blocs sur la diagonale sont des matrices carrées est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux.

Exemple. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors

$$\det \begin{bmatrix} A & C \\ 0_{p,n} & B \end{bmatrix} = \det(A)\cdot\det(B) \qquad (\star)$$

Exercice 5



Preuve

1. Vérifier que la relation $(\star)$ est vraie si B n'est pas inversible.

2. On suppose B inversible. Justifier $(\star)$ en multipliant à gauche

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0_{p,n} & B \end{bmatrix} \quad \text{par} \quad \begin{bmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

3. Traiter le cas général de la proposition précédente.

CeDet12

⚠ **Attention.** En règle générale, on n'a pas la relation

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right] = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C) \qquad \times\times\times.$$

Par exemple en échangeant un nombre paire de fois les lignes, on a

$$\det \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \det(I_4) = 1$$

pourtant $\qquad \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C) = 0\cdot 0 - 1\cdot 1 = -1.$

Exercices

Exercice 6. ✦ Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que la matrice M_x ci-dessous soit inversible : # CeDet5

$$M_x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 7. ✦ Soient $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant suivant : # CeDet6

$$\begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{vmatrix}$$

Exercice 8. ✦ Soit Δ_n le déterminant de taille n suivant : # CeDet7

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$.
2. En déduire la valeur de Δ_n pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 9. ✦ Calculer le déterminant de la matrice # CeDet8

$$M_n(a,b) = \begin{bmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+b & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{bmatrix}.$$

Exercice 10. ✦✦ Soit $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $A(x)$ la matrice dont le terme général est $a_{i,j} + x$. # CeDet9

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \det(A(x))$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 1.
2. *Applications.*
   a) Pour a et b deux réels distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, en déduire la valeur du déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & a & \dots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & \alpha_n \end{vmatrix}$$

   b) Soit $A \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ une matrice alternée et soit $J \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\det(A + xJ) = \det(A)$.

Exercice 11. ✦✦ Pour a, b, $c \in \mathbb{R}$, on pose # CeDet10

$$d(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & c & c & \cdots & c \\ b & a & \cdots & \cdots & c \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}.$$

De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\quad \mathrm{P}(x) = d(a+x, b+x, c+x)$.

1. Justifier que P est une fonction polynomiale de degré au plus 1.

2. En déduire, pour $b \neq c$, la valeur de $d(a,b,c)$.

3. Traiter le cas où $b = c$.

Exercice 12. ✦✦ **Déterminant de Vandermonde** # CeDet11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, on considère le déterminant :

$$\mathrm{V}(a_1, \ldots, a_n) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ {a_1}^2 & {a_2}^2 & \cdots & {a_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {a_1}^{n-1} & {a_2}^{n-1} & \cdots & {a_n}^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de d'établir la formule : $\quad \mathrm{V}(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(a_j - a_i\right).$

1. *Preuve 1*

a) Vérifier que la formule est vraie si deux des a_i sont égaux. Dans la suite, on les supposera donc distincts.

b) En faisant des opérations élémentaires, montrer la formule suivante avant de conclure.

$$\mathrm{V}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{V}(a_2, \ldots, a_n) \prod_{i=2}^{n} \left(a_i - a_1\right) \qquad (\bullet)$$

2. *Preuve 2*

a) Soit X l'indéterminée, vérifier que $\mathrm{V}(\mathrm{X}, a_2, \ldots, a_n)$ est un polynôme en X de degré au plus $n-1$.

b) Préciser le coefficient devant X^{n-1} et préciser des racines évidentes.

c) Retrouver la formule $(\bullet)$.

Indications et solutions

Exercice 3

1. Le déterminant de la famille $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n)$ dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

car c'est le déterminant d'une matrice triangulaire. Le déterminant est non nul, $\mathscr{F}$ est une base de E.

2. Notons P la matrice de la base $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$. Comme $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont orthonormées, on sait que P est une matrice orthogonale.

$$\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{P} = \mathrm{I}_n.$$

D'où

$$\begin{aligned} 1 = \det \mathrm{I}_n = \det\left(\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{P}\right) &= \det\left(\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\right) \cdot \det \mathrm{P} \\ &= \det(\mathrm{P})^2. \end{aligned}$$

Ainsi $\det(\mathrm{P}) = \pm 1$. De plus la formule de changement de bases donne

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \mathrm{P}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}).$$

La matrice est diagonale :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \det \mathrm{P} \cdot \det \mathrm{M}_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}) = \pm \det_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}).$$

Exercice 4

On sait que si on note $\mathscr{S}_n$, $\mathscr{A}_n$, les sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constitués des matrices symétriques, respectivement antisymétriques, alors

$$\mathscr{S}_n \oplus \mathscr{A}_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

De plus,

$$\dim \mathscr{S}_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \dim \mathscr{A}_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à cette décomposition, on constate que $\mathscr{B}$ est une base de vecteurs propres et plus précisément

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \mathrm{Diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{\frac{n(n+1)}{2} \text{ coeff}}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{\frac{n(n-1)}{2} \text{ coeff}})$$

D'où

$$\det(\varphi) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)\right) = (-1)^{n(n-1)/2}.$$

Exercice 6

- *Rédaction 1.*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Procédons par pivot de Gauss

$$\begin{aligned} \det \mathrm{M}_x &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & x-2 & x^2-4 \\ 0 & 3 & 21 \end{vmatrix} \quad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\ &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 21 \\ 0 & x-2 & x^2-4 \end{vmatrix} \quad \mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_3 \\ &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & * \end{vmatrix} \quad \mathrm{L}_3 \leftarrow 3\mathrm{L}_3 - (x-2)\mathrm{L}_2 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} * &= 3\left(x^2-4\right) - (x-2)\cdot 21 \\ &= 3(x-2)((x+2)-7) \\ &= 3(x-2)(x-5). \end{aligned}$$

Finalement, en se ramenant à une matrice triangulaire

$$\det \mathrm{M}_x = -3(x-2)(x-5).$$

En particulier, M_x est inversible ssi $\det \mathrm{M}_x \neq 0$ ssi $x \notin \{2; 5\}$.

- *Rédaction 2.*

En développant suivant la deuxième ligne, on constate de $\mathrm{P} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \det \mathrm{M}_x$ est une fonction polynomiale de degré 2. Or on a directement $\mathrm{P}(2) = \mathrm{P}(5) = 0$ (2 lignes sont alors identiques). Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{P}(x) = \lambda(x-2)(x-5)$$

On conclut alors que M_x est inversible si et seulement si $x \notin \{2; 5\}$.

Exercice 7

Si on effectue les opérations $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i - \mathrm{L}_1$ pour $i \in [\![2; n]\!]$, on constate que le déterminant recherché vaut

$$\begin{vmatrix} s_1 & \cdots & \cdots & \cdots & s_1 \\ 0 & s_2 - s_1 & \cdots & \cdots & s_2 - s_1 \\ \vdots & \vdots & s_3 - s_1 & \cdots & s_3 - s_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & s_2 - s_1 & s_3 - s_1 & \cdots & s_n - s_1 \end{vmatrix}$$

$$= s_1 \begin{vmatrix} s_2 - s_1 & \cdots & \cdots & s_2 - s_1 \\ \vdots & s_3 - s_1 & \cdots & s_3 - s_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_2 - s_1 & s_3 - s_1 & \cdots & s_n - s_1 \end{vmatrix}.$$

De nouveau avec

$$\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i - \mathrm{L}_1 \text{ pour } i \in [\![2; n-1]\!],$$

le déterminant vaut

$$s_1 (s_2 - s_1) \begin{vmatrix} s_3 - s_2 & \cdots & \cdots & s_3 - s_2 \\ \vdots & s_4 - s_2 & \cdots & s_4 - s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_3 - s_2 & s_4 - s_2 & \cdots & s_n - s_2 \end{vmatrix}.$$

Par récurrence, on monte que le déterminant recherché vaut

$$s_1 (s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \dots (s_n - s_{n-1}).$$

Une autre solution, pour se ramener à une matrice triangulaire, est d'effectuer successivement les opérations

$$\mathrm{L}_n \leftarrow \mathrm{L}_n - \mathrm{L}_{n-1}$$
$$\mathrm{L}_{n-1} \leftarrow \mathrm{L}_{n-1} - \mathrm{L}_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1$$

Exercice 12

1.a) Si deux des a_i sont égaux, alors deux colonnes de cette matrice sont égales, donc la matrice n'est pas inversible et

$$\mathrm{V}(a_1, \dots, a_n) = 0.$$

Dans ce cas, le produit $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$ est aussi nul, donc la formule est vraie.

1.b) Supposons désormais les a_i deux à deux distincts. Pour tout $k \in [\![2; n]\!]$, on remplace la ligne L_k par

$$\mathrm{L}_k - a_1 \mathrm{L}_{k-1}.$$

Cette opération ne change pas le déterminant. On obtient alors

$$\mathrm{V}(a_1, \dots, a_n) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{bmatrix}.$$

Pour chaque colonne $j \geqslant 2$, on factorise $a_j - a_1$. Il vient

$$\mathrm{V}(a_1, \dots, a_n) = \left(\prod_{j=2}^{n} (a_j - a_1) \right) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{bmatrix}.$$

En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\mathrm{V}(a_1, \dots, a_n) = \left(\prod_{j=2}^{n} (a_j - a_1) \right) \mathrm{V}(a_2, \dots, a_n).$$

On en déduit par récurrence sur n que

$$\mathrm{V}(a_1, \dots, a_n) = \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{j=k+1}^{n} (a_j - a_k) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

La formule est donc démontrée.

2.a) On considère

$$\mathrm{P(X)} = \mathrm{V}(\mathrm{X}, a_2, \dots, a_n).$$

Comme seule la première colonne dépend de X, et que ses termes sont

$$1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \dots, \mathrm{X}^{n-1},$$

en développant suivant la première colonne, on voit que P(X) est un polynôme en X de degré au plus $n-1$.

2.b) Le coefficient de X^{n-1} dans P(X) est obtenu en développant le déterminant suivant la première colonne : il s'agit du cofacteur de l'entrée située sur la dernière ligne, première colonne, soit

$$(-1)^{n+1} \det \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{bmatrix} = (-1)^{n+1} \mathrm{V}(a_2, \dots, a_n).$$

Ainsi,

$$\mathrm{P(X)} = (-1)^{n+1} \mathrm{V}(a_2, \dots, a_n) \mathrm{X}^{n-1} + \mathrm{Q(X)}$$

avec $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}_{n-2}[\mathrm{X}]$. Par ailleurs, pour tout $j \in [\![2, n]\!]$, si $\mathrm{X} \leftarrow a_j$, alors les colonnes 1 et j de la matrice définissant P(X) sont égales. La matrice en question ne peut être inversible son déterminant est nul. D'où

$$\forall\, j \in [\![2; n-1]\!], \qquad \mathrm{P}(a_j) = 0.$$

Les racines évidentes de P sont donc $a_2, \dots, a_n$.

2.c) On suppose les nombres a_i 2 à 2 distincts. Dans le cas contrainte, le résultat a déjà été établi.
Comme P est de degré au plus $n-1$, admet les $n-1$ racines distinctes $a_2, \dots, a_n$, et a pour coefficient dominant $(-1)^{n+1} \mathrm{V}(a_2, \dots, a_n)$, on en déduit

$$\mathrm{P(X)} = (-1)^{n+1} \mathrm{V}(a_2, \dots, a_n) \prod_{j=2}^{n} (\mathrm{X} - a_j).$$

En évaluant en $\mathrm{X} \leftarrow a_1$, il vient

$$\mathrm{V}(a_1, \dots, a_n) = (-1)^{n+1} \mathrm{V}(a_2, \dots, a_n) \prod_{j=2}^{n} (a_1 - a_j).$$

Or

$$(-1)^{n+1} \prod_{j=2}^{n} (a_1 - a_j) = \prod_{j=2}^{n} (a_j - a_1),$$

puisqu'il y a $n-1$ facteurs. Donc

$$\mathrm{V}(a_1, \dots, a_n) = \mathrm{V}(a_2, \dots, a_n) \prod_{j=2}^{n} (a_j - a_1),$$

ce qui redonne bien la formule (•).

On conclut ensuite par récurrence pour la formule générale :

$$\mathrm{V}(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$