

CHAPITRE 1

Valeurs propres et vecteurs propres

Une idée qui ne peut servir qu'une seule fois est une astuce. Sinon, elle devient une méthode.

GEORGE PÓLYA
Mathématicien américain d'origine hongroise
et suisse (1887-1985).

Ce chapitre est un préliminaire à la réduction des matrices et endomorphismes de dimension finie qui est un des objectifs du programme de deuxième année. Il sera complété par le chapitre « diagonalisation ». Le chapitre commence par des rappels de première année sur des polynômes d'endomorphismes et de matrices pour ensuite définir la notion de valeur propre et de vecteur propre.

1

Rappels : polynômes d'endomorphismes et de matrices

Rappelons que pour un endomorphisme φ de E , les applications $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$, $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi \dots$ sont parfaitement définies et linéaires. Les **puissances** de φ sont les applications :

$$\varphi^0 = \text{id}_E \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{n \text{ compositions}}.$$

Remarque. Comme pour les matrices, il existe une version de la formule du binôme de Newton dans le cas des endomorphismes. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E)$ qui *commutent* ($\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$). Alors pour tout entier naturel p ,

$$(\varphi + \psi)^p = (\varphi + \psi) \circ (\varphi + \psi) \circ \dots \circ (\varphi + \psi) = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \varphi^i \circ \psi^{p-i}.$$

Exemple. Calculons les puissances de l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (2x + y, 2y). \end{cases}$$

Remarquons que $\varphi = 2 \text{id}_{\mathbb{R}^2} + \psi$, où ψ est l'endomorphisme défini par $\psi(x, y) = (y, 0)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Or, ψ^2 est l'application nulle. En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\psi^2((x, y)) = \psi(\psi(x, y)) = \psi((y, 0)) = (0, 0).$$

Puis, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$,

$$\psi^k = \psi^2 \circ \psi^{k-2} = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(E)}.$$

Comme les endomorphismes $2 \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ et ψ commutent, la formule du binôme de Newton permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \varphi^n &= (2 \text{id}_{\mathbb{R}^2} + \psi)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2 \text{id}_{\mathbb{R}^2})^{n-k} \circ \psi^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2 \text{id}_{\mathbb{R}^2})^{n-k} \circ \psi^k \\ &= \binom{n}{0} 2^n \text{id}_{\mathbb{R}^2} \circ \psi^0 + \binom{n}{1} 2^{n-1} \text{id}_{\mathbb{R}^2} \circ \psi^1 = 2^n \text{id}_{\mathbb{R}^2} + n 2^{n-1} \psi. \end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi^n((x, y)) = 2^{n-1}(2x + ny, 2y).$$

DÉFINITIONS

polynôme de matrice, d'endomorphisme

Soient $P(x) = \sum_{i=0}^p a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

- Le **polynôme de matrice** $P(A)$ est défini par $P(A) = \sum_{i=0}^p a_i A^i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Un polynôme P est **annulateur** de A si $P(A) = 0_n$.

- Le **polynôme d'endomorphisme** $P(\varphi)$ est défini par $P(\varphi) = \sum_{i=0}^p a_i \varphi^i \in \mathcal{L}(E)$.

Un polynôme P est **annulateur** de φ si $P(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Règles de calculs

On démontre que pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}[x]$,

$$(\lambda P)(A) = \lambda P(A) \quad \text{et} \quad (P + Q)(A) = P(A) + Q(A).$$

Retenons également la propriété de commutativité :

$$(PQ)(A) = P(A)Q(A) = Q(A)P(A) = (QP)(A).$$

On a de même avec des endomorphismes

$$(\lambda P)(\varphi) = \lambda P(\varphi), \quad (P + Q)(\varphi) = P(\varphi) + Q(\varphi) \quad \text{et} \quad (PQ)(\varphi) = P(\varphi) \circ Q(\varphi) = Q(\varphi) \circ P(\varphi) = (QP)(\varphi).$$

Exemple. Reprenons l'exemple de $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $\varphi((x, y)) = (2x + y, x)$.

Vérifions que le polynôme P défini par $P(t) = t^2 - 2t - 1$ est annulateur de φ . Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi^2((x, y)) &= \varphi(\varphi((x, y))) = \varphi((2x + y, x)) \\ &= (2(2x + y) + x, 2x + y) = (5x + 2y, 2x + y); \\ -2\varphi((x, y)) &= (-4x - 2y, -2x); \\ -\text{id}_E(x, y) &= (-x, -y). \end{aligned}$$

$$\varphi^2((x, y)) - 2\varphi((x, y)) - \text{id}_E(x, y) = (0, 0).$$

Comme ceci est valable pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on écrit simplement $\varphi^2 - 2\varphi - \text{id}_E = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$.

Exercice 1



◆ ✎ 🔍 Existence d'un polynôme annulateur

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En étudiant la famille (I_n, A, \dots, A^p) pour un entier p bien choisi, montrer que A admet un polynôme annulateur.

p. 23

VP1

Exercice 2



◆◆ Exemples

Les questions sont indépendantes.

1. Donner un polynôme annulateur à l'endomorphisme $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto P' \in \mathbb{R}_n[x]$.

p. 24

2. Même question avec $\psi : P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto P(x+7) \in \mathbb{R}_n[x]$.

On pourra remarquer que $\psi(P) - P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$.

VP2

Exemples. Polynômes d'une matrice diagonale, triangulaire.

Posons :

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{bmatrix} t_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & t_n \end{bmatrix}.$$

Alors

$$P(D) = \begin{bmatrix} P(d_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P(d_n) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P(T) = \begin{bmatrix} P(t_1) & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & P(t_n) \end{bmatrix}.$$

Remarque. Noter que si tous les coefficients diagonaux d_i sont racines du polynôme P , alors P est un polynôme annulateur de D .

Exercice 3



Les questions sont indépendantes.

1. Soient A, B , deux matrices carrées semblables. Montrer que tout polynôme annulateur de A est annulateur de B .
2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[x]$ annulateur de A . Montrer que si $P(0) \neq 0$ alors A est inversible.

p. 24

VP3

PROPOSITION

polynôme d'endomorphisme, de matrice

Soient E un espace vectoriel de dimension finie dont \mathcal{B} est une base et φ un endomorphisme de E .
Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)^k = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^k).$$

Plus généralement, pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$,

$$P(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(\varphi)).$$

Preuve. • Le premier point s'obtient par un raisonnement par récurrence sur k à partir de la formule

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^{k+1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^k \circ \varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^k) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi).$$

- Le second point découle du premier et de la linéarité de l'application $\varphi \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

2

Valeurs propres, vecteurs propres, cas matriciel

2.1

Premières définitions

DÉFINITIONS

valeur propre, vecteur propre

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On dit que λ est une **valeur propre** de A et que X est un **vecteur propre** pour A associé à la valeur propre λ si


$$AX = \lambda X \quad \text{et} \quad X \neq 0_{n,1}.$$

Exemple. Posons

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

de sorte que $AX = 0 \cdot X$, $AY = Y$ et $AZ = -2Z$.

Comme X, Y et Z sont des matrices colonnes non nuls, 0, 1 et -2 sont valeurs propres de A.

 **Attention.** Un vecteur propre est toujours non nul.

DÉFINITION

spectre

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Le **spectre** de A, noté $\text{Sp}(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A.

Exemple. En reprenant l'exemple précédent, $\{0; 1; -2\} \subset \text{Sp}(A)$.

Python. Voici le code pour obtenir une approximation des valeurs propres.

Editeur

```
import numpy.linalg as al
# On importe la sous-bibliothèque
# linalg
A=np.array([[1,3,0],[0,-2,0],[-1,-2,0]])
# On définit la matrice A
print(al.eigvals(A))
```

Console

```
>>> # script executed
[ 0.  1. -2.]
```

Selon ce calcul, -2, 0 et 1 sont toutes les valeurs propres de la matrice A. On conjecture donc que $\text{Sp}(A) = \{-2; 0; 1\}$.

2.2 Caractérisations des valeurs propres

THÉORÈME

caractérisation avec l'inversibilité

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les énoncés suivants sont équivalents.

- i) Le réel λ est une valeur propre de A.
- ii) La matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Autrement dit, $\text{Sp}(A)$ est l'ensemble des réels λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(A) &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}, \quad AX = \lambda X \\ &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}, \quad (A - \lambda I_n)X = 0_{n,1} \\ &\iff \text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\} \\ &\iff A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible.} \end{aligned}$$

La dernière équivalence est une conséquence de la formule du rang. ■

Remarque. En particulier, 0 est valeur propre si et seulement si, la matrice A n'est pas inversible.

COROLLAIRE

matrices triangulaires

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si** A est une matrice triangulaire,
- alors** les valeurs propres de A sont les coefficients diagonaux de A.

Preuve. Notons $A = (a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La matrice $A - \lambda I_n$ est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont les réels $a_{ii} - \lambda$ où $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Il suffit ensuite de rappeler qu'une matrice triangulaire n'est pas inversible si et seulement si au moins l'un de ses coefficients diagonaux est nul. ■



Attention. C'est grossièrement faux si la matrice n'est pas triangulaire.

On pourra par exemple, vérifier que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ n'admet aucune valeur propre réelle.

2.3 Les sous-espaces propres $E_\lambda(A)$

DÉFINITION

$E_\lambda(A)$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout réel λ , on pose

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}.$$

En remarquant que $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$, on en déduit que :

PROPOSITION

structure de $E_\lambda(A)$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- $E_\lambda(A) \neq \{0_{n,1}\}$ si et seulement si λ est une valeur propre de A .

Remarque. La formule du rang donne alors $\dim(E_\lambda(A)) + \text{rg}(A - \lambda I_n) = n$.

Vocabulaire. Si $E_\lambda(A) \neq \{0_{n,1}\}$ alors on parle de **l'espace propre associé à la valeur propre λ** . Dans ce cas,

$$1 \leq \dim(E_\lambda(A)) \leq n.$$

Exercice 4



◆ **Q** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que si A et B sont semblables alors $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B)$ et les sous-espaces propres sont de même dimension. p. 24

VP4

Exemple. Le cas diagonal.

Si A est une matrice diagonale, alors les valeurs propres de A sont exactement les coefficients diagonaux de A et pour $\lambda \in \text{Sp}(A)$, la dimension de $E_\lambda(A)$ est égale au nombre de fois où λ apparaît sur la diagonale de A .

Exercice 5



◆◆ **Vrai ou Faux?**

Pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

- | | | | |
|---|---|---|-------|
| 1. Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ alors $\lambda^2 \in \text{Sp}(A^2)$. | ✓ | × | |
| 2. Si $\lambda^2 \in \text{Sp}(A^2)$ alors $\lambda \in \text{Sp}(A)$. | ✓ | × | |
| 3. $\text{Sp}(A) = \text{Sp}({}^t A)$. | ✓ | × | p. 24 |
| 4. $E_\lambda(A) = E_\lambda({}^t A)$. | ✓ | × | |
| 5. $\dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_\lambda({}^t A))$. | ✓ | × | |
| 6. Si A est inversible, $\lambda \in \text{Sp}(A)$ ssi $\lambda^{-1} \in \text{Sp}(A^{-1})$. | ✓ | × | |

VP5

Exercice 6



◆ **Q** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si la somme des coefficients de A sur chaque ligne vaut 1 alors 1 est valeur propre de A . p. 25
2. Est-ce encore vrai si la somme des coefficients de A sur chaque colonne vaut 1?

VP6

3

Valeurs propres, vecteurs propres, cas des endomorphismes

3.1 Définitions et exemples

Reprenons et adaptions les définitions au cas des endomorphismes d'un espace vectoriel E .

DÉFINITIONS

valeur propre, vecteur propre, spectre

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

• Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$. On dit que λ est une **valeur propre** de φ et que u est un **vecteur propre** pour φ associé à la valeur propre λ si

$$\varphi(u) = \lambda u \quad \text{et} \quad u \neq 0_E.$$

• L'ensemble des valeurs propres de φ est le **spectre** de φ , il est noté $\text{Sp}(\varphi)$.

Exemple. Posons $u = (1, 0, -2)$, $v = (0, 0, 1)$, $w = (1, 1, -2)$ et

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (x+2y, 3y, 2x-4y+2z) \end{cases}$$

On a $\varphi(u) = u$, $\varphi(v) = 2v$ et $\varphi(w) = 3w$. Comme u , v et w sont non nuls, 1, 2 et 3 sont trois valeurs propres de φ . C'est-à-dire, $\{1; 2; 3\} \subset \text{Sp}(\varphi)$.

Remarque. Le vecteur u (non nul) est un vecteur propre de φ si et seulement si la droite vectorielle $\text{Vect}(u)$ est stable par φ .

Preuve. Raisonnons par double implication.

\Rightarrow Si u est vecteur propre de φ alors pour tout $v = \mu u \in \text{Vect}(u)$,

$$\varphi(v) = \varphi(\mu u) = \mu \varphi(u) = \mu \lambda u \in \text{Vect}(u).$$

La sous-espace $\text{Vect}(u)$ est stable par φ .

\Leftarrow Réciproquement, si $\text{Vect}(u)$ est stable par φ alors $\varphi(u) \in \text{Vect}(u)$. Autrement dit, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(u) = \lambda u$. C'est-à-dire u (non nul) est vecteur propre de φ . ■

Exercice 7



Exemples

Les questions sont indépendantes.

On pose $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[x] & \rightarrow \mathbb{R}_n[x] \\ P & \mapsto P' + 2P \end{cases}$ et $\psi : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto f' \end{cases}$

p. 25

1. Étudier les valeurs propres de l'endomorphisme φ .
2. Montrer que tout réel est valeur propre de ψ .

Remarque. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Considérons l'endomorphisme

$$\varphi_A : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto AX. \end{cases}$$

Les valeurs propres (et vecteurs propres) de φ_A correspondent exactement aux valeurs propres (et vecteurs propres) de la matrice A .

DÉFINITION - PROPOSITION

$E_\lambda(\varphi)$

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit le sous-espace vectoriel $E_\lambda(\varphi)$ de E par

$$E_\lambda(\varphi) = \{u \in E \mid \varphi(u) = \lambda u\} = \text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}_E).$$

Remarques.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda(\varphi)$ est un espace stable par φ .
- $E_\lambda(\varphi)$ est bien un s.e.v de E puisque c'est le noyau d'une application linéaire.
- Si λ est une valeur propre, on dit que $E_\lambda(\varphi)$ est l'**espace propre associé à la valeur propre λ** .

3.2 Précision en dimension finie

THÉORÈME

lien matrice et endomorphisme

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, $u \in E$ et \mathcal{B} , une base de E .

- Si on note**
- U la matrice colonne des coordonnées de u dans la base \mathcal{B} .
 - $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$, la matrice de l'endomorphisme φ dans la base \mathcal{B} .

Alors, u est vecteur propre de l'endomorphisme φ pour la valeur propre λ si et seulement si U est vecteur propre de la matrice A pour la valeur propre λ .

Preuve. Nous avons vu (théorème page ??) que AU est la matrice colonne des coordonnées de $\varphi(u)$ dans la base \mathcal{B} . Ainsi

$$AU = \lambda U \iff \varphi(u) = \lambda u.$$

Application. Soient A et B deux matrices semblables. Elle représente le même endomorphisme φ dans des bases différentes. On retrouve alors

$$\text{Sp}(A) = \text{Sp}(\varphi) = \text{Sp}(B) \quad (\text{voir exercice 4}).$$

PROPOSITION

caractérisations en dimension finie

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence entre les énoncés suivants.

- i) Le réel λ est valeur propre de φ .
- ii) L'endomorphisme $\varphi - \lambda \text{id}_E$ n'est pas injectif.
- iii) L'endomorphisme $\varphi - \lambda \text{id}_E$ n'est pas surjectif.
- iv) $\text{rg}(\varphi - \lambda \text{id}_E) < \dim E$.

Preuve. Raisonnons par équivalences. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\lambda \in \text{Sp}(\varphi)$	\iff	$\exists u \in E \setminus \{0_E\}, \quad \varphi(u) = \lambda u$	
	\iff	$\exists u \in E \setminus \{0_E\}, \quad (\varphi - \lambda \text{id}_E)(u) = 0_E$	
	\iff	$\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}_E) \neq \{0_E\}$	
	\iff	$\varphi - \lambda \text{id}_E$ n'est pas injective	
	\iff	$\varphi - \lambda \text{id}_E$ n'est pas surjective	car $\varphi - \lambda \text{id}_E$ est un endomorphisme de dimension finie
	\iff	$\text{Im}(\varphi - \lambda \text{id}_E) \neq E$	
	\iff	$\text{rg}(\varphi - \lambda \text{id}_E) < \dim(E)$	car $\text{Im}(\varphi - \lambda \text{id}_E) \subset E$ avec égalité si et seulement si il y a égalité des dimensions.

3.3 Précisions pour des endomorphismes remarquables

Les homothéties

Pour rappel, une homothétie de E de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est l'application

$$\lambda \text{id}_E : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ u & \mapsto \lambda \cdot u. \end{cases}$$

- Le polynôme P d'expression $P(x) = x - \lambda$ est un polynôme annulateur de l'homothétie de rapport λ .
- Tout vecteur non nul de E est vecteur propre pour la valeur propre λ .

Exercice 8



◆◆◆ La réciproque

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ non nul tel que tout vecteur non nul est vecteur propre de φ .
Montrer que φ est une homothétie.

p. 25

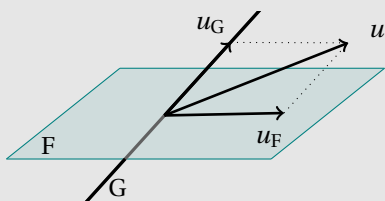
VP8

Les projecteurs

DÉFINITION (RAPPEL)

projecteur

Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.



Ainsi, pour tout $u \in E$, il existe une unique décomposition $u = u_F + u_G$ où $(u_F, u_G) \in F \times G$. On pose

$$p : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ u & \mapsto u_F. \end{cases}$$

Cette application est linéaire, elle est appelée le **projecteur** sur F parallèlement à G .

Remarque. On montre que p est un projecteur sur $F = \text{Im}(p)$ parallèlement à $G = \text{Ker}(p)$. En particulier, le noyau et l'image d'un projecteur sont supplémentaires dans E .

$$\text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p) = E.$$

Exercice 9



1. Savez-vous prouver cette remarque?
2. Vérifier que $\text{id}_E - p$ est un projecteur. Préciser ces éléments caractéristiques.

p. 25

VP9

THÉORÈME

caractérisation d'un projecteur

Soit $p : E \rightarrow E$ une application. Les énoncés suivants sont équivalents.

- i) p est un projecteur.
- ii) p est linéaire et $p \circ p = p$.

Résultat admis.

Spectre d'un projecteur.

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E de sorte que p soit le projecteur sur F parallèlement sur G . Afin que F et G ne soient pas réduits à $\{0_E\}$, on suppose dans la suite que $p \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $p \neq \text{id}_E$.

- Pour tout $u \in F$ non nul, $p(u) = u$. Le vecteur u est donc vecteur propre pour la valeur propre 1. Pour tout $u \in G$ non nul, $p(u) = 0_E$. Le vecteur u est donc vecteur propre pour la valeur propre 0. On a donc

$$\{0; 1\} \subset \text{Sp}(p).$$

Réciproquement, supposons que p admet une valeur propre λ associée à un vecteur propre u

$$p(u) = \lambda u \quad \text{puis} \quad p(p(u)) = \lambda^2 u.$$

Or on a aussi $p(p(u)) = p \circ p(u) = p(u) = \lambda u$. Comme u est non nul, $\lambda^2 = \lambda$ et $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. On a donc

$$\text{Sp}(p) \subset \{0; 1\}.$$

En résumé, par double-inclusion

$$\text{Sp}(p) = \{0; 1\}.$$

- Le polynôme d'expression $x^2 - x = x(x - 1)$ est un polynôme annulateur de p . Notons que les valeurs propres de p sont des racines du polynôme.
- D'après les résultats précédents sur les projecteurs,

$$F = \text{Im}(p) = E_1(p) \quad \text{et} \quad G = \text{Ker}(p) = E_0(p).$$

D'où

$$E = F \oplus G = E_1(p) \oplus E_0(p).$$

Autrement dit, E se décompose suivant les espaces propres de p .

Exercice 10



◇ Soit $a \in \mathbb{R}^+$. On définit les applications :

$$p_a : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{1+a^2} (x+ay, ax+a^2y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad q : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{2}(x+y, x+y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Justifier que les applications p_a et q sont des projecteurs.
2. Vérifier que $(1, a)$ est vecteur propre de $p_a \circ q$.
3. En déduire l'unique valeur a pour laquelle $p_a \circ q$ est un projecteur.

p. 26

#VP10

Les symétries

Reprenons E , un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Pour tout $u \in E$, il existe un unique couple $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$. On définit alors la symétrie par rapport à F parallèlement à G comme l'application :

$$s : u \in E \mapsto u_F - u_G \in E.$$

On montre que s est une application linéaire.

Exercice 11



◆ **Les symétries**

1. Faire un dessin similaire au cas des projecteurs pour illustrer la situation.
2. Préciser $s \circ s$. En déduire un polynôme annulateur.
3. On suppose que $s \neq \pm \text{id}_E$. Étudier les valeurs propres de s et préciser les espaces propres à l'aide de F et G .
4. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G . Vérifier que $s = 2p - \text{id}_E$. Retrouver les résultats de la question 3.

p. 26

#VP11

THÉORÈME

polynômes et valeurs propres

Soient $Q \in \mathbb{R}[x]$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

Si u est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ ,
alors $Q(\varphi)(u) = Q(\lambda) \cdot u$.

Preuve. Par récurrence, on traite le cas des monômes $P(x) = x^k$. Puis, par linéarité, on étend la relation à tous les polynômes. ■

Exercice 12



◆ Rédiger cette preuve précisément.

p. 26

VP12

COROLLAIRE

valeurs propres et racines

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{R}[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \lambda \text{ est valeur propre de } \varphi. \\ \rightarrow P \text{ est un polynôme annulateur de } \varphi. \end{array} \right.$

Alors λ est une racine du polynôme P .

Preuve. Soit u , un vecteur propre associé à la valeur propre λ . D'après l'énoncé précédent

$$P(\varphi)(u) = P(\lambda)u.$$

Or, P est un polynôme annulateur de φ ,

$$P(\varphi)(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}(u) = 0_E.$$

Ainsi $P(\lambda)u = 0_E$, puis $P(\lambda) = 0$ car u est non nul (c'est un vecteur propre). En conclusion, λ est une racine de P . ■

Exemple. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Le polynôme d'expression x^p est annulateur de φ . Il ne peut avoir d'autre valeur propre que 0. De plus, φ ne peut être injectif, 0 est bien une valeur propre de φ . Finalement

$$\text{Sp}(\varphi) = \{0\}.$$

Remarques.

• On a des énoncés équivalents avec les matrices.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $Q \in \mathbb{R}[x]$ et X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ , alors

$$Q(A)X = Q(\lambda)X.$$

De plus, si Q est annulateur de A , λ est une racine de Q .

• La réciproque du corollaire est fautive. Une racine d'un polynôme annulateur n'est pas nécessairement une valeur propre. En effet, si P est annulateur de φ et $\alpha \notin \text{Sp}(\varphi)$, le polynôme d'expression $(x - \alpha)P(x)$ est encore un polynôme annulateur. Pour en savoir plus, on pourra consulter l'exercice 35, p. 20.

• Notons que le nombre de valeurs propres d'un endomorphisme de dimension finie est fini. En effet, nous avons vu en exercice qu'il existe toujours un polynôme annulateur P non nul à l'endomorphisme, il y a alors au plus $\deg(P)$ racines, au plus $\deg(P)$ valeurs propres.

Exercice 13



- ◇ Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^t M$.
1. Donner un polynôme annulateur de φ de degré 2.
 2. En déduire les valeurs propres de φ .

p. 27

#VP13

5

Somme directe de sous-espaces propres

THÉORÈME

somme directe des espaces propres

Soit φ un endomorphisme d'un espace vectoriel E .

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ désignent p valeurs propres deux à deux distinctes de φ ,

alors la somme $\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(\varphi)$ est directe.

Preuve par récurrence

Preuve. Justifions par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(k) : \left| \begin{array}{l} \text{pour tout } (u_1, u_2, \dots, u_k) \in E_{\lambda_1}(\varphi) \times E_{\lambda_2}(\varphi) \times \dots \times E_{\lambda_k}(\varphi) \\ \sum_{j=1}^k u_j = 0_E \Rightarrow u_1 = \dots = u_k = 0_E. \end{array} \right.$$

→ **Initialisation.** La propriété $\mathcal{P}(1)$ est directement vraie.

→ **Hérédité.** Soit $k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket$ et supposons $\mathcal{P}(k)$. Soit $(u_1, u_2, \dots, u_{k+1}) \in E_{\lambda_1}(\varphi) \times E_{\lambda_2}(\varphi) \times \dots \times E_{\lambda_{k+1}}(\varphi)$ tels que

$$\sum_{j=1}^{k+1} u_j = 0_E \quad (L_1).$$

Par linéarité de φ , on obtient

$$\begin{aligned} 0_E = \varphi(0_E) &= \varphi\left(\sum_{j=1}^{k+1} u_j\right) = \sum_{j=1}^{k+1} \varphi(u_j) = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j u_j \\ &= \sum_{j=1}^k \lambda_j u_j + \lambda_{k+1} u_{k+1} \quad (L_2) \end{aligned}$$

On effectue ensuite $\lambda_{k+1} L_1 - L_2$ pour éliminer le terme en u_{k+1} et obtenir

$$\sum_{j=1}^k \underbrace{(\lambda_{k+1} - \lambda_j)}_{\in E_j(\varphi)} u_j = 0_E.$$

D'après $\mathcal{P}(k)$, on a

$$\forall j \in \llbracket 1; k \rrbracket, \quad (\lambda_{k+1} - \lambda_j) u_j = 0_E.$$

Par construction $\lambda_{k+1} \neq \lambda_j$, donc $u_j = 0_E$ pour tout $j \in \llbracket 1; k \rrbracket$. Puis en reprenant L_1 , $u_{k+1} = 0_E$. Dès lors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(k)$ l'est.

→ **Conclusion.** Pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie. En particulier, on obtient l'énoncé avec $\mathcal{P}(p)$. ■

Preuve les polynômes de Lagrange

Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ des réels deux à deux distincts, il existe p polynômes, notés L_i , tels que

$$\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 14



◆◆ **Existence des polynômes de Lagrange**

1. Prouver cet énoncé avec l'application linéaire

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_{p-1}[x] & \rightarrow \mathbb{R}^p \\ P & \rightarrow (P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_p)). \end{cases}$$

2. a) *Exemples*

p. 27

On suppose dans cette question uniquement que $p = 3$ et $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 1$. Préciser les trois polynômes de Lagrange.

b) Donner l'expression de L_i dans le cas général.

3. Justifier que pour tout $P \in \mathbb{R}_{p-1}[x]$, $P(x) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i) L_i$.

#VP14

Preuve. Soit $(u_1, u_2, \dots, u_p) \in E_{\lambda_1}(\varphi) \times E_{\lambda_2}(\varphi) \times \dots \times E_{\lambda_p}(\varphi)$ tel que

$$\sum_{j=1}^p u_j = 0_E \quad (\star)$$

Montrons que chaque u_j vaut 0_E pour justifier que la somme est directe.

Par définition des espaces propres, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\varphi(u_i) = \lambda_i u_i$.

Soient L_1, L_2, \dots, L_p , les polynômes de Lagrange associés à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ (distincts deux à deux). Soit $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$. Pour tout $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$, d'après le théorème précédent

$$L_i(\varphi)(u_j) = L_i(\lambda_j) u_j = \delta_{i,j} \cdot u_j.$$

Puis par linéarité de l'application $L_i(\varphi)$,

$$L_i(\varphi) \left(\sum_{j=1}^p u_j \right) = \sum_{j=1}^p L_i(\varphi)(u_j) = \sum_{j=1}^p \delta_{i,j} \cdot u_j = u_i.$$

Or, par application de l'endomorphisme $L_j(\varphi)$ sur chaque membre de l'égalité (\star) , on a aussi

$$L_i(\varphi) \left(\sum_{j=1}^p u_j \right) = L_i(\varphi)(0_E) = 0_E.$$

Il vient $u_i = 0_E$. Finalement, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $u_i = 0_E$. La somme $\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(\varphi)$ est directe. ■

COROLLAIRE

en dimension finie

Si on suppose de plus que E est de dimension finie, alors

$$\sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(\varphi)) \leq \dim(E).$$

Preuve. On sait que

$$\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(\varphi) \subset E \quad \text{puis} \quad \dim \left(\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(\varphi) \right) \leq \dim E.$$

Or la somme des sous-espaces propres est directe,

$$\sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(\varphi)) = \dim \left(\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(\varphi) \right).$$

Le résultat s'en déduit. ■

COROLLAIRE

famille libre de vecteurs propres

Soit φ un endomorphisme de E .

Si les vecteurs u_1, u_2, \dots, u_p sont des vecteurs propres de φ associés à des valeurs propres distinctes,
alors la famille (u_1, \dots, u_p) est une famille libre de E .

Preuve. Soient $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_p u_p = 0_E.$$

Pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\mu_i u_i \in E_{\lambda_i}(\varphi)$. Comme la somme $\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(\varphi)$ est directe, par définition,

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \mu_i u_i = 0_E.$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, u_i est un vecteur propre. Il est donc non nul et $\mu_i = 0$. Finalement, la famille (u_1, u_2, \dots, u_p) est libre. ■

COROLLAIRE

majoration du nombre de valeurs propres

Soit φ un endomorphisme de E de dimension finie. Alors le nombre de valeurs propres de φ est inférieur à la dimension de l'espace :

$$\text{Card}(\text{Sp}(\varphi)) \leq \dim(E).$$

Preuve. Si λ est valeur propre de φ , $\dim(E_\lambda(\varphi)) \geq 1$. On a donc la minoration

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi)} \dim(E_\lambda(\varphi)) \geq \sum_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi)} 1 = \text{Card}(\text{Sp}(\varphi)).$$

D'où le résultat d'après le corollaire précédent en dimension finie. ■

Remarque. Matriciellement, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\text{Card}(\text{Sp}(A)) \leq n.$$

On a vu, au début du cours, que 0, 1 et -2 sont trois valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

On peut donc en déduire qu'il n'y a pas d'autres valeurs propres. D'où l'égalité $\text{Sp}(A) = \{-2; 0; 1\}$.

6

Recherche de valeurs propres et vecteurs propres

Cette section détaille les différentes méthodes pour calculer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice. Elles sont essentiellement basées sur la méthode du pivot de Gauss.

6.1 Recherche des valeurs propres

Rappelons que :

- Le réel λ est valeur propre de A si et seulement si $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$.
- Le rang est invariant par transposition et opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

Exemple. On pose $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Procédons par opérations élémentaires pour se ramener à un système triangulaire.

$$\begin{aligned}
 \text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{bmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2 - \lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix} && L_3 \leftrightarrow L_1 \\
 &= \text{rg} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 - \lambda \\ 3 & -2 - \lambda & 0 \\ -\lambda & 2 & -1 \end{bmatrix} && \begin{array}{l} L_3 \leftarrow 2L_3 - \lambda L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + 3L_1 \end{array} \\
 &= \text{rg} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 - \lambda \\ 0 & 2 - 2\lambda & 3 - 3\lambda \\ 0 & 4 - 2\lambda & \lambda^2 - \lambda - 2 \end{bmatrix} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 / 2 \\ \text{(et factorisation)} \end{array} \\
 &= \text{rg} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 3 - 3\lambda \\ 0 & 2 - \lambda & (\lambda + 1)(\lambda - 2) \end{bmatrix} && L_2 \leftrightarrow L_3 \\
 &= \text{rg} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 - \lambda \\ 0 & 2 - \lambda & (\lambda + 1)(\lambda - 2) \\ 0 & 1 - \lambda & 3(1 - \lambda) \end{bmatrix} && C_2 \leftarrow 3C_2 - C_3 \\
 \text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{bmatrix} -2 & * & * \\ 0 & (-2 + \lambda)(\lambda + 4) & * \\ 0 & 0 & 3(1 - \lambda) \end{bmatrix} && \text{Il est inutile de calculer} \\
 &&& \text{les coefficients * .}
 \end{aligned}$$

Ainsi λ est valeur propre si et seulement si $\text{rg}(A - \lambda I_3) < 3$. C'est équivalent à

$$(\lambda - 2)(\lambda + 4) = 0 \quad \text{ou} \quad 3(1 - \lambda) = 0.$$

Finalement

$$\text{Sp}(A) = \{-4; 1; 2\}.$$

Remarques.

- Noter bien l'échange $L_3 \leftrightarrow L_1$ au début du pivot de Gauss. C'est particulièrement utile pour avoir un pivot qui ne dépend pas de λ .
- Si on dispose d'un polynôme annulateur de petit degré, on peut se limiter à regarder le rang sur les quelques racines du polynôme pour déterminer les valeurs propres.

6.2 Recherche des vecteurs propres

Expliquons maintenant comment calculer les vecteurs propres de la matrice A connaissant les valeurs propres.

- Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Raisonnons par équivalences.

$$\begin{aligned}
 X \in E_1(A) &\iff \\
 AX = X &\iff \begin{cases} 2y - z = x \\ 3x - 2y = y \\ -2x + 2y + z = z \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \quad L_3 = -2L_2 \\
 &\iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases} \\
 &\iff X = \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \iff X \in \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Finalement

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Déterminons les autres sous-espaces propres.

• Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = 2X \iff \begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = 4y \\ z = 2(y - x) \end{cases} \iff X = \begin{bmatrix} x \\ 3x/4 \\ -x/2 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 3/4 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

Donc $E_2 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3/4 \\ -1/2 \end{bmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$.

• Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = -4X \iff \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ -2x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

On trouve $E_{-4} = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$.

Exercice 15



♦ Soient $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ et $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. On admet que $P(A) = 0_3$.

1. \mathcal{Q} Donner les racines de P . Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de A ?
2. Déterminer les valeurs propres de A et, pour chaque valeur propre, déterminer une base du sous-espace propre associé.

p. 27

#VP15

» Pour un autre exemple de calcul, voir 30, p. 18.

6.3 Cas particulier de la dimension 2

PROPOSITION

lien avec le déterminant

Soient $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \iff \det(A - \lambda I_2) = 0.$$

Preuve. Raisonnons par équivalence

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(A) &\iff A - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \det(A - \lambda I_2) = 0. \end{aligned}$$

Exercice 16



♦ Donner, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, le nombre de valeurs propres réelles de

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

p. 28

#VP16



Exercices



Révisions, puissances et polynômes de matrices et d'endomorphismes

Exercice 17. ♦♦ ♣ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et d_1, \dots, d_n , n réels deux à deux distincts. Posons

VP17

$$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n).$$

Montrer que la famille $(D^k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket}$ est une base de l'espace vectoriel \mathcal{D}_n des matrices diagonales.

>> Solution p. 28

Exercice 18. ♦♦ Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ dont un polynôme annulateur a pour expression $P(x) = x^2 + x - 2$.

VP18

- Justifier que φ est un isomorphisme et exprimer φ^{-1} en fonction de φ et id_E .
- ♣ Démontrer l'existence de deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi^n = a_n \varphi + b_n \text{id}_E.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Énoncer la division euclidienne du polynôme x^n par $x^2 + x - 2$. Retrouver le résultat de la question précédente.

>> Solution p. 28

Exercice 19. ♦ Posons $\varphi : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (y + z, x + z, x + y) \in \mathbb{R}^3$.

VP19

- Écrire la matrice B de φ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
- Montrer que le polynôme défini par $P(x) = x^2 - x - 2$ annule B .
 - En déduire que la matrice B est inversible et calculer B^{-1} .
- Justifier la bijectivité de φ et expliciter l'application φ^{-1} à l'aide de B .

>> Solution p. 29

Exercice 20. ♦♦♦ Vecteur cyclique et polynôme annulateur

VP20

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et φ un endomorphisme de E .

On dit qu'un vecteur $u \in E$ est cyclique pour φ s'il existe $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille $\mathcal{B}_{u, \ell} = (u, \varphi(u), \dots, \varphi^{\ell-1}(u))$ soit génératrice de E .

- ♣ Soit u , un vecteur cyclique pour φ . Montrer que $\mathcal{B}_{u, n}$ est une base de E .
- Justifier qu'il existe n réels notés $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que $\varphi^n(u) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^i(u)$.
- Justifier que le polynôme d'expression $P(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ est annulateur de φ .

>> Solution p. 29

Exercice 21. ♦ ♣ Soient φ, ψ deux endomorphismes nilpotents de E .

VP21

Montrer que si φ, ψ commutent, alors la somme $\varphi + \psi$ est nilpotente.

Un endomorphisme φ est dit nilpotent s'il existe un entier p tel que $\varphi^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (composée p -ième).

>> Solution p. 30

Exercice 22. ♦♦ Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E , admettant un polynôme annulateur de degré m . On note # VP22

$$G = \text{Vect}((f^i)_{i \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket}).$$

- Vérifier que pour tout entier $k \geq m$, $f^k \in G$.
- Soient $(g, h) \in G^2$. Montrer que $g \circ h \in G$. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g^k \in G$.
- Montrer que g admet un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à m .

>> Solution p. 30

Exercice 23. ♦♦

d'après EDHEC 2016 # VP23

- Dans cette question, f est un endomorphisme de \mathbb{R}^n qui vérifie $f \circ (f - \text{id})^2 = 0$, où id est l'endomorphisme identité de \mathbb{R}^n .
 - Déterminer $(f - \text{id})^2 + f \circ (2 \text{id} - f)$.
 - En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x = (f - \text{id})^2(x) + (f \circ (2 \text{id} - f))(x)$.
 - Utiliser ce dernier résultat pour établir que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
- Dans cette question, f est un endomorphisme de \mathbb{R}^n et P est un polynôme annulateur de f , dont le degré est égal à p (avec $p \geq 2$), et tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
 - Montrer qu'il existe p réels a_1, \dots, a_p avec $a_1 \neq 0$, tels que $P(x) = a_1 x + \dots + a_p x^p$.
 - En déduire que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$, puis établir que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
 - En quoi cette question est-elle une généralisation de la première question?

>> Solution p. 31

Exercice 24. ♦♦♦ ♦  **Commutant d'un endomorphisme cyclique, matrice compagnon**

VP24

Soit φ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n . On note $\mathcal{C}(\varphi)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec φ et $\mathbb{R}(\varphi)$ l'ensemble des polynômes en φ . Dit autrement

$$\mathcal{C}(\varphi) = \{\psi \in \mathcal{L}(E) \mid \psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi\} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}(\varphi) = \{P(\varphi) \mid P \in \mathbb{R}[x]\}.$$

Enfin, on dit qu'un endomorphisme h de E est cyclique s'il existe un vecteur $u_0 \in E$ tel que la famille $(u_0, h(u_0), \dots, h^{n-1}(u_0))$ soit une base de E .

- Montrer que $\mathcal{C}(\varphi)$ et $\mathbb{R}(\varphi)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$, puis que $\mathbb{R}(\varphi) \subset \mathcal{C}(\varphi)$.
- Montrer que φ est cyclique si et seulement si il existe une base \mathcal{B} de E et des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ tels que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Pour les questions suivantes, on suppose que l'endomorphisme φ est cyclique, et on fixe un vecteur $u_0 \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = (u_0, \varphi(u_0), \dots, \varphi^{n-1}(u_0))$ soit une base de E .

- Soit $P(\varphi) = \varphi^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \varphi^k$. Montrer que $P(\varphi) = 0$.
Indication : remarquer que $P(\varphi)(u_0) = 0$, puis montrer que $P(\varphi)(\varphi^\ell(u_0)) = 0$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$.
- Montrer que la famille $(\text{id}_E, \varphi, \dots, \varphi^{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}(\varphi)$.
Indication : utiliser la division euclidienne.
 - En déduire que $\mathcal{C}(\varphi) = \mathbb{R}(\varphi)$, puis la dimension du commutant $\mathcal{C}(\varphi)$.
Indication : si $f \in \mathcal{C}(\varphi)$, exprimer $f(u_0)$ dans la base \mathcal{B} , puis calculer $f(\varphi^i(u_0))$ pour $i \in \mathbb{N}$.

>> Solution p. 31

Valeurs propres, vecteurs propres

Exercice 25. ♦ Expliquez l'intérêt de la fonction Python suivante.

VP25

>> Solution p. 33

Editeur

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

def bidule(A,x) : # A est une matrice carrée et x, un réel
    [n,p]=np.shape(A)
    if n!=p :
        print('Non, la matrice n est pas carrée ...')
    elif np.linalg.matrix_rank(A-x*np.eye(n))<n :
        print('Oui !')
    else :
        print('Non !')
```

Exercice 26. ♦ Vrai ou faux?

VP26

1. S'il existe une matrice carrée J telle que $A = J^2$ alors $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$. ✓ ×
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Si $\lambda \in \text{Sp}(A^2)$ alors $\sqrt{\lambda} \in \text{Sp}(A)$ ou $-\sqrt{\lambda} \in \text{Sp}(A)$. ✓ ×

>> Solution p. 33

Exercice 27. ✦ 📄 **Un exemple détaillé : la matrice Attila**

VP27

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Notons $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1 et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. a) Préciser le rang de J . En déduire que 0 est valeur propre dont on précisera la dimension de l'espace propre associé. Préciser une base \mathcal{C} de l'espace propre associé à la valeur propre 0.
b) Calculer JX . Que peut-on en déduire?
2. En déduire que J ne possède que deux valeurs propres.
3. Montrer que J est semblable à une matrice diagonale dont on précisera les coefficients diagonaux.
4. Conclure en donnant tous les polynômes annulateur de J .

>> Solution p. 33

Exercice 28. ✦ 📄 **Transformation affine et spectre**

VP28

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. Pour tous $a, b \in \mathbb{N}$, on pose

$$M(a, b) = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{bmatrix}.$$

1. 🐞 Exprimer $M(a, b)$ à l'aide de I_n et J . En déduire le lien entre le spectre de J et celui de $M(a, b)$.
2. On a vu à l'exercice ?? qu'il y a exactement 105 matrices non inversibles lorsque $a, b \in \llbracket -50; 50 \rrbracket$ et $n = 25$. Retrouver ce résultat sachant que J admet deux valeurs propres 0 et n (voir exercice précédent).

>> Solution p. 34

Exercice 29. ✦ 📄 Soit φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) par

VP29

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = 6e_1 - 4e_2 + 4e_3 \\ \varphi(e_2) = e_1 + 2e_2 + 2e_3 \\ \varphi(e_3) = -e_1 + 2e_2 + 2e_3. \end{cases}$$

Déterminer le sous-espace propre de φ associé à la valeur propre 4.

>> Solution p. 34

Exercice 30. ✦ 📄

D'après EDHEC 2019 # VP30

On note id l'endomorphisme identité de \mathbb{R}^3 et on considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.
b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).
c) En Python, la commande `linalg.matrix_rank(M)` de la bibliothèque `numpy` renvoie le rang de la matrice M . On a saisi

Éditeur

```
import numpy as np
A = np.array([[1, 0, 0], [-2, 3, -2], [-1, 1, 0]])
r1=np.linalg.matrix_rank(A-np.eye(3))
r2=np.linalg.matrix_rank(A-2*np.eye(3))
print('r1=',r1, 'r2=',r2)
```

Python a répondu

Console

```
>>> # script executed
r1= 1 r2= 2
```


Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et à la dimension des sous-espaces propres associés?

- d) Donner une base de chacun des noyaux $\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id})$ et $\text{Ker}(f - \lambda_2 \text{id})$. En déduire qu'il existe une base \mathcal{B} dans laquelle la matrice de f est diagonale.
2. a) Justifier qu'il existe une base (u_1, v_1, v_2) de \mathbb{R}^3 , où (u_1, v_1) est une base de $\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id})$ et (v_2) une base de $\text{Ker}(f - \lambda_2 \text{id})$. On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de u_1 et la première de v_1 étant nulles.
- b) On note $x = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de \mathbb{R}^3 . Déterminer, en fonction de a, b et c les coordonnées de x dans la base (u_1, v_1, v_2) .

Exercice 31. ♦  **Matrices stochastiques**

VP31

Une matrice carrée $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est dite stochastique si elle vérifie les deux conditions :

- i) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$.
- ii) Tous les coefficients de la matrice P sont positifs.
1.  Traduire la condition i) en terme de vecteur propre.
On pourra poser $X = {}^t(1, \dots, 1)$.
2. Montrer que l'ensemble \mathcal{E} des matrices stochastiques est une partie convexe stable par produit.
Une partie A est convexe si pour tous $a, b \in A$, tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda a + (1 - \lambda) b \in A$.
Une partie A est stable par produit si pour tous $a, b \in A$, $ab \in A$.
3. Démontrer que les valeurs propres réelles d'une matrice stochastique sont comprises entre -1 et 1 .

>> Pour aller plus loin, on pourra consulter le sujet EM Lyon 2010 ECS, problème I.

>> Solution p. 35

Exercice 32. ♦ **Projecteurs et vecteurs propres**

D'après Ecricome 2018 # VP32

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose dans cette partie uniquement que $n = 2$ et que les matrices de u et v dans la base canonique sont respectivement :

$$A = \frac{1}{1+a^2} \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$


1. Vérifier que u et v sont des projecteurs.
2. a) Vérifier que les endomorphismes u, v et $u \circ v$ sont tous de rang 1.
b) Vérifier que le vecteur $x_0 = (1, a)$ est un vecteur propre de $u \circ v$.
c) Déterminer le spectre de $u \circ v$.
3. a) Montrer que les valeurs propres de $u \circ v$ appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$.
b) Pour quelle(s) valeur(s) de a , $u \circ v$ est-il un projecteur?

>> Solution p. 35

Exercice 33. ♦  **Crochet de Lie et nilpotence**


VP33

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$.

1.  Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^k B - BA^k = kA^k$.
2. On considère

$$\varphi_B : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto MB - BM. \end{cases}$$




Vérifier que φ_B est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Traduire la question 1 en terme de vecteur propre et valeur propre.
4.  En déduire l'existence d'un entier k non nul tel que $A^k = 0_n$.

>> Solution p. 36

Exercice 34. ♦♦  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note φ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par $\varphi(P) = (x-1)P'(x)$.

VP34

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$. Préciser sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
2.  En déduire le spectre de φ .
3. Soit P un vecteur propre de φ associé à une valeur propre λ non nulle.
a)  Justifier que 1 est une racine de P .
b)  En étudiant la multiplicité de 1 en tant que racine de P , exprimer P en fonction de λ .
4. Conclure en donnant tous les espaces propres de φ .

>> Solution p. 37

Exercice 35. ♦♦ Polynôme annulateur minimal

Questions sans préparation HEC 2015 # VP35

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. Établir l'existence d'un polynôme P non nul tel que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. Soit Q un polynôme tel que $Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et de degré minimal parmi les polynômes non nuls tels que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Montrer que toute racine de Q est valeur propre de f.

>> Solution p. 37

Exercice 36. ♦♦ Soient A, B ∈ M_n(ℝ) et λ ∈ ℝ.

VP36

Montrer que λ est valeur propre de AB si et seulement si λ est valeur propre de BA.

>> Solution p. 37

Exercice 37. ♦♦ Soient E un espace vectoriel et φ, ψ deux endomorphismes de E.

VP37

1. Montrer que

$$\text{Sp}(\varphi \circ \psi) \cup \{0\} = \text{Sp}(\psi \circ \varphi) \cup \{0\}.$$

2. Vérifier que si E est dimension finie, on a directement l'égalité

$$\text{Sp}(\varphi \circ \psi) = \text{Sp}(\psi \circ \varphi).$$

3. En considérant $\varphi : P \in \mathbb{R}[x] \mapsto P' \in \mathbb{R}[x]$ et $\psi : P \in \mathbb{R}[x] \mapsto \int_0^x P(t) dt$, tester si l'égalité précédente est encore vérifiée en dimension infinie.

>> Solution p. 38

Exercice 38. ♦♦ Exemple d'une matrice de rang 2

d'après ESCP 2001 # VP38

Soient n un entier naturel tel que n ≥ 3 et A ∈ M_n(ℝ) définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

et φ l'endomorphisme associé à A sur la base canonique de ℝⁿ.

1. Déterminer une base du noyau de φ et une base de l'image de φ.
2. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

>> Solution p. 38

Exercice 39. ♦♦♦ Matrice à diagonale dominante, localisation des valeurs propres réelles

VP39

Une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est dite à diagonale dominante si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$|a_{i,i}| > |a_{i,1}| + \cdots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \cdots + |a_{i,n}|.$$

1. Montrer qu'une matrice à diagonale dominante est inversible.
Indication. On pourra s'intéresser au noyau de la matrice.

2. Soit $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\text{Sp}(B) \subset \bigcup_{i=1}^n [b_{ii} - r_i, b_{ii} + r_i] \quad \text{où} \quad r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |b_{i,j}|.$$

3. Exemple d'une matrice tridiagonale

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et A la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Montrer que si λ est une valeur propre réelle de A, alors il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\lambda = 2 \cos(\theta)$.

Exercice 40. ◆◆◆ 

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM$.

D'après Orléans HEC 2018 #VP40


- Démontrer que A et φ_A ont le même spectre.
- Justifier que pour toute valeur propre λ commune, $\dim E_\lambda(\varphi_A) = n \dim E_\lambda(A)$.

>> Solution p. 39

Exercice 41. ◆◆◆ On considère les deux matrices

Question sans préparation, HEC 2018 #VP41

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Comparer leurs spectres, leurs traces, leurs rangs, ainsi que les dimensions de leurs sous-espaces propres.
-  Sont-elles semblables?

>> Solution p. 39

Sujet(s) de concours

Exercice 42. ◆◆  **Exemple dans un espace fonctionnel**

D'après EMLyon 2014 ECS #VP42

On note E l'espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} continues, E_1 le sous-espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^1 . On note, pour tout élément f de E , $T(f)$ l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt.$$

- Établir que, pour tout élément f de E , $T(f)$ appartient à E_1 et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(T(f))'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)).$$

On note $T : E \rightarrow E$ l'application qui, à f , associe $T(f)$.

- Montrer que T est un endomorphisme de E . Est-il surjectif?
- Soit $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $s(t) = \sin(\pi t)$. Calculer $T(s)$. Est-ce que T est injectif?
- Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{e^t - e^{-t}}{2t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose de plus $f_a : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ax} \in \mathbb{R}$. Vérifier que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $T(f_a) = \varphi(a) f_a$.

- Justifier que $[1; +\infty[\subset \text{Sp}(T)$. À-t-on égalité?

>> Solution p. 40

Exercice 43. ◆◆◆ **Autour des matrices stochastiques**

D'après HEC 1993, partie III #VP43

On se propose d'étudier l'ensemble \mathcal{S}_n des matrices stochastiques d'ordre n , c'est-à-dire des éléments $M = (m_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont réels positifs ou nuls et tels que, pour tout nombre entier i appartenant à $[1, n]$:

$$m_{i1} + m_{i2} + \dots + m_{in} = 1.$$

(Ces matrices jouent un rôle important, notamment en calcul des probabilités.) Dans la suite, \mathcal{B} désigne la base canonique de \mathbb{R}^n et on note v le vecteur de \mathbb{R}^n dont les composantes dans la base \mathcal{B} sont toutes égales à 1.

Partie A : un exemple

Dans cette partie, on suppose que n est un entier supérieur à 3. On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^n dont la matrice dans la base \mathcal{B} est la matrice stochastique :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau de $f - \text{id}$.
2. Montrer que $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_n)$ est une famille libre d'éléments de l'image de $f - \text{id}$, puis établir que c'en est une base.
3. Établir que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f - \text{id}) \oplus \text{Im}(f - \text{id})$.
4. Soit p le projecteur sur le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(f - \text{id})$ parallèlement à $\text{Im}(f - \text{id})$. Déterminer $p(v)$, puis $p(e_1), p(e_2), \dots, p(e_n)$. Expliciter la matrice P associée à p dans la base \mathcal{B} .
5. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés. L'endomorphisme f est-il diagonalisable?
6. Exprimer M comme combinaison linéaire de P et Q .
7. Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices. Notons $a_{i,j}^{(k)}$ le coefficient de A_k en position (i, j) . On dit que $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice $A = (a_{i,j})$ si, pour tout couple d'indices (i, j) , la suite de réels $(a_{i,j}^{(k)})_k$ converge vers $a_{i,j}$.
Déduire, de la question précédente, l'expression de la matrice M^k , ainsi que sa limite lorsque k tend vers $+\infty$ en fonction des matrices P et Q . Exprimer de même l'inverse de M en fonction de P et Q .

Partie B : cas général

1. Soit V la matrice colonne d'ordre n dont les coefficients sont tous égaux à 1.
 - a) Montrer qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients réels positifs ou nuls est stochastique si et seulement si $MV = V$.
 - b) En déduire que, pour tout couple (A, B) d'éléments de \mathcal{S}_n , le produit AB appartient encore à \mathcal{S}_n , de même que les puissances positives de A et B .
2. Soient E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E dont le noyau n'est pas réduit au vecteur nul. Soit (e_1, e_2, \dots, e_r) une base de $\text{Ker}(u)$, que l'on complète en une base (e_1, e_2, \dots, e_n) de E . Établir que $(u(e_{r+1}), u(e_{r+2}), \dots, u(e_n))$ est une base de $\text{Im}(u)$. Retrouver la formule du rang :

$$\dim \text{Im}(u) + \dim \text{Ker}(u) = n.$$

Dans la suite, on désigne par f un endomorphisme de \mathbb{R}^n dont la matrice $M = (m_{ij})$ dans la base canonique \mathcal{B} est stochastique. Pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de \mathbb{R}^n , on convient de noter :

$$\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}.$$

3.
 - a) Établir que, pour tout élément x de \mathbb{R}^n , $\|f(x)\| \leq \|x\|$.
 - b) En déduire que toutes les valeurs propres de f sont comprises dans $[-1; 1]$. Montrer que 1 est valeur propre de f .
4.
 - a) Soit y un élément de $\text{Im}(f - \text{id}) \cap \text{Ker}(f - \text{id})$, écrit sous la forme $f(x) - x$. Pour tout nombre entier naturel non nul k , exprimer $f^k(x)$ en fonction de k , x et y . Déduire du 3. a) que $k\|y\| \leq 2\|x\|$, puis prouver que y est nul.
 - b) Déduire des questions précédentes que $\text{Ker}(f - \text{id}) \oplus \text{Im}(f - \text{Id}) = \mathbb{R}^n$.
 - c) Montrer que, pour tout élément x de $\text{Im}(f - \text{id})$, $f(x)$ appartient à $\text{Im}(f - \text{id})$. Établir que tout sous-espace propre de f associé à une valeur propre autre que 1 est inclus dans $\text{Im}(f - \text{id})$.

>> Solution p. ??



Indications et solutions



🔍 Indication de l'exercice 1 p. 2

1. Que dire de la liberté de la famille si $p > \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

🔍 Indication de l'exercice 3 p. 3

1. Si $A = Q^{-1}BQ$, montrer que pour $P \in \mathbb{R}[x]$, $P(A) = Q^{-1}P(B)Q$.
 2. Écrire $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Isoler I_n dans $P(A) = 0_n$ pour déterminer $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$.

🔍 Indication de l'exercice 4 p. 5

Si $A = P^{-1}BP$ alors montrer que $X \in E_\lambda(A)$ si et seulement si $PX \in E_\lambda(B)$.

🔍 Indication de l'exercice 5 p. 5

1. Vrai, 2. Faux, 3. Vrai, 4. Faux, 5. Vrai.

🔍 Indication de l'exercice 6 p. 5

1. Calculer AX où $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est la matrice constituée de 1.
 2. Pensez à la transposée.

🔍 Indication de l'exercice 7 p. 6

1. Montrer que 2 est la seule valeur propre de φ .
 2. Calculer $\psi(f_\lambda)$ où $f_\lambda : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\lambda x}$.

🔍 Indication de l'exercice 14 p. 12

1. L'application φ est un isomorphisme. Pour le prouver, commencer par montrer que $\text{Ker } \varphi = \{0\}$.

🔍 Indication de l'exercice 15 p. 15

1. Vérifier que 1 est une racine évidente. Factoriser ensuite par $(x-1)$.

🔍 Indication de l'exercice 17 p. 16

Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k D^k = 0_n.$$

Que dire de $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ défini par $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k x^k$?

🔍 Indication de l'exercice 20 p. 16

Prouver par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(k) : \mathcal{B}_{u,k} \text{ est libre}$$

est vraie pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

🔍 Indication de l'exercice 21 p. 16

Justifier qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\varphi^n = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad \psi^n = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Calculer ensuite $(\varphi + \psi)^{2n}$.

🔍 Indication de l'exercice 28 p. 18

1. Exprimer $M(a, b)$ avec a, b, J et I_n . En déduire que

$$\lambda \in \text{Sp}(J) \iff (b-a)\lambda + b \in \text{Sp}(M(a, b)).$$

🔍 Indication de l'exercice 31 p. 19

1. Calculer PX .

🔍 Indication de l'exercice 33 p. 19

1. Procéder par récurrence sur la propriété

$$\mathcal{P}(k) : A^k B - B A^k = k A^k.$$

4. En dimension finie, tout endomorphisme a un nombre fini de valeurs propres.

🔍 Indication de l'exercice 34 p. 19

2. La matrice de φ dans la base canonique est triangulaire. Le spectre se lit sur la diagonale.

3.a) Évaluer en 1 la relation $\varphi(P) = \lambda P$.

3.b) Chercher P sous la forme $P(x) = (x-1)^m Q(x)$.

🔍 Indication de l'exercice 35 p. 20

1. Étudier la liberté de la famille $(\text{id}_E, \varphi, \dots, \varphi^p)$ pour un entier p bien choisi.

2. Raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $Q(\alpha) = 0$ et $\alpha \notin \text{Sp}(f)$. Introduire ensuite \tilde{Q} par $\tilde{Q}(x)(x-\alpha) = Q(x)$.

🔍 Indication de l'exercice 41 p. 21

2. Non. Calculer A^2 et B^2 .

Exercice 1 p. 2

VP1

On sait que $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$.

Or, la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ contient $n^2 + 1$ éléments. La famille est donc liée. Dit autrement, il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k A^k = 0_n \quad \text{et} \quad (\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}) \neq (0, \dots, 0).$$

On constate que le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k x^k$ est un polynôme annulateur non nul de A . Résumons :

Toute matrice admet un polynôme annulateur non nul.

Remarque. Le raisonnement précédent permet aussi de justifier que tout endomorphisme de dimension finie admet un polynôme annulateur. Par contre, c'est faux en dimension infinie. On montre que $\varphi : P \in \mathbb{R}[x] \mapsto P' \in \mathbb{R}[x]$ n'admet pas de polynôme annulateur.

Exercice 2

p. 2

VP2

1. Si $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on sait que

$$\deg P' \leq \deg P - 1.$$

Par récurrence immédiate,

$$\varphi^{n+1}(P) = P^{(n+1)} = 0_{\mathbb{R}[x]}.$$

C'est-à-dire $\varphi^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[x])}$.

Un polynôme annulateur de φ est donné par le monôme

$$x^{n+1}.$$

2. Vérifier que $(x-1)^{n+1}$ convient.

Exercice 3

p. 3

VP3

1. Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible telle que $A = QBQ^{-1}$. Par récurrence, on prouve

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k = QB^kQ^{-1}.$$

Puis, par linéarité, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$

$$P(A) = QP(B)Q^{-1}.$$

Ensuite, Q étant inversible

$$P(A) = 0_n \iff P(B) = 0_n.$$

Les matrices A et B ont le même polynôme annulateur.

2. Posons $P(x) = \sum_{i=0}^p a_i x^i$. La condition $P(0) \neq 0$ donne $a_0 \neq 0$. Comme P est annulateur

$$\begin{aligned} 0_n = P(A) &= \sum_{i=0}^p a_i A^i = a_0 A^0 + \sum_{i=1}^p a_i A^i \\ &= a_0 I_n + A \left(\sum_{i=1}^p a_i A^{i-1} \right) \\ &= a_0 I_n + A \left(\sum_{k=0}^{p-1} a_{k+1} A^k \right). \end{aligned}$$

Puis $A \left(-\frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{p-1} a_{k+1} A^k \right) = \left(-\frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{p-1} a_{k+1} A^k \right) A = I_n.$

Par définition de l'inversibilité,

La matrice A est inversible.

Exercice 4

p. 5

VP4

• Posons $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible telle que $A = P^{-1}BP$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X \in E_\lambda(A) &\iff AX = \lambda X \\ &\iff P^{-1}BPX = \lambda X \\ &\iff B(PX) = \lambda(PX) \\ &\iff PX \in E_\lambda(B) \end{aligned}$$

L'application suivante est alors bien définie :

$$\Phi : \begin{cases} E_\lambda(A) &\rightarrow E_\lambda(B) \\ X &\mapsto PX. \end{cases}$$

Or, on vérifie que cette application est linéaire et même bijective avec pour application réciproque :

$$\Phi^{-1} : \begin{cases} E_\lambda(B) &\rightarrow E_\lambda(A) \\ X &\mapsto P^{-1}X. \end{cases}$$

En particulier, les dimensions de l'espace de départ et d'arrivée coïncident

$$\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(B).$$

• Puis, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(A) &\iff \dim E_\lambda(A) \geq 1 \\ &\iff \dim E_\lambda(B) \geq 1 \\ &\iff \lambda \in \text{Sp}(B). \end{aligned}$$

C'est-à-dire $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B)$.

Exercice 5

p. 5

VP5

1. Vrai.

Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$, il existe donc $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AX = \lambda X$. D'où

$$A^2 X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X.$$

Comme $X \neq 0_{n,1}$, X est vecteur propre de A^2 pour la valeur propre λ^2 . On a bien $\lambda^2 \in \text{Sp}(A^2)$.

2. Faux.

On a bien $(-1)^2 = 1 \in \text{Sp}(I_n^2)$ mais $-1 \notin \text{Sp}(I_n)$.

3. Vrai.

Raisonnons par équivalence. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(A) &\iff A - \lambda I_n \text{ est non inversible} \\ &\iff {}^t(A - \lambda I_n) \text{ est non inversible} \\ &\iff {}^t A - \lambda I_n \text{ est non inversible} \\ &\iff \lambda \in \text{Sp}({}^t A). \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Sp}(A) = \text{Sp}({}^t A)$.

4. Faux.

Vérifier que la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

pour la valeur propre 0 donne un contre-exemple.

5. Vrai.

Le rang est invariant par transposition donc

$$\text{rg}(A - \lambda I_n) = \text{rg}({}^t A - \lambda I_n).$$

Par la formule du rang

$$\dim \text{Ker}(A - \lambda I_n) = \dim \text{Ker}({}^t A - \lambda I_n).$$

C'est-à-dire $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda({}^t A)$.

6. Vrai.

Nous avons précédemment vu que si A est inversible, 0 ne peut être valeur propre.

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(A) &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \quad AX = \lambda X \\ &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \quad \lambda^{-1}X = A^{-1}X \end{aligned}$$

en multipliant par $\frac{1}{\lambda}A^{-1}$. Finalement

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \iff \lambda^{-1} \in \text{Sp}(A^{-1}).$$

Exercice 6

p. 5

VP6

1. Posons X la matrice colonne constituée de n "1"

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

La condition sur A donne

$$AX = X \quad (\text{avec } X \neq 0_{n,1}).$$

Donc $1 \in \text{Sp}(A)$.

2. On a maintenant ${}^t AX = X$, puis, en reprenant l'exercice précédent (question 3),

$$1 \in \text{Sp}({}^t A) = \text{Sp}(A).$$

Exercice 7

p. 6

VP7

1. Supposons que φ admet une valeur propre λ . Soit P un vecteur propre.

$$\varphi(P) = \lambda P \quad \text{et} \quad P \neq 0_{\mathbb{R}_n[x]}.$$

D'où $P' + 2P = \lambda P$ et $P' = (\lambda - 2)P$. Le cas $\lambda \neq 2$ est impossible pour des questions de degré des polynômes :

$$\deg P' < \deg P.$$

Donc $\lambda = 2$ et les polynômes constants sont solutions. En résumé

$$\text{Sp}(\varphi) = \{2\}.$$

2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, posons $f_\lambda : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\lambda x} \in \mathbb{R}$. On a

$$\Psi(f_\lambda) = \lambda f_\lambda \quad \text{et} \quad f_\lambda \neq 0.$$

Tout réel est valeur propre de Ψ .

Exercice 8

p. 8

VP8

Donnons une preuve dans le cas de la dimension finie. Pour le cas général, voir exercice 9, p.8.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Par hypothèse sur l'application φ , il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \varphi(e_i) = \lambda_i e_i.$$

De plus, pour $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ fixés, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\varphi(e_i + e_j) = \mu(e_i + e_j) = \mu e_i + \mu e_j.$$

Or par linéarité de φ , on a aussi

$$\varphi(e_i + e_j) = \varphi(e_i) + \varphi(e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j.$$

D'où l'égalité

$$\mu e_i + \mu e_j = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j$$

Puis $(\mu - \lambda_i)e_i + (\mu - \lambda_j)e_j = 0_E$.

La famille \mathcal{B} étant une base de E, (e_i, e_j) est une famille libre

$$\mu - \lambda_i = 0, \quad \mu - \lambda_j = 0 \quad \text{d'où} \quad \lambda_i = \lambda_j.$$

On démontre ainsi que λ_i est indépendant de i , soit λ cette valeur commune.

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \varphi(e_i) = \lambda e_i.$$

Comme cette égalité est vraie sur une base de E et φ est linéaire, on a bien

$$\varphi = \lambda \text{id}_E.$$

Précisons que $\lambda \neq 0$ car φ n'est pas l'application nulle.

Exercice 9

p. 8

VP9

1. • Justifions l'égalité sur le noyau. Soit $u = u_F + u_G \in E$ avec $(u_F, u_G) \in F \times G$. On a les équivalences :

$$u \in \text{Ker}(p) \iff p(u) = 0_E \iff u_F = 0_E \iff u = u_G \iff u \in G.$$

Ainsi, $G = \text{Ker}(p)$.

• Justifions l'égalité sur l'image par double inclusion. Soit $v \in \text{Im}(p)$. Il existe $u \in E$ tel que $p(u) = v$. Notons $u = u_F + u_G$ avec $u_F \in F, u_G \in G$. Or, $p(u) = u_F \in F$, donc $v \in F$. Réciproquement, soit $v \in F$. On a $p(v) = v$, donc $v \in \text{Im}(p)$. Enfin, $F = \text{Im}(p)$.

• Finalement, l'égalité $F \oplus G = E$ donne

$$\text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p) = E.$$

Remarque. On aurait pu procéder par analyse-synthèse à partir de la relation :

$$x = \underbrace{(x - p(x))}_{\in \text{Ker } p} + \underbrace{p(x)}_{\in \text{Im } p}.$$

2. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G . Montrons que $q = \text{id}_E - p$ est le projecteur sur G parallèlement à F . L'application q est linéaire et comme id_E et p commutent,
- $$q^2 = (\text{id}_E - p)^2 = \text{id}_E^2 - 2p \circ \text{id}_E + p^2 = \text{id}_E - 2p + p = \text{id}_E - p = q.$$

Soit $u \in E$.

$u \in F$ si et seulement si $p(u) = u$, c'est-à-dire $q(u) = u - p(u) = u - u = 0_E$.

$u \in G$ si et seulement si $p(u) = 0_E$, c'est-à-dire $q(u) = u - p(u) = u$.

Par suite, $\text{Im}(q) = G$ et $\text{Ker}(q) = F$.

Exercice 10

p. 9

VP10

1. On vérifie que p_a est bien une application linéaire. Vérifions que $p_a \circ p_a = p_a$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} & (p_a \circ p_a)(x, y) \\ &= \frac{1}{1+a^2} p_a(x+ay, ax+a^2y) \\ &= \frac{1}{1+a^2} (x+ay+a(ax+a^2y), a(x+ay)+a^2(ax+a^2y)) \\ &= \frac{1}{1+a^2} ((1+a^2)x+(1+a^2)ay, (1+a^2)(ax+a^2y)) \\ &= (x+ay, ax+a^2y) = p_a(x, y). \end{aligned}$$

En conclusion, p_a est un projecteur.

Comme $q = p_1$, q est aussi un projecteur.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculons :

$$\begin{aligned} & (p_a \circ q)(1, a) \\ &= p_a(q(1, a)) = \frac{1}{2} p_a(1+a, 1+a) \\ &= \frac{1}{2(1+a^2)} (1+a+a(1+a), a(1+a)+a^2(1+a)) \\ &= \frac{1}{2(1+a^2)} (1+2a+a^2, a(1+2a+a^2)) \\ &= \frac{1}{2(1+a^2)} ((1+a)^2, (1+a)^2 a) \\ &= \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} (1, a) \quad \text{donc } \lambda = \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}. \end{aligned}$$

3. Si $p_a \circ q$ est un projecteur, on sait que

$$\lambda = \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} \in \{0; 1\}.$$

Le cas $\lambda = 0$ est impossible puisqu'on se limite à a positif. Pour le second cas,

$$\begin{aligned} \lambda = 1 & \iff \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} = 1 \iff (1+a)^2 = 2(1+a^2) \\ & \iff 0 = 1 - 2a + a^2 \iff 0 = (1-a)^2. \end{aligned}$$

On constate que seul $a = 1$ est un candidat.

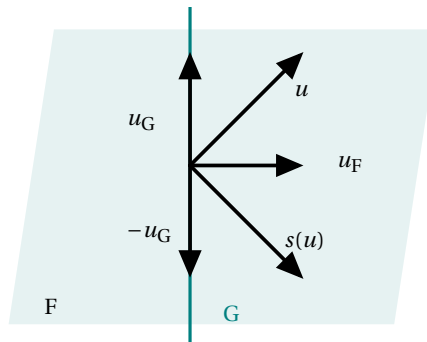
Or pour $a = 1$, $p_a = q$ et $p_a \circ q = q \circ q = q$. En conclusion, $p_a \circ q$ est un projecteur si et seulement si $a = 1$.

Exercice 11

p. 9

VP11

- 1.



2. On a $s \circ s = \text{id}_E$.

Le polynôme $P(x) = x^2 - 1$ est annulateur de s .

3. Soit $\lambda \in \text{Sp}(s)$. Il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $s(x) = \lambda x$. Puis

$$s(s(x)) = s(\lambda x) = \lambda s(x) = \lambda^2 x.$$

Or on a aussi $s(s(x)) = x$. Comme x est non nul, $\lambda^2 = 1$ et $\lambda = \pm 1$. Ainsi

$$\text{Sp}(s) \subset \{-1; 1\}.$$

Réciproquement, pour tout $x \in F \setminus \{0_E\}$, $s(x) = x$ et $1 \in \text{Sp}(s)$ et pour $x \in G \setminus \{0_E\}$, $s(x) = -x$ et $-1 \in \text{Sp}(s)$. On a donc

$$\{-1; 1\} \subset \text{Sp}(s).$$

En résumé

$$\text{Sp}(s) = \{-1; 1\}.$$

On a aussi

$$E_1(s) = F \quad \text{et} \quad E_{-1}(s) = G.$$

4. Soit $u \in E$.

$$\begin{aligned} (2p - \text{id}_E)(u) &= 2p(u) - u \\ &= 2(u_F) - (u_F + u_G) \\ &= u_F - u_G = s(u). \end{aligned}$$

Ce calcul étant valable pour u arbitrairement choisi

$$2p - \text{id}_E = s.$$

On a alors

$$\lambda \in \text{Sp}(p) \iff 2\lambda - 1 \in \text{Sp}(s).$$

Comme $\text{Sp}(p) = \{0; 1\}$, on retrouve $\text{Sp}(s) = \{-1; 1\}$.

Exercice 12

p. 10

VP12

- Prouvons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{P}(k) : \quad \varphi^k(u) = \lambda^k u$$

est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

→ *Initialisation.* Par convention $\varphi^0 = \text{id}_E$ et

$$\varphi^0(u) = \text{id}_E(u) = u = \lambda^0 u.$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie.

→ *Hérédité.* Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie.

$$\varphi^{k+1}(u) = \varphi^k(\varphi(u)) = \varphi^k(\lambda u)$$

$$= \lambda \varphi^k(u) = \lambda \cdot \lambda^k u$$

$$\varphi^{k+1}(u) = \lambda^{k+1} u.$$

Ainsi $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(k)$ l'est.

→ *Conclusion.* Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

- Traitons le cas général d'un polynôme $Q(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

$$Q(\varphi)(u) = \left(\sum_{k=0}^n a_k \varphi^k \right)(u)$$

$$= \sum_{k=0}^n a_k \varphi^k(u)$$

$$= \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \cdot u$$

$$= \left(\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \right) \cdot u$$

$$Q(\varphi)(u) = Q(\lambda) \cdot u.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 13

p. 11

VP13

1. Le polynôme $x^2 - 1$ convient car pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$${}^t(M) - M = 0_n.$$

2. D'après ce qui précède, -1 et 1 sont racines du polynôme annulateur $x^2 - 1$ et donc potentielles valeurs propres. Or, on constate que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 (resp. -1) correspond à l'ensemble non réduit à $\{0\}$ des matrices symétriques (resp. antisymétrique). Ainsi 1 et -1 sont bien valeurs propres :

$$\{-1; +1\} = \text{Sp}(\varphi).$$

Exercice 14

p. 12

VP14

1. Vérifier que φ est linéaire.

Soit $P \in \text{Ker } \varphi$.

$$(P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_p)) = (0, 0, \dots, 0).$$

Autrement dit, les réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont racines de P . Or ce dernier est de degré au plus $p-1$. Avec au moins p racines, c'est le polynôme nul. Ainsi

$$\text{Ker } \varphi = \{0_{\mathbb{R}_{p-1}[x]}\}.$$

L'application φ est injective. De plus

$$\dim \mathbb{R}_{p-1}[x] = \dim \mathbb{R}^p.$$

On peut affirmer que c'est un isomorphisme.

- 2.a) On trouve

$$L_1(x) = \frac{x(x-1)}{2}, \quad L_2(x) = -x^2 + 1, \quad L_3(x) = \frac{x(x+1)}{2}.$$

- 2.b) Pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$,

$$L_i(x) = \frac{1}{\alpha_i} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (x - \lambda_k) \quad \text{où } \alpha_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (\lambda_i - \lambda_k).$$

3. Plusieurs rédactions possibles :

Rédaction 1

Soit $P \in \mathbb{R}_{p-1}[x]$. On pose

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n P(\lambda_i) L_i(x).$$

En remarquant que pour tout indice i ,

$$L_i(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

On montre que $\varphi(P) = \varphi(Q)$. Par injectivité de φ , $P = Q$. Ce qui conclut.

Rédaction 2

Soit $P \in \mathbb{R}_{p-1}[x]$. On pose

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n P(\lambda_i) L_i(x).$$

On vérifie que $P - Q$ admet p racines données par les λ_i . Or ce polynôme a un degré qui n'excède pas $p-1$, c'est donc le polynôme nul. D'où $P = Q$.

Exercice 15

p. 15

VP15

1. Le réel 1 est une racine évidente. Effectuons une division euclidienne pour obtenir la factorisation.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & x - 1 \\ \hline x^2(x-1) & x^2 - x - 6 \\ -x^2 - 5x + 6 & \\ \hline -x(x-1) & \\ -6x + 6 & \end{array}$$

D'où $P(x) = (x-1)(x^2 - x - 6)$.

En remarquant que -2 est aussi racine ou avec un calcul de discriminant, on obtient finalement

$$P(x) = (x-1)(x+2)(x-3).$$

Les racines de P sont $-2, 1$ et 2 . On a donc

$$\text{Sp}(A) \subset \{-2; 1; 3\}.$$

2. Vérifier par le calcul qu'on si l'on pose

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alors $E_1(A) = \text{Vect}(X)$, $E_{-2}(A) = \text{Vect}(Y)$

et $E_3(A) = \text{Vect}(Z)$.

En particulier $\text{Sp}(A) = \{-2; 1; 3\}$.

Exercice 16

p. 15

VP16

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\det(R_\alpha - \lambda I_2) = \det \left(\begin{bmatrix} \cos(\alpha) - \lambda & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) - \lambda \end{bmatrix} \right) \\ = (\cos(\alpha) - \lambda)^2 + \sin(\alpha)^2.$$

La matrice $R_\alpha - \lambda I_2$ est non inversible si et seulement si

$$\underbrace{(\cos(\alpha) - \lambda)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\sin(\alpha)^2}_{\geq 0} = 0.$$

Chaque terme est nul

$$\begin{cases} \cos(\alpha) - \lambda = 0 \\ \sin(\alpha) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \cos(\alpha) = \pm 1 \\ \alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Finalement,

$$\text{Sp}(R_\alpha) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{si } \alpha = 2k\pi \\ -1 & \text{si } \alpha = (2k+1)\pi. \end{cases}$$

Exercice 17

p. 16

VP17

Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k D^k = 0_n.$$

En regardant le coefficient en position (i, i) , il vient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k d_i^k = 0.$$

On introduit le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k x^k$ de sorte que d_1, d_2, \dots, d_n soient racines de P . Or P est de degré au plus $n-1$, P est le polynôme nul. Ses coefficients sont nuls

$$\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \lambda_k = 0.$$

La famille $(D^k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket}$ est libre. Comme elle contient $n = \dim(\mathcal{D}_n)$ vecteurs, c'est une base de \mathcal{D}_n .

Exercice 18

p. 16

VP18

1. Par définition du polynôme annulateur,

$$\varphi^2 + \varphi - 2\text{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Dès lors

$$\varphi \circ \varphi + \varphi = 2\text{id}_E$$

On obtient :

$$\varphi \circ \left(\frac{1}{2}(\text{id}_E + \varphi) \right) = \text{id}_E, \quad \left(\frac{1}{2}(\text{id}_E + \varphi) \right) \circ \varphi = \text{id}_E.$$

Par la caractérisation des applications bijectives, φ est bijective avec $\varphi^{-1} = \frac{1}{2}(\text{id}_E + \varphi)$.

2. Essayons au brouillon de trouver ces suites $(a_n)_n, (b_n)_n$. Si de telles suites existent alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi^n = a_n \varphi + b_n \text{id}_E.$$

En particulier, pour $n = 0$,

$$\text{id}_E = \varphi^0 = a_0 \varphi + b_0 \text{id}_E.$$

On s'attend à $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \varphi^{n+1} &= \varphi \circ \varphi^n = \varphi \circ (a_n \varphi + b_n \text{id}_E) \\ &= a_n \varphi^2 + b_n \varphi = a_n (2\text{id}_E - \varphi) + b_n \varphi \\ &= (b_n - a_n) \varphi + 2a_n \text{id}_E. \end{aligned}$$

Cela suggère $a_{n+1} = b_n - a_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$.

Rédigeons :

On définit les suites a et b par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = b_n - a_n \\ b_{n+1} = 2a_n. \end{cases}$$

Démontrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \varphi^n = a_n \varphi + b_n \text{id}_E$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Par définition de a_0, b_0 ,

$$a_0 \varphi + b_0 \text{id}_E = \text{id}_E \quad \text{et} \quad \varphi^0 = \text{id}_E.$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} \varphi^{n+1} &= \varphi \circ \varphi^n = \varphi \circ (a_n \varphi + b_n \text{id}_E) \\ &= a_n \varphi^2 + b_n \varphi = a_n (2\text{id}_E - \varphi) + b_n \varphi \\ &= (b_n - a_n) \varphi + 2a_n \text{id}_E \end{aligned}$$

$$\varphi^{n+1} = a_{n+1} \varphi + b_{n+1} \text{id}_E.$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, il existe $Q, R \in \mathbb{R}[x]$ tels que

$$(\star) : x^n = (x^2 + x - 2)Q(x) + R(x)$$

$$\text{avec } \deg(R) < \deg(x^2 + x - 2) = 2.$$

Le polynôme R est donc de degré au plus 1. Il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$R(x) = a_n x + b_n.$$

En évaluant en φ , la relation (\star)

$$\varphi^n = \underbrace{(\varphi^2 + \varphi - 2\text{id}_E)}_{0_{\mathcal{L}(E)}} \circ Q(\varphi) + R(\varphi).$$

Finalement, il existe bien deux réels a_n, b_n tels que

$$\varphi^n = R(\varphi) = a_n \varphi + b_n \text{id}_E.$$

Exercice 19

p. 16

VP19

1. On a

$$\begin{aligned} \varphi(1, 0, 0) &= (0, 1, 1) \\ \varphi(0, 1, 0) &= (1, 0, 1) \\ \varphi(0, 0, 1) &= (1, 1, 0). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.a) On a

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad -B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad -2I_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

On a bien $B^2 - B - 2I_3 = 0_3$.

$$x^2 - x - 2 \text{ est annulateur de } B.$$

2.b) On a aussi :

$$B(B - I_3) = B^2 - B = 2I_3.$$

Donc $B \left(\frac{1}{2}(B - I_3) \right) = I_3$ et $\left(\frac{1}{2}(B - I_3) \right) B = I_3$.

B est donc inversible et

$$B^{-1} = \frac{1}{2}(B - I_3) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Comme B est inversible, φ est un isomorphisme. On lit sur la matrice B^{-1} ,

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(1, 0, 0) &= \frac{1}{2}(-1, 1, 1) \\ \varphi^{-1}(0, 1, 0) &= \frac{1}{2}(1, -1, 1) \\ \varphi^{-1}(0, 0, 1) &= \frac{1}{2}(1, 1, -1). \end{aligned}$$

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} &\varphi^{-1}(x, y, z) \\ &= \varphi^{-1}(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) \\ &= x\varphi^{-1}(1, 0, 0) + y\varphi^{-1}(0, 1, 0) + z\varphi^{-1}(0, 0, 1). \end{aligned}$$

Après simplifications, on trouve :

$$\varphi^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{2}(-x + y + z, x - y + z, x + y - z).$$

Exercice 20

p. 16

VP20

1. Prouvons par récurrence que la propriété

$\mathcal{P}(k)$: « la famille $\mathcal{B}_{u,k}$ est une famille libre »

est vraie pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

→ *Initialisation.* $\mathcal{P}(1)$ est vraie car u ne peut être nul.

→ *Hérédité.* Soit $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie, montrons $\mathcal{P}(k+1)$. C'est-à-dire, montrons que la famille

$$(u, \varphi(u), \dots, \varphi^k(u))$$

est libre. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i \varphi^i(u) = 0_E.$$

Prouvons que $\lambda_k = 0$ en raisonnant par l'absurde. Si $\lambda_k \neq 0$, alors

$$\varphi^k(u) = - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_k} \varphi^i(u) \in \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,k}).$$

En appliquant φ , on a aussi

$$\begin{aligned} \varphi^{k+1}(u) &= \sum_{i=0}^{k-1} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_k} \right) \varphi^{i+1}(u) \\ &= \underbrace{\sum_{i=0}^{k-2} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_k} \right) \varphi^{i+1}(u)}_{\in \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,k})} + \underbrace{\left(-\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} \right) \varphi^k(u)}_{\in \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,k})}. \end{aligned}$$

Puis $\varphi^{k+1}(u) \in \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,k})$.

Par récurrence, pour tout $p \geq k$

$$\varphi^p(u) \in \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,k}).$$

Or, le vecteur u est cyclique, on montre alors que

$$E = \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,\ell}) = \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,k}).$$

Absurde, on a trouvé une famille génératrice de E avec strictement moins d'éléments que la dimension de E. Donc $\lambda_k = 0$.

Enfin, par liberté de la famille $\mathcal{B}_{u,k}$ pour tout $i \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket$, $\lambda_k = 0$. La famille $\mathcal{B}_{u,k+1}$ est libre. Ce qui prouve $\mathcal{P}(k+1)$.

→ *Conclusion.* Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

En particulier, la famille $\mathcal{B}_{u,n}$ est libre. Comme est contenu autant de vecteurs que la dimension de E, c'est une base de E.

2. C'est une conséquence du fait que $\varphi^n(u) \in E$ et la famille $\mathcal{B}_{u,n}$ est une base de E (donc génératrice de E).

3. Par définition

$$\varphi^n(u) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^i(u).$$

Soit $j \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} \varphi^n(\varphi^j(u)) &= \varphi^j(\varphi^n(u)) \\ &= \varphi^j\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^i(u)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^j(\varphi^i(u)) \quad (\text{linéarité}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^i(\varphi^j(u)) \quad (\text{commutativité}). \end{aligned}$$

En résumé, l'égalité

$$\varphi^n(v) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^i(v)$$

a été vérifiée pour tout vecteur d'une base de E. Par linéarité, elle s'étend à tout vecteur de E. D'où

$$\varphi^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^i, \quad \text{puis} \quad \varphi^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^i = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Le polynôme $P(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ est annulateur de φ .

Exercice 21

p. 16

VP21

- Par définition, il existe $p_1, p_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\varphi^{p_1} = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad \psi^{p_2} = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Pour tout entier $k \geq p_1$

$$\varphi^k = \varphi^{p_1} \circ \varphi^{k-p_1} = 0_{\mathcal{L}(E)} \circ \varphi^{k-p_1} = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

De même, pour $k \geq p_2$, $\psi^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

En particulier pour $n = \max\{p_1, p_2\}$,

$$\varphi^n = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad \psi^n = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

- Ensuite, d'après la formule du binôme de Newton avec φ et ψ qui commutent

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \varphi^k \circ \psi^{2n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} \varphi^k \circ \underbrace{\psi^{2n-k}}_{0_{\mathcal{L}(E)}} + \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} \underbrace{\varphi^k}_{0_{\mathcal{L}(E)}} \circ \psi^{2n-k}. \end{aligned}$$

En effet, pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $2n - k \geq n$ et

$$\psi^{2n-k} = 0_{\mathcal{L}(E)},$$

pour $k \in \llbracket n+1; 2n \rrbracket$ $\varphi^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Dès lors $(\varphi + \psi)^{2n} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

La somme $\varphi + \psi$ est nilpotente.

Remarque. Si φ et ψ ne commutent pas, le résultat n'est plus valable. Donnons un contre-exemple matriciel

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{nilpotente}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{nilpotente}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{inversible}}.$$

Or, une matrice nilpotente ne peut être inversible.

Exercice 22

p. 16

VP22

- Démontrons par récurrence que la propriété $f^k \in G$ est vraie pour tout entier $k \geq m$.

→ *Initialisation.* Soit $P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ un polynôme annulateur de f de degré m . Alors

$$P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{donc} \quad a_m f^m = - \sum_{k=0}^{m-1} a_k f^k.$$

P étant de degré m , $a_m \neq 0$, donc $f^m = \frac{-1}{a_m} \sum_{k=0}^{m-1} a_k f^k \in G$.

La propriété est vraie au rang m .

→ *Hérédité.* Soit $k \geq m$. On suppose que $f^k \in G$. Donc il existe $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket}$ tel que $f^k = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i f^i$. Alors,

$$f^{k+1} = f^k \circ f = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i f^{i+1} = a_{m-1} \underbrace{f^m}_{\in G} + \sum_{i=0}^{m-2} \alpha_i \underbrace{f^{i+1}}_{\in G}.$$

On en déduit que $f^{k+1} \in G$ puisque G est stable par combinaison linéaire en tant que sous-espace vectoriel. Donc, si $f^k \in G$, alors $f^{k+1} \in G$.

→ *Conclusion.* $\forall k \geq m, f^k \in G$.

- Considérons $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket}$ et $(\beta_i)_{i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket}$ tels que

$$g = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i f^i \quad \text{et} \quad h = \sum_{i=0}^{m-1} \beta_i f^i.$$

Par linéarité de g $g \circ h = \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket^2} \alpha_i \beta_j \underbrace{f^{i+j}}_{\in E}$.

D'où $g \circ h \in E$ car E est stable par combinaison linéaire.

On en déduit alors, par récurrence que,

pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g^k \in G$.

- $(f^i)_{i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket}$ est une famille génératrice de G , donc G est de dimension finie et

$$\dim(G) \leq m.$$

Alors $(g^i)_{i \in \llbracket 0, m \rrbracket}$ est une famille d'éléments de G et $\text{Card}((g^i)_{i \in \llbracket 0, m \rrbracket}) > \dim(G)$. Donc cette famille est liée. Il existe des réels $(\beta_i)_{i \in \llbracket 0, m \rrbracket}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=0}^m \beta_i g^i = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

$Q(x) = \sum_{i=0}^m \beta_i x^i$ est annulateur de g avec $\deg(Q) \leq m$.

1.a) Comme f et id commutent

$$\begin{aligned} (f - \text{id})^2 &= f^2 - 2\text{id} \circ f + \text{id}^2 \\ &= f^2 - 2f + \text{id} \\ &= -f \circ (2\text{id} - f) + \text{id}. \end{aligned}$$

Ainsi $(f - \text{id})^2 + f \circ (2\text{id} - f) = \text{id}$.

1.b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on a d'après la relation précédente

$$\begin{aligned} (f - \text{id})^2(x) + (f \circ (2\text{id} - f))(x) &= \text{id}(x) \\ &= x. \end{aligned}$$

1.c) Soit $x \in \mathbb{R}^2$.

Comme $f \circ (f - \text{id})^2 = 0$, on a

$$(f - \text{id})^2(x) \in \text{Ker } f.$$

De plus en posant $y = (2\text{id} - f)(x)$, on a

$$(f \circ (2\text{id} - f))(x) = f(y) \in \text{Im } f.$$

En reprenant la relation de la question 1.a), on a bien

$$\begin{aligned} x &\in \text{Ker } f + \text{Im } f \\ \text{puis } \mathbb{R}^n &= \text{Ker } f + \text{Im } f. \end{aligned}$$

Or, par la formule du rang

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^n.$$

Ce qui donne bien le résultat.

2.a) D'après la formule de Taylor dans le cas polynomial

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^p \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{P^{(k)}(0)}{k!} \quad \text{car } P(0) = 0. \end{aligned}$$

le résultat s'en déduit en posant

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad a_i = \frac{P^{(i)}(0)}{i!}$$

avec $a_1 = P'(0) \neq 0$.

2.b) Soit $x \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$. Il existe donc $z \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$x = f(z).$$

Or P est annulateur

$$a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_p f^p = 0.$$

Évalué en z , il vient

$$a_1 f(z) + a_2 f^2(z) + \dots + a_p f^p(z) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} \quad (\bullet)$$

Or $f(z) = x$, et pour $i \geq 2$

$$\begin{aligned} f^i(z) &= f^{i-2} \circ f(f(z)) \\ &= f^{i-2}(f(z)) = f^{i-2}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

La relation (\bullet) se réduit à $a_1 x = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ puis $x = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ car $a_1 \neq 0$.
Finalement

$$\text{Ker } f \cap \text{Im } f \subset \{0_{\mathbb{R}^n}\}$$

et l'égalité est automatique car l'intersection est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , il contient $0_{\mathbb{R}^n}$.

• La suite

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$$

est une conséquence directe de l'égalité précédente et de la formule du rang.

2.c) Il suffit de prendre

$$P(x) = x(x-1)^2$$

car $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

1. • On a $\mathcal{C}(\varphi) \subset \mathcal{L}(E)$.

L'application nulle $0_{\mathcal{L}(E)}$ commute avec tout endomorphisme de E donc en particulier avec φ . Ainsi $\mathcal{C}(\varphi) \neq \emptyset$.

Soient $f, g \in \mathcal{C}(\varphi)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g) \circ \varphi &= \lambda f \circ \varphi + \mu g \circ \varphi \\ &= \lambda \varphi \circ f + \mu \varphi \circ g \quad (\text{car } f, g \in \mathcal{C}(\varphi)) \end{aligned}$$

$$(\lambda f + \mu g) \circ \varphi = \varphi \circ (\lambda f + \mu g).$$

Dès lors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}(\varphi)$.

• On a $\mathbb{R}(\varphi) \subset \mathcal{L}(E)$.

Si P désigne le polynôme $P(x) = x$, alors $\varphi = P(\varphi)$ puis $\mathbb{R}(\varphi) \neq \emptyset$.

Enfin pour $P(\varphi), Q(\varphi) \in \mathbb{R}(\varphi)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\lambda P(\varphi) + \mu Q(\varphi) = \underbrace{(\lambda P + \mu Q)}_{\in \mathbb{R}[x]}(\varphi) \in \mathbb{R}(\varphi).$$

On en déduit que $\mathcal{L}(\varphi)$ et $\mathbb{R}(\varphi)$ sont bien des sous-espaces de $\mathcal{L}(E)$.

• Comme tout polynôme en φ commute avec φ .

$$\mathbb{R}(\varphi) \subset \mathcal{C}(\varphi).$$

Plus précisément si $P(\varphi) \in \mathbb{R}(\varphi)$ avec $P = \sum_{k=0}^p a_k x^k$

$$\begin{aligned} P(\varphi) \circ \varphi &= \sum_{k=0}^p a_k \varphi^k \circ \varphi = \sum_{k=0}^p a_k \varphi \circ \varphi^k \\ &= \varphi \circ \left(\sum_{k=0}^p a_k \varphi^k \right) = \varphi \circ P(\varphi). \end{aligned}$$

2. Si φ est cyclique, alors dans une base

$$\mathcal{B} = (u_0, \varphi(u_0), \dots, \varphi^{n-1}(u_0)) = (e_1, \dots, e_n),$$

on a

$$\forall i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, \quad \varphi(e_i) = \varphi(\varphi^{i-1}(u_0)) = \varphi^i(u_0) = e_{i+1}$$

et $\varphi(e_n) = \varphi^n(u_0) \in E$

donc il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\varphi(e_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i-1} e_i.$$

On constate que la base \mathcal{B} donne bien :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, supposons qu'il existe une base (e_1, \dots, e_n) telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ soit de la forme proposée. Alors pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\varphi(e_i) = e_{i+1}.$$

Par récurrence, on a

$$\begin{aligned} e_1 \\ e_2 &= \varphi(e_1) \\ e_3 &= \varphi(e_2) = \varphi^2(e_1) \\ &\vdots \\ e_k &= \varphi(e_{k-1}) = \varphi^{k-1}(e_1) \\ &\vdots \\ e_n &= \varphi(e_{n-1}) = \varphi^{n-1}(e_1) \end{aligned}$$

La base \mathcal{B} est bien de la forme

$$(e_1, \varphi(e_1), \varphi^2(e_1), \dots, \varphi^{n-1}(e_1)).$$

L'endomorphisme φ est cyclique.

3. Par construction $P(\varphi)(u_0) = 0_E$ car

$$\varphi^n(u_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \varphi^{k-1}(u_0).$$

• Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\begin{aligned} P(\varphi)(\varphi^i(u_0)) &= P(\varphi) \circ \varphi^i(u_0) \\ &= \varphi^i \circ P(\varphi)(u_0) \quad (\text{question 1}) \\ &= \varphi^i(P(\varphi)(u_0)) \\ &= \varphi^i(0_E) = 0_E \quad (\varphi^i \text{ est linéaire}). \end{aligned}$$

• L'endomorphisme $P(\varphi)$ s'annule sur tout vecteur d'une base (ici $\mathcal{B} = (u_0, \varphi(u_0), \dots, \varphi^{n-1}(u_0))$), c'est donc l'endomorphisme nul. Le polynôme P est bien annulateur de φ .

4.a) Famille génératrice

Soit $g \in \mathbb{R}(\varphi)$. Il existe $A \in \mathbb{R}[x]$ tel que $g = A(\varphi)$. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe $Q, R \in \mathbb{R}[x]$ tels que

$$A = PQ + R \text{ avec } \deg R < \deg A = n.$$

En particulier

$$\begin{aligned} A(\varphi) &= P(\varphi) \cdot Q(\varphi) + R(\varphi) \\ &= 0_{\mathcal{L}(E)} + R(\varphi). \end{aligned}$$

Ainsi $g = R(\varphi)$. Comme $\deg R < n$, on peut écrire $R = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ et

$$g = R(\varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi^k \in \text{Vect}(id_E, \varphi, \dots, \varphi^{n-1}).$$

On en déduit l'inclusion

$$\mathbb{R}(\varphi) \subset \text{Vect}(id_E, \varphi, \dots, \varphi^{n-1}).$$

Comme l'inclusion réciproque est claire, on a même égalité entre ces deux espaces. Dit autrement, la famille $(id_E, \varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{n-1})$ est génératrice de $\mathbb{R}(\varphi)$.

• *Liberté*

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \varphi^i = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

On évalue en u_0 pour obtenir

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \varphi^i(u_0) = 0_E.$$

Or on a supposé que la famille

$$\mathcal{B} = (u_0, \varphi(u_0), \dots, \varphi^{n-1}(u_0))$$

est une base de E . En particulier, la famille \mathcal{B} est libre et chaque coefficient λ_i est nul. On en déduit que la famille $(id_E, \varphi, \dots, \varphi^{n-1})$ est libre.

En conclusion, la famille $(id_E, \varphi, \dots, \varphi^{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}(\varphi)$.

4.b) On a déjà une première inclusion

$$\mathbb{R}(\varphi) \subset \mathcal{C}(\varphi)$$

Justifions l'inclusion réciproque.

Soit $f \in \mathcal{C}(\varphi)$. Il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ tels que

$$f(u_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \varphi^i(u_0)$$

car $\mathcal{B} = (u_0, \varphi(u_0), \dots, \varphi^{n-1}(u_0))$ est une base de E . Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

$$f(\varphi^k(u_0)) = \varphi^k(f(u_0)) \quad (\text{car } f \in \mathcal{C}(\varphi))$$

$$= \varphi^k \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \varphi^i(u_0) \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \varphi^{i+k}(u_0)$$

$$f(\varphi^k(u_0)) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \varphi^i(\varphi^k(u_0)).$$

Si on introduit le polynôme $A = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i$, on constate que pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$

$$f(\varphi^k(u_0)) = A(f)(\varphi^k(u_0)).$$

Cette égalité est vraie pour tout vecteur d'une base, elle s'étend à tout vecteur de E. En effet pour $u \in E$, il existe μ_0, \dots, μ_{n-1} tels que

$$u = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i \varphi^i(u_0)$$

puis

$$\begin{aligned} A(\varphi)(u) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i A(\varphi)(\varphi^i(u_0)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i f(\varphi^i(u_0)) = f\left(\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i \varphi^i(u_0)\right) \\ A(\varphi)(u) &= f(u). \end{aligned}$$

Ainsi $f = A(\varphi) \in \mathbb{R}(\varphi)$. L'inclusion réciproque est prouvée. Finalement

$$\mathcal{C}(\varphi) = \mathbb{R}(\varphi).$$

En particulier

$$\dim \mathcal{C}(\varphi) = \dim \mathbb{R}(\varphi) = n.$$

Exercice 25

p. 17

VP25

La fonction **bidule** prend en argument une matrice carrée A et un réel x et teste si x est une valeur propre pour A.

Exercice 26

p. 17

VP26

La première assertion est fausse. Considérer la matrice

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

pour un contre-exemple.

2. C'est vrai. Soit X un vecteur propre de A^2 pour λ

$$A^2 X = \lambda X \quad \text{et} \quad X \neq 0_{n,1}.$$

D'où

$$(A - \sqrt{\lambda} I_n)(A + \sqrt{\lambda} I_n)X = (A^2 - \lambda I_n)X = 0$$

Comme X est non nul, $(A - \sqrt{\lambda} I_n)(A + \sqrt{\lambda} I_n)$ n'est pas inversible. Nécessairement $A - \sqrt{\lambda} I_n$ ou $A + \sqrt{\lambda} I_n$ n'est pas inversible. Autrement dit $\sqrt{\lambda} \in \text{Sp}(A)$ ou $-\sqrt{\lambda} \in \text{Sp}(A)$.

Exercice 27

p. 18

VP27

1.a) Comme

$$C_1 = C_2 = \dots = C_n \neq \{0_{n,1}\}.$$

On a

$$\text{rg}(J) = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_n)$$

$$= \dim \text{Vect}(C_1)$$

$$\text{rg}(J) = 1.$$

La matrice J n'est pas inversible, 0 est valeur propre et la formule du rang donne :

$$\text{rg}(J) + \dim E_0(J) = n.$$

D'où $\dim E_0(J) = n - 1$.

Une base de $E_0(J)$ est donnée par

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

En effet, ces vecteurs forment une famille libre de vecteurs de $E_0(J)$ et il y en a autant que la dimension.

1.b) On a $X \neq 0_{n,1}$ et

$$JX = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} = nX.$$

On en déduit que n est une valeur propre de J.

2. Rédaction 1. On a vu à la question 1 que

$$\{0; n\} \subset \text{Sp}(J).$$

Prouvons l'égalité en raisonnant par l'absurde. Soit λ une troisième valeur propre de J ($\lambda \neq 0, \lambda \neq n$). On sait alors que $E_0(J)$, $E_n(J)$ et $E_\lambda(J)$ sont en somme directe et

$$E_0(J) \oplus E_n(J) \oplus E_\lambda(J) \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

implique

$$\underbrace{\dim E_0(J)}_{=n-1} + \underbrace{\dim E_n(J)}_{\geq 1} + \underbrace{\dim E_\lambda(J)}_{\geq 1} \leq n.$$

Absurde. Il y a exactement deux valeurs propres à J.

Rédaction 2. Le polynôme

$$x^2 - nx = x(x - n)$$

est annulateur de J. Comme le spectre est inclus dans l'ensemble des racines

$$\text{Sp}(J) \subset \{0; n\}.$$

On a même égalité d'après la question précédente.

3. Comme $E_0(J)$ et $E_n(J)$ sont en somme directe et

$$\dim E_0(J) + \dim E_n(J) = n,$$

on a

$$E_0(J) \oplus E_n(J) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Soit φ , l'endomorphisme canoniquement associé à J et \mathcal{B} , une base associée à la décomposition

$$E_0(\varphi) \oplus E_n(\varphi) = \mathbb{R}^n.$$

Si on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on a pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$

$$\varphi(e_i) = 0_E \quad \text{et} \quad \varphi(e_n) = ne_n.$$

On en déduit que

$$K = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n \end{bmatrix}.$$

Les matrices J et K représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, par la formule de changement de bases, J et K sont semblables.

4. On constate que $K^2 - K = 0_n$. Comme K et J ont même polynôme annulateur (détail à question 1 de l'exercice ??) :

$$J^2 - nJ = 0.$$

Notons \mathcal{P} l'ensemble des polynômes annulateur de J. On prouve par double inclusion que

$$\mathcal{P} = \left\{ (x^2 - nx)Q(x) \mid Q \in \mathbb{R}[x] \right\}.$$

Exercice 28

p. 18

VP28

1. On a

$$M(a, b) = bJ + (a - b)I_n.$$

Justifions que

$$\begin{aligned} & \lambda \in \text{Sp}(J) \\ \iff & \lambda b + (a - b) \in \text{Sp}(M(a, b)). \end{aligned}$$

Rédaction 1.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le résultat est clair pour $b = 0$. Pour $b \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{rg}(J - \lambda I_n) &= \text{rg}(b(J - \lambda I_n)) \\ &= \text{rg}(bJ - \lambda bI_n) \\ &= \text{rg}(bJ + (a - b)I_n - (\lambda b + (a - b))I_n) \\ &= \text{rg}(M(a, b) - (\lambda b + (a - b))I_n). \end{aligned}$$

En particulier

$$\text{rg}(J - \lambda I_n) < n \text{ ssi } \text{rg}(M(a, b) - (\lambda b + (a - b))I_n) < n.$$

d'où le résultat.

Rédaction 2.

Soit $\lambda \in \text{Sp}_p(J)$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$JX = \lambda X \quad \text{et} \quad X \neq 0_{n,1}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} M(a, b)X &= bJX + (a - b)X \\ &= b\lambda X + (a - b)X \\ M(a, b)X &= (b\lambda + (a - b))X. \end{aligned}$$

D'où $b\lambda + (a - b) \in \text{Sp}(J)$.

On procède de même pour la réciproque en isolant le cas $b = 0$.

2. La matrice $M(a, b)$ est non inversible si et seulement si

$$0 \in \text{Sp}(M(a, b)).$$

Or le calcul précédent donne deux valeurs propres à $M(a, b)$:

$$a - b \quad \text{et} \quad bn + (a - b).$$

Donc $M(a, b)$ est non inversible si et seulement si :

$$a = b \quad \text{ou} \quad -a = (n - 1)b = 24b.$$

- Il y a 101 couples $(a, b) \in \llbracket 50; 50 \rrbracket^2$ tels que $a = b$.
- Il y a 5 couples qui vérifient la seconde condition : $(0; 0), (-24; 1), (-48; 2), (24; -1), (48; -2)$.
- Seul $(0; 0)$ vérifie les deux conditions en même temps.

Au total, on compte 105 couples solutions distincts.

Exercice 29

p. 18

VP29

Notons A la matrice de φ dans la base canonique :

$$A = \text{Mat}_{\text{can}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Puis} \quad A - 4I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

On constate

$$C_1 - 2C_2 = 0 \quad \text{et} \quad C_2 + C_3 = 0.$$

Le rang de la matrice $A - 4I_3$ est 1, la dimension du noyau est donc 2 et

$$E_4(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

En revenant à l'endomorphisme φ :

$$E_4(\varphi) = \text{Vect}(u, v)$$

avec $u = (1, -2, 0)$ et $v = (0, 1, 1)$.

Exercice 30

p. 18

VP30

1.a) Vérifier que $A^2 = 3A - 2I_3$. Un polynôme annulateur est alors

$$P(x) = x^2 - 3x + 2.$$

1.b) Toute valeur propre de A est racine de P. Or, le polynôme P de degré 2 admet deux racines.

$$\text{Sp}(A) \subset \{1; 2\}.$$

1.c) Le code Python donne

$$\text{rg}(A - I_3) = 1 < 3 \quad \text{et} \quad \text{rg}(A - 2I_3) = 2 < 3.$$

Ce calcul confirme que 1 et 2 sont bien valeurs propres de A :

$$\text{Sp}(A) = \{1; 2\}.$$

Par l'intermédiaire de la formule du rang,

$$\dim E_1(A) = 3 - \text{rg}(A - I_3) = 2 \quad \text{et} \quad \dim E_2(A) = 3 - \text{rg}(A - 2I_3) = 1.$$

D'où

$$\dim E_1(f) = 2 \quad \text{et} \quad \dim E_2(f) = 1.$$

La résolution du système $AX = X$ donne

$$E_1(f) = \{(y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(u_1, u_2)$$

avec $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (-1, 0, 1)$.

Comme u_1 et u_2 sont non colinéaires, ils forment une base de $E_1(f)$.

De même, on trouve

$$E_2(f) = \{(0, 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(w), \quad w = (0, 2, 1).$$

Le vecteur w étant non nul, (w) est une base de $E_2(f)$.

1.d) Les calculs précédents donnent

$$\dim E_1(f) + \dim E_2(f) = 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

De plus, les espaces propres sont en somme directe. D'où

$$E_1(f) \oplus E_2(f) = \mathbb{R}^3.$$

Si \mathcal{B} désigne une base adaptée à la décomposition précédente, la matrice de f dans cette base est diagonale.

2.a) Une solution est donnée par

$$(u_1, v_1, v_2) = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 2, 1)).$$

On a bien

$$u_1 \in E_1(f),$$

$$v_1 = u_1 + u_2 \in E_2(f) \quad \text{et} \quad v_2 \in E_2(f).$$

2.b) Notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, les coordonnées de x dans la base (u_1, v_1, v_2) . Par définition,

$$x = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot v_1 + \lambda_3 \cdot v_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = b \\ \lambda_2 + \lambda_3 = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_3 = -a + b - c \\ \lambda_2 + \lambda_3 = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = a - b + 2c \\ \lambda_3 = -a + b - c. \end{cases}$$

Exercice 31

p. 19

VP31

1. La condition **i)** se traduit par $PX = X$.

X est vecteur propre pour la valeur propre 1.

2. Soient P_1, P_2 deux matrices stochastiques

$$(P_1 P_2)X = P_1 (P_2 X) = P_1 X = X,$$

donc le produit $P_1 P_2$ vérifie la condition **i)**.

Prouvons la condition **ii)**. Notons $[M]_{ij}$ le coefficient de la matrice M en position (i, j) . Par définition du produit matriciel

$$[P_1 P_2]_{ij} = \sum_{k=1}^n \underbrace{[P_1]_{ik}}_{\geq 0} \underbrace{[P_2]_{kj}}_{\geq 0} \geq 0.$$

La matrice $P_1 P_2$ vérifie la seconde condition.

La matrice $P_1 P_2$ qui est donc une matrice stochastique.

\mathcal{E} est stable par produit.

• Soient P_1, P_2 stochastiques et $\lambda \in [0; 1]$

$$\begin{aligned} (\lambda P_1 + (1 - \lambda) P_2)X &= \lambda P_1 X + (1 - \lambda) P_2 X \\ &= \lambda X + (1 - \lambda) X = X. \end{aligned}$$

$\lambda P_1 + (1 - \lambda) P_2$ vérifie la condition **i)**. De plus, la condition **ii)** est claire puisque :

$$[\lambda P_1 + (1 - \lambda) P_2]_{ij} = \lambda [P_1]_{ij} + (1 - \lambda) [P_2]_{ij} \geq 0$$

car $\lambda \in [0; 1]$. Ainsi la matrice $\lambda P_1 + (1 - \lambda) P_2$ est stochastique. Concluons

\mathcal{E} est une partie convexe.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre associée à une matrice stochastique P . Notons Y , un vecteur propre. Précisons les coefficients avec

$$P = (p_{ij})_{i,j \in \llbracket 1; n \rrbracket} \quad \text{et} \quad Y = (y_j)_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket}.$$

La relation $PY = \lambda Y$ donne

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} y_j = \lambda y_i.$$

D'après l'inégalité triangulaire et la condition **i)**

$$\begin{aligned} |\lambda y_i| &\leq \sum_{j=1}^n |p_{ij} y_j| \leq \sum_{j=1}^n \left(p_{ij} \cdot \max_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket} |y_j| \right) \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} \right) \cdot \max_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket} |y_j| = \max_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket} |y_j|. \end{aligned}$$

En particulier, pour un indice i_0 réalisant le maximum

$$|y_{i_0}| = \max_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket} |y_j|,$$

on a

$$|\lambda| \cdot |y_{i_0}| \leq |y_{i_0}|.$$

Comme la matrice Y est non nulle (c'est un vecteur propre) $|y_{i_0}| \neq 0$ et par division, il vient $|\lambda| \leq 1$. On obtient le résultat demandé.

Exercice 32

p. 19

VP32

1. Vérifier par le calcul que

$$A^2 = A \quad \text{et} \quad B^2 = B.$$

Dès lors, les applications linéaires u et v vérifient

$$u \circ u = u \quad \text{et} \quad v \circ v = v.$$

On sait alors que

u et v sont des projecteurs.

2.a) Notons C_1 et C_2 les deux colonnes de A . On a

$$C_2 = aC_1 \quad \text{et} \quad C_1 \neq 0_{2,1}.$$

La matrice A est de rang 1.

Comme B est un cas particulier de A (prendre $a = 1$), B est aussi de rang 1.

De plus, on calcule

$$AB = \frac{1}{2(1+a^2)} \begin{bmatrix} 1+a & 1+a \\ a+a^2 & a+a^2 \end{bmatrix}.$$

Les deux colonnes sont identiques et non nulles

$$\text{rg}(u \circ v) = \text{rg}(AB) = 1.$$

2.b) Posons le calcul matriciel

$$\begin{aligned} AB \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} &= \frac{1}{2(1+a^2)} \begin{bmatrix} 1+a+a+a^2 \\ a+a^2+a^2+a^3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1+2a+a^2}{2(1+a^2)} \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} \\ &= \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire $x_0 \neq (0, 0)$ et

$$(u \circ v)(x_0) = \lambda_a x_0 \quad \text{avec} \quad \lambda_a = \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}.$$

2.c) Comme $u \circ v$ est un endomorphisme de \mathbb{R}^2 , de dimension 2, il ne peut avoir plus de deux valeurs propres.

→ 0 est valeur propre puisque $u \circ v$ n'est pas bijectif (de rang 1).

→ λ_a est aussi valeur propre d'après le calcul précédent.

Si $a \neq -1$, $\lambda_a \neq 0$ et il y a exactement deux valeurs propres distinctes

$$\text{Sp}(u \circ v) = \{0; \lambda_a\}.$$

Si $a = -1$, on constate que $u \circ v = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$ et

$$\text{Sp}(u \circ v) = \{0\}.$$

Remarque. Comme on peut répéter les éléments dans un ensemble, on peut regrouper les résultats avec

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \text{Sp}(u \circ v) = \{0; \lambda_a\}.$$

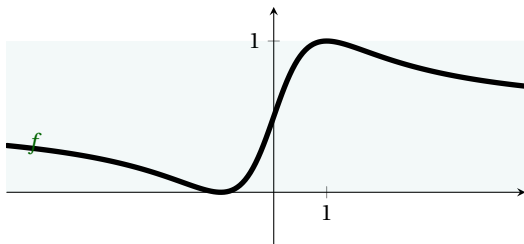
3.a) On définit la fonction f sur \mathbb{R} par f

$$f(x) = \frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)}.$$

La fonction est rationnelle, dérivable sur \mathbb{R} avec pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}.$$

On en déduit le tableau de variations et la courbe



Surtout, on vérifie que

$$\lambda_a = f(a) \in \text{Im}(f) \subset [0; 1].$$

D'où le résultat.

3.b) Si $u \circ v$ est un projecteur alors son spectre est inclus dans $\{0; 1\}$. On impose donc

$$\lambda_a = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_a = 1.$$

En reprenant l'étude de fonction,

$$a = -1 \quad \text{ou} \quad a = 1.$$

Si $a = -1$, $u \circ v$ est l'application nulle. C'est un projecteur (sur $\{0\}$) parallèlement à \mathbb{R}^2 .

Si $a = 1$, $u = v$ et $u \circ v = u^2 = u$ est un projecteur. En résumé

$$u \circ v \text{ est un projecteur si et seulement si } a = \pm 1.$$

Exercice 33

p. 19

VP33

1. Raisonnons par récurrence sur la propriété

$$\mathcal{P}(k): \quad A^k B - B A^k = k A^k.$$

→ *Initialisation.* $\mathcal{P}(0)$ est clairement vraie.

→ *Hérédité.* Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie, démontrons $\mathcal{P}(k+1)$

$$\begin{aligned} A^{k+1} B - B A^{k+1} &= A(A^k B) - (B A) A^k \\ &= A(k A^k + B A^k) - (A B - A) A^k \\ A^{k+1} B - B A^{k+1} &= k A^{k+1} + A^{k+1} \\ &= (k+1) A^{k+1}. \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(k+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(k)$ l'est.

→ *Conclusion.* Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

2. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \varphi_B(\lambda M_1 + \mu M_2) &= (\lambda M_1 + \mu M_2) B - B(\lambda M_1 + \mu M_2) \\ &= \lambda(M_1 B - B M_1) + \mu(M_2 B - B M_2) \\ &= \lambda \varphi_B(M_1) + \mu \varphi_B(M_2). \end{aligned}$$

L'application φ_B est linéaire. Comme l'espace de départ s'identifie à celui d'arrivée, on a un endomorphisme.

3. Si A^k est non nul, A^k est un vecteur propre de φ_B pour la valeur propre k .

4. Raisonnons par l'absurde. Supposons donc que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \neq 0_n$. D'après la question précédente, tout $k \in$

\mathbb{N} est valeur propre de φ_B . Absurde, φ_B est un endomorphisme de dimension finie, le nombre de valeur propre est fini. Concluons : il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0_n$.

Exercice 34

p. 19

VP34

1. • La dérivation étant linéaire, φ l'est aussi. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, $\varphi(P)$ reste un polynôme et

$$\deg P' < \deg P, \quad \deg((x-1)'P(x)) < \deg P + 1,$$

on a $\deg(\varphi(P)) \leq \deg(P) \leq n$.

On a bien $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[x]$.

L'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

- De plus $\varphi(1) = 0$ et pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\varphi(x^k) = (x-1)kx^{k-1} = kx^k - kx^{k-1}.$$

La matrice de φ dans la base canonique est alors

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & -n \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

2. La matrice A est triangulaire avec une diagonale constituée de $\{0, 1, 2, \dots, n\}$. Ainsi

$$\text{Sp}(\varphi) = \text{Sp}(A) = \llbracket 0; n \rrbracket.$$

- 3.a) On a $\varphi(P) = \lambda P$, c'est-à-dire

$$(x-1)P'(x) = \lambda P(x) \quad (\bullet)$$

En évaluant en 1, on obtient $0 = \lambda P(1)$ puis $P(1) = 0$ puisqu'on a supposé $\lambda \neq 0$. Le réel 1 est racine de P .

- 3.b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$, la multiplicité de 1 comme racine de P . Il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tels que

$$P(x) = (x-1)^m Q(x) \quad \text{et} \quad Q(1) \neq 0.$$

La relation (\bullet) devient

$$(x-1) \left(m(x-1)^{m-1} Q(x) + (x-1)^m Q'(x) \right) = \lambda (x-1)^m Q(x)$$

puis

$$(x-1)^m \left(mQ(x) + (x-1)Q'(x) \right) = \lambda (x-1)^m Q(x).$$

Comme le polynôme $(x-1)^m$ est non nul, on a simplement

$$mQ(x) + (x-1)Q'(x) = \lambda Q(x).$$

Il vient

$$(\lambda - m)Q(x) = (x-1)Q'(x).$$

Comme $Q(1) \neq 0$, en évaluant en $x = 1$, on obtient $m = \lambda \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et Q est le polynôme constant. En résumé

$$P(x) = \text{Cste} \cdot (x-1)^\lambda \quad \text{avec} \quad \text{Cste} \neq 0.$$

On vérifie que tout polynôme de ce type est vecteur propre pour la valeur propre λ .

4. D'après ce qui précède, pour tout $\lambda \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$E_\lambda(\varphi) = \left\{ \alpha(x-1)^\lambda \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left((x-1)^\lambda \right).$$

Notons que cette égalité s'étend à $\lambda = 0$. Il y a $n+1$ sous-espaces propres, tous de dimension 1.

Exercice 35

p. 20

VP35

1. L'espace $\mathcal{L}(E)$ est de dimension $p = \dim(E)^2$. La famille $(\text{id}_E, f, f^2, \dots, f^p)$ contenant $p+1$ éléments est donc liée. Il existe donc $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$ tels que

$$\sum_{i=0}^p a_i f^i = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad (a_0, \dots, a_p) \neq 0_{\mathbb{R}^{p+1}}.$$

Le polynôme non nul $P(x) = \sum_{i=0}^p a_i x^i$ est un polynôme annulateur de f .

2. Raisonnons par l'absurde on supposant que Q admet une racine réelle α qui ne soit pas une valeur propre de f . Soit $\tilde{Q} \in \mathbb{R}[x]$ tel que $\tilde{Q}(x)(x-\alpha) = Q(x)$. On a donc

$$\tilde{Q}(f) \circ (f - \alpha \text{id}_E) = Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Comme $\alpha \notin \text{Sp}(f)$, $f - \alpha \text{id}_E$ est un endomorphisme de dimension finie bijectif. $(f - \alpha \text{id}_E)^{-1}$ a un sens et

$$\tilde{Q}(f) = 0_{\mathcal{L}(E)} \circ (f - \alpha \text{id}_E)^{-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

On en déduit que \tilde{Q} est annulateur de f . Absurde, car

$$\deg \tilde{Q} < \deg Q$$

et Q est, par hypothèse, un polynôme annulateur de degré minimal. En conclusion, toute racine de Q est valeur propre de f .

Exercice 36

p. 20

VP36

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda \in \text{Sp}(AB)$, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, non nulle telle que $ABX = \lambda X$. En multipliant à gauche par B , on obtient

$$(BA)(BX) = B(ABX) = B(\lambda X) = \lambda(BX).$$

→ Si BX est non nulle, BX est vecteur propre pour la valeur propre λ et $\lambda \in \text{Sp}(BA)$.

→ Si BX est nulle, on a alors $\lambda X = A \cdot 0 = 0$. Comme X est non nulle, $\lambda = 0$. Dans ce cas la matrice AB n'est pas inversible. On montre* que BA ne l'est pas non plus, $\lambda = 0 \in \text{Sp}(BA)$. En résumé, pour $\lambda \in \text{Sp}(AB)$, $\lambda \in \text{Sp}(BA)$ c'est-à-dire

$$\text{Sp}(AB) \subset \text{Sp}(BA).$$

Par symétrie, on a l'inclusion dans l'autre sens, puis l'égalité par double-inclusion.

★ Détaillons ce passage.

Montrons par l'absurde que BA ne peut être inversible. En effet, si BA est inversible, il existe une matrice C telle que

$$(BA)C = I_n \quad \text{et} \quad C(BA) = I_n.$$

On peut réécrire ces relations sous la forme

$$B(AC) = I_n \quad \text{et} \quad (CB)A = I_n.$$

La matrice B est donc inversible à droite et A, inversible à gauche. Or, les notions d'inversibilité à gauche et à droite pour des matrices carrées sont équivalentes à l'inversibilité. Donc A et B sont inversibles. Par produit AB est aussi inversible, ce qui est exclu.

Exercice 37

p. 20

VP37

1. Soit $\lambda \in \text{Sp}(\varphi \circ \psi) \setminus \{0\}$. Il existe donc $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que

$$\varphi \circ \psi(x) = \lambda x \quad (\bullet)$$

En appliquant ψ , il vient

$$\psi \circ \varphi(\psi(x)) = \psi \circ \varphi \circ \psi(x) = \lambda \psi(x)$$

Précisons que $\psi(x) \neq 0_E$. En effet si $\psi(x) = 0$, on en déduirait avec (\bullet) que $\lambda = 0$. Cas exclu par hypothèse. On a donc vérifié que $\psi(x)$ est vecteur propre de $\psi \circ \varphi$ pour la valeur propre λ . D'où

$$\lambda \in \text{Sp}(\psi \circ \varphi).$$

En rajoutant 0,

$$\text{Sp}(\varphi \circ \psi) \cup \{0\} \subset \text{Sp}(\psi \circ \varphi) \cup \{0\}.$$

Par symétrie, on a l'inclusion réciproque

$$\text{Sp}(\varphi \circ \psi) \cup \{0\} \supset \text{Sp}(\psi \circ \varphi) \cup \{0\}.$$

Puis l'égalité

$$\text{Sp}(\varphi \circ \psi) \cup \{0\} = \text{Sp}(\psi \circ \varphi) \cup \{0\}.$$

2. Voir exercice 36.

3. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$.

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi(P)(x) &= \psi(P')(x) \\ &= \int_0^x P'(t) dt = P(x) - P(0). \end{aligned}$$

On vérifie que 0 est valeur propre de $\psi \circ \varphi$ car

$$E_0(\psi \circ \varphi) = \mathbb{R}_0[x].$$

De plus, pour $P \in \mathbb{R}[x]$, $\psi(P)$ est le polynôme primitive (qui s'annule en 0) de P. D'où

$$\varphi \circ \psi(P)(x) = P(x).$$

C'est-à-dire

$$\varphi \circ \psi = \text{id}_{\mathbb{R}[x]}$$

et 0 n'est pas valeur propre.

Cet exemple montre que l'égalité

$$\text{Sp}(\varphi \circ \psi) = \text{Sp}(\psi \circ \varphi)$$

n'est pas toujours vérifiée en dimension infinie.

Exercice 38

p. 20

VP38

Source ESCP

1. On remarque que la matrice A (donc l'endomorphisme associé φ) est de rang 2 (les deux premières colonnes sont indépendantes, les autres étant proportionnelles à la seconde).

L'image $\text{Im } \varphi$ est de dimension 2; une base est, par exemple :

$$\left(e_1, \sum_{i=1}^n e_i \right).$$

Par le théorème du rang, le noyau $\text{Ker } \varphi$ est de dimension $(n-2)$. En utilisant les colonnes de A, la famille $(e_2 - e_3, e_2 - e_4, \dots, e_2 - e_n)$ forme une base de ce noyau.

2. Ainsi 0 est valeur propre de A, et le sous-espace propre qui lui est associé est $\text{Ker } A$ de dimension $(n-2)$.

Les vecteurs propres de φ associés aux valeurs propres non nulles sont dans $\text{Im } \varphi$ (puisque $\varphi(x) = \lambda x, \lambda \neq 0$).

Soit (e_1, v) , avec $v = \sum_{i=1}^n e_i$ la base de $\text{Im } \varphi$ précédemment déterminée, et ψ l'endomorphisme de $\text{Im } \varphi$ induit par φ .

On a $\psi(e_1) = v, \psi(v) = v + (n-1)e_1$. Donc

$$M = M_{(e_1, v)}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de ψ sont

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{4n-3}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{4n-3}}{2}$$

et on peut prendre pour vecteurs propres associés $(\lambda_i - 1)e_1 + v$.

Ces valeurs propres et ces vecteurs propres sont les éléments propres de φ manquants.

Exercice 39

p. 20

VP39

1. Soit $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ une matrice colonne appartenant au noyau de A. Montrons que $X = 0_{n,1}$ en raisonnant par l'absurde. L'équation $AX = 0_{n,1}$ donne

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0.$$

Puis, par l'inégalité triangulaire

$$|a_{ii} x_i| = \left| \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij} x_j| \leq \max_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket} (|x_k|) \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Soit i_0 un indice réalisant le maximum :

$$|x_{i_0}| = \max_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket} (|x_k|).$$

Comme X est non nulle, $|x_{i_0}| > 0$, et on obtient

$$|a_{i_0 i_0}| |x_{i_0}| \leq |x_{i_0}| \sum_{j \neq i_0} |a_{ij}|.$$

En simplifiant par $|x_{i_0}| \neq 0$, on obtient une contradiction avec l'hypothèse de diagonale dominante de A. En conclusion,

$$\text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\},$$

puis la matrice

$$\boxed{A \text{ est inversible.}}$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $A = B - \lambda I_n$. Si

$$\lambda \notin \bigcup_{i=1}^n [b_{ii} - r_i; b_{ii} + r_i]$$

alors pour tout indice i

$$|\lambda - b_{ii}| > r_i.$$

Comme $|a_{i,i}| = |\lambda - b_{ii}|$ et $b_{ij} = a_{ij}$ pour $i \neq j$, la relation précédente se réécrit

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|.$$

La matrice A est à diagonale dominante. D'après la question 1, la matrice A est inversible et $\lambda \notin \text{Sp}(B)$. Il vient

$$\bigcup_{i=1}^n [b_{ii} - r_i; b_{ii} + r_i] \subset \overline{\text{Sp}(B)}$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\text{Sp}(B) \subset \bigcup_{i=1}^n [b_{ii} - r_i; b_{ii} + r_i].}$$

3. D'après ce qui précède

$$\text{Sp}(A) \subset [-2; 2].$$

Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$, $\lambda/2 \in [-1; 1]$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\theta \in [0; \pi]$ tel que $\cos(\theta) = \lambda/2$. D'où le résultat.

Exercice 40

p. 21

VP40

1. Justifions, par double inclusion, que

$$\text{Sp}(A) = \text{Sp}(\varphi_A).$$

\square Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Il existe donc $e \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$ telle que $Ae = \lambda e$. Posons ensuite, la matrice E définie par concaténation

$$E = [e, 0_{n,1}, 0_{n,1}, \dots, 0_{n,1}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \varphi_A(E) &= AE = [Ae, A0_{n,1}, \dots, A0_{n,1}] \\ &= [\lambda e, 0_{n,1}, \dots, 0_{n,1}] \\ &= \lambda E. \end{aligned}$$

Comme $E \neq 0_n$, c'est un vecteur propre pour la valeur propre λ de φ_A . D'où

$$\lambda \in \text{Sp}(\varphi_A).$$

\square Réciproquement, soit $\lambda \in \text{Sp}(\varphi_A)$. Il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0_n\}$ telle que

$$\varphi_A(M) = \lambda M.$$

La matrice M est non nulle, elle admet donc une colonne C_{i_0} non nulle.

$$\varphi_A(M) = [AC_1 \quad AC_2 \quad \dots \quad AC_{i_0} \quad \dots \quad AC_n]$$

$$\lambda M = [\lambda C_1 \quad \lambda C_2 \quad \dots \quad \lambda C_{i_0} \quad \dots \quad \lambda C_n].$$

D'où $AC_{i_0} = \lambda C_{i_0}$.

C_{i_0} est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ . Ainsi $\lambda \in \text{Sp}(A)$.

Finalement

$$\boxed{\text{Sp}(A) = \text{Sp}(\varphi_A).}$$

2. Soit λ une valeur propre commune de A et φ_A . L'application

$$\Phi: \begin{cases} E_\lambda(A)^n & \rightarrow E_\lambda(\varphi_A) \\ (C_1, C_2, \dots, C_n) & \mapsto [C_1, C_2, \dots, C_n]. \end{cases}$$

est bien définie, linéaire et bijective. C'est un isomorphisme et on a égalité des dimensions :

$$\dim(E_\lambda(A)^n) = \dim E_\lambda(\varphi_A).$$

Par la formule sur la dimension d'un produit cartésien

$$\boxed{n \dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(\varphi_A).}$$

Exercice 41

p. 21

VP41

1. Vérifier que $A^3 = 0_4$. Autrement dit, $P(x) = x^3$ est un polynôme annulateur de A. Comme 0 est l'unique racine de P

$$\text{Sp}(A) \subset \{0\}.$$

Comme A n'est pas inversible, 0 est une valeur propre de A. D'où

$$\boxed{\text{Sp}(A) = \{0\}.}$$

Le raisonnement est identique pour B.

$$\boxed{\text{Sp}(B) = \{0\}.}$$

On a aussi

$$\boxed{\text{Tr}(A) = 0 = \text{Tr}(B).}$$

Notons (C_1, C_2, C_3, C_4) la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On montre que

$$\text{Ker}(A) = \text{Vect}(C_1, C_4) \quad \text{et} \quad \text{Ker}(B) = \text{Vect}(C_1, C_3).$$

En particulier

$$\boxed{\dim E_0(A) = \dim E_0(B).}$$

Les espaces propres ont même dimension.

2. \square Faux.

Raisonnons par l'absurde en supposant les matrices semblables. Il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible telle que

$$A = P^{-1}BP$$

puis

$$A^2 = P^{-1}B^2P.$$

Absurde, $B^2 = 0_4$ mais $A^2 \neq 0_4$.

Exercice 42

p. 21

VP42

1. Soient $f \in E$ et F une primitive de f . Par définition de l'intégrale, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt = \frac{1}{2} (F(x+1) - F(x-1)).$$

Comme F et les fonctions affines $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto x-1$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} , par composition et combinaisons linéaires, $T(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

$$T(f) \in E_1.$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$T(f)(x) = \frac{1}{2} (1 \cdot F'(x+1) - 1 \cdot F'(x-1)) = \frac{1}{2} (f(x+1) - f(x-1)).$$

2. Soient $f, g \in E, \lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(\lambda f + g)(x) &= \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} (\lambda f(t) + g(t)) dt \\ &= \lambda \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt + \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} g(t) dt \\ &= \lambda T(f)(x) + T(g)(x). \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g).$$

L'application est linéaire et son ensemble de départ s'identifie à son ensemble d'arrivée :

T est un endomorphisme de E .

- La question 1 précise que l'image de T est incluse dans E_1 et donc strictement incluse dans E . Par exemple, la fonction valeur absolue qui appartient à E mais pas E_1 ne peut avoir d'antécédent par T . En résumé

T n'est pas surjective.

3. On trouve que $T(s) = \mathbf{0}$ (l'application nulle). Le noyau de T n'étant pas réduit à $\{0\}$,

T n'est pas injective.

4. Procédons par disjonction des cas :

- Si $a = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$T(f_0)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} 1 dt = \frac{1}{2} (x+1 - (x-1)) = 1 = \varphi(0) \cdot f_0(x).$$

On retrouve bien

$$T(f_0) = \varphi(0) f_0.$$

- Si $a \in \mathbb{R}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

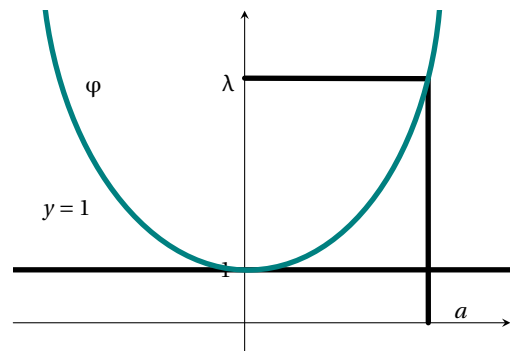
$$\begin{aligned} T(f_a)(x) &= \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} e^{at} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{at}}{a} \right]_{x-1}^{x+1} \\ &= \frac{e^{ax+a} - e^{ax-a}}{2a} = e^{ax} \frac{e^a - e^{-a}}{2a} \\ &= \varphi(a) e^{ax} = \varphi(a) f_a(x). \end{aligned}$$

Ce calcul étant valable pour tout réel x arbitrairement choisi

$$T(f_a) = \varphi(a) f_a.$$

5. Une étude de fonction donne φ continue sur \mathbb{R} et d'image

$$\text{Im } \varphi = [1; +\infty[.$$



Dès lors, pour tout $\lambda \in [1; +\infty[$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\varphi(a) = \lambda.$$

C'est le théorème des valeurs intermédiaires. D'après le calcul précédent, $\varphi(a)$ est valeur propre avec comme vecteur propre $f_a \neq \mathbf{0}$. Donc λ est valeur propre et

$$[1; +\infty[\subset \text{Sp}(T).$$

- L'inclusion est stricte, T n'étant pas injective, 0 est aussi valeur propre.

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen : redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes.^a

GOETHE

Écrivain allemand (1749-1832)

a. Les mathématiciens sont comme les Français : quoi que vous leur disiez, ils le traduisent dans leur propre langue et le transforment en quelque chose de totalement différent.

1

Définitions

DÉFINITION

endomorphisme diagonalisable

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que φ est **diagonalisable** s'il existe une base de E qui soit composée de vecteurs propres de φ .

Exemples.

• Dans \mathbb{R}^2 . Posons $u = (1, -1)$, $v = (0, 2)$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x, y) = (-x, 3x + 2y)$. On vérifie que $\varphi(u) = -u$ et $\varphi(v) = 2v$. Résumons :

- u et v sont deux vecteurs propres de φ .
- u et v sont deux vecteurs non colinéaires. Ils forment une famille libre de \mathbb{R}^2 . (u, v) est donc une base de \mathbb{R}^2 .

L'endomorphisme φ est un endomorphisme diagonalisable de \mathbb{R}^2 .

• L'endomorphisme $\psi : P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto (x-1)P'(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ est diagonalisable. En effet, si on pose $P_i(x) = (x-1)^i$ pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on calcule $\psi(P_i) = iP_i$. De plus, la famille (P_i) est libre (de degré échelonné) et contient autant de vecteurs que la dimension de $\mathbb{R}_n[x]$. On a donc une base de vecteurs propres. L'endomorphisme ψ est un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_n[x]$.

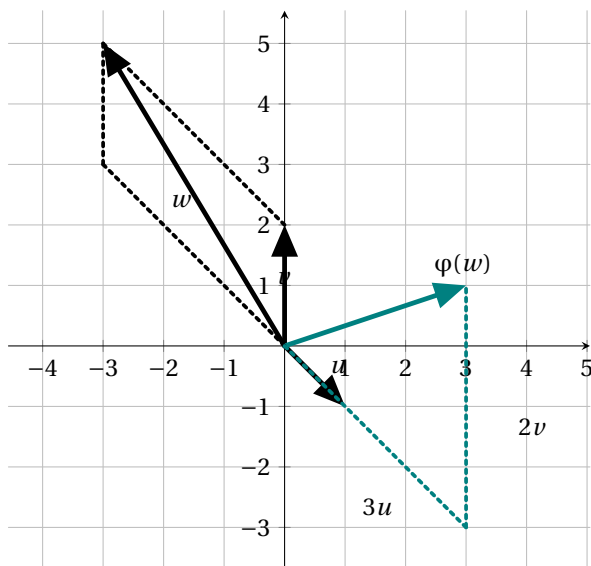
Exercice 44



◆ Soient $\varphi, s \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. *Les questions sont indépendantes.*

1. Justifier que si φ est diagonalisable et bijectif, φ^{-1} est aussi diagonalisable.
2. Que dire de φ si ce dernier est diagonalisable et n'admet qu'une seule valeur propre?
3. Que dire de φ si ce dernier est diagonalisable et $\text{rg}(\varphi^2) = 0$?
4. ◆◆ Si φ est diagonalisable et s bijective. Justifier que $s \circ \varphi \circ s^{-1}$ est aussi un endomorphisme diagonalisable.

p. 60



Interprétation géométrique

Posons de plus $w = (-3, 5)$. On a $w = -3u + v$. Comme φ est linéaire.

$$\begin{aligned}\varphi(w) &= -3\varphi(u) + \varphi(v) \\ &= 3u + v = (3, 1).\end{aligned}$$

Ce court calcul illustre un fait important. Les calculs dans une base de vecteurs propres sont beaucoup plus faciles puisque les restrictions de φ aux sous-espaces propres sont des homothéties.

$$\varphi|_{E_\lambda(\varphi)} : u \mapsto \lambda u.$$

DÉFINITION

matrice diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A est **diagonalisable** s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}.$$

Autrement dit, une matrice est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale. Dans ce cas, P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à une base de vecteurs propres de A .

Remarque. Si la matrice A est diagonalisable, alors les colonnes de P forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A . De plus, le spectre de A s'identifie au spectre de D qui correspond donc aux coefficients diagonaux de D .

Preuve. En effet, si on note $P = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n]$, $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ et E_i est la matrice colonne constituée de zéro sauf un 1 en position $(i, 1)$. On a donc $PE_i = C_i$, $DE_i = d_i E_i$ et

$$AC_i = (PDP^{-1})PE_i = PDE_i = P(d_i E_i) = d_i PE_i = d_i C_i \quad \text{et} \quad C_i \neq 0_{n,1}.$$

La matrice colonne C_i est vecteur propre de A pour la valeur propre d_i . Comme P est inversible, la famille des colonnes de P est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. D'où le résultat. ■

Exemples.

• Reprenons l'exemple page 13 avec $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. On a montré que

$$\text{Sp}(A) = \{1, 2, -4\} \quad \text{avec} \quad E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad E_2 = \text{Vect} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E_{-4} = \text{Vect} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

On pose
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

On vérifie numériquement :

```
D = np.array([[1, 0, 0], [0, 2, 0], [0, 0, -4]])
#attention à l'ordre des
#valeurs propres
P = np.array([[1, 4, 2], [1, 3, -3], [1, -2, 2]])
P_inv = np.linalg.inv(P)

print(P @ D @ P_inv)
```

```
>>> print(P @ D @ P_inv)
[[-2.22044605e-16  2.00000000e+00 -1.00000000e+00]
 [ 3.00000000e+00 -2.00000000e+00  0.00000000e+00]
 [-2.00000000e+00  2.00000000e+00  1.00000000e+00]]
```

On retrouve bien $A = PDP^{-1}$ (attention aux arrondis près).

- La matrice $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Preuve. Raisonnons par l'absurde en la supposant diagonalisable. Elle est donc semblable à une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de T . Or, T est triangulaire avec seulement 1 sur la diagonale. 1 est la seule valeur propre et T serait semblable à la matrice identité. Absurde, la seule matrice semblable à l'identité est l'identité. ■

Exercice 45



◆ Vrai ou faux?

1. Si A est diagonalisable alors A^2 est diagonalisable. ✓ ×
2. Si A^2 est diagonalisable alors A est diagonalisable. ✓ × p. 60
3. Si A est inversible, A est diagonalisable si et seulement si A^{-1} est diagonalisable. ✓ ×
4. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable. ✓ ×

DA2

Exercice 46



- ◆◆ \mathcal{Q} Montrer que si $\text{rg}(A^2) < \text{rg}(A)$, alors A ne peut-être diagonalisable.

p. 60

DA3

PROPOSITION

lien en dimension finie

Soit E , un espace vectoriel de dimension finie.

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice de φ dans une base \mathcal{B} de E . On a l'équivalence entre les énoncés.

- i) L'endomorphisme φ est diagonalisable.
- ii) La matrice A est diagonalisable.

Preuve. Raisonnons par double implication.

⇒ Supposons l'endomorphisme φ diagonalisable. Il existe donc une base $\mathcal{C} = (e_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ de vecteurs propres. Chaque $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que

$$\varphi(e_i) = \lambda_i e_i.$$

La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ est alors diagonale

$$\begin{array}{cccccc} & \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & & & \varphi(e_n) \\ \left[\begin{array}{cccccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \ddots & 0 & \\ \vdots & \ddots & * & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n & \end{array} \right] & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

D'après la formule de changement de base

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{-1}.$$

La matrice A est donc diagonalisable.

⇐ Réciproquement, si A est diagonalisable, il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et D diagonale telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

Il existe une base \mathcal{C} de E telle que $P = P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ et dans ce cas $D = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi)$. On constate alors que \mathcal{C} est une base de vecteurs propres de φ qui est donc un endomorphisme diagonalisable. ■

2 Caractérisations

2.1 Version « endomorphisme »

PROPOSITION

caractérisation avec les s.e.p

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. On a l'équivalence entre les énoncés suivants.

- i) L'espace vectoriel E est somme directe des sous-espaces propres de φ .
- ii) L'endomorphisme φ est diagonalisable.

Preuve. Raisonnons par double implication.

⇒ Supposons i). C'est-à-dire

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi)} E_{\lambda}(\varphi).$$

Chaque vecteur de $E_{\lambda}(\varphi)$ non nul est un vecteur propre associé à la valeur propre λ . Fixons, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(\varphi)$, \mathcal{B}_{λ} , une base de $E_{\lambda}(\varphi)$. Cette base est donc constituée de vecteur propre de φ . Si \mathcal{B} est la famille obtenue par concaténation des bases \mathcal{B}_{λ} de $E_{\lambda}(\varphi)$ pour $\lambda \in \text{Sp}(\varphi)$, alors \mathcal{B} est une base de E constituée de vecteurs propres de φ (voir théorème page ??). L'endomorphisme φ est donc diagonalisable.

⇐ Supposons ii) et soit \mathcal{B} une base de vecteurs propres de φ . Notons \mathcal{B}_{λ} la famille obtenue en regroupant tous les vecteurs propres de \mathcal{B} associées à la valeur propre λ . Comme $E_{\lambda}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel, il est stable par combinaisons linéaires et

$$\text{Vect}(\mathcal{B}_{\lambda}) \subset E_{\lambda}(\varphi).$$

Par somme

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi)} \text{Vect}(\mathcal{B}_{\lambda}) \subset \sum_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi)} E_{\lambda}(\varphi) \subset E.$$

Comme \mathcal{B} (concaténation des familles \mathcal{B}_{λ}) est une base de E, on a aussi

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi)} \text{Vect}(\mathcal{B}_{\lambda}) = \text{Vect}(\mathcal{B}) = E.$$

Nécessairement

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi)} E_{\lambda}(\varphi) = E.$$

On conclut en rappelant que la somme des sous-espaces propres est toujours directe. ■

◆ Exemple

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Posons pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$, le polynôme $\varphi(P)$ défini par

$$\varphi(P)(x) = P(1)S(x) - P(x) \quad \text{où} \quad S(x) = \sum_{k=0}^n x^k.$$

On vérifie que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$. Montrer que :

$$\mathbb{R}_n[x] = \text{Ker}(\varphi + \text{id}_{\mathbb{R}_n[x]}) \oplus \text{vect}(S).$$

En en déduire que φ est diagonalisable.

Exercice 47



p. 61

DA4

COROLLAIRE

caractérisation avec les dimensions

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. On a l'équivalence entre les énoncés suivants.

- i) $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi)} \dim(E_\lambda(\varphi)) = \dim(E)$.
- ii) L'endomorphisme φ est diagonalisable.

Preuve. C'est une conséquence directe du théorème précédent et du théorème page ?? qui affirme l'équivalence entre :

- i) $\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) = \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$.
- ii) La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe.

Où F_1, \dots, F_p sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E . ■

Remarque. Comme $\dim(E_\lambda(\varphi)) \geq 1$, on retrouve le fait qu'un endomorphisme de dimension finie a au plus $\dim(E)$ valeurs propres.

Exemple. Posons l'endomorphisme $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = {}^tM$. On remarque que $E_1(\varphi)$ et $E_{-1}(\varphi)$ correspondent respectivement aux sous-espaces vectoriels des matrices symétriques et antisymétriques. Or, un exercice classique donne

$$\dim(E_1(\varphi)) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \dim(E_{-1}(\varphi)) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

En particulier $\dim(E_1(\varphi)) + \dim(E_{-1}(\varphi)) = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Nécessairement, φ n'a pas d'autre valeur propre et est diagonalisable.

COROLLAIRE

cas particulier

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie.

- Si** φ possède $\dim(E)$ valeurs propres distinctes,
- alors** φ est diagonalisable et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

Preuve. Supposons que φ possède $n = \dim(E)$ valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Par définition d'une valeur propre

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \dim(E_{\lambda_i}(\varphi)) \geq 1.$$


Par somme :

$$\sum_{i=1}^n \dim(E_{\lambda_i}(\varphi)) \geq \sum_{i=1}^n 1 = n = \dim(E).$$

Or, on a aussi $\bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}(\varphi) \subset E$ puis $\sum_{i=1}^n \dim(E_{\lambda_i}(\varphi)) = \dim\left(\bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}(\varphi)\right) \leq \dim(E)$.

Par encadrement $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi)} \dim(E_\lambda(\varphi)) = \dim(E)$

et d'après la caractérisation précédente, φ est diagonalisable. ■

 **Attention.** La réciproque est fautive. Par exemple, pour E de dimension $n \geq 2$, l'endomorphisme id_E est diagonalisable avec seulement une valeur propre (1).

Exercice 48



◆ Exemple

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Posons pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$, le polynôme $\varphi(P)$ défini par

$$\varphi(P)(x) = \frac{1}{n}x(1-x)P'(x) + xP(x).$$

p. 61

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on pose $P_k(x) = x^k(1-x)^{n-k}$. Calculer $\varphi(P_k)$.
3. Justifier que φ est diagonalisable.

DA5

2.2 Version « matricielle »

Commençons par une remarque. On introduit l'endomorphisme

$$\varphi_A : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto AX. \end{cases}$$

Ainsi, pour $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\varphi_A(V) = AV$ et on a l'équivalence : V est vecteur propre de A si et seulement si V est vecteur propre de φ_A . Plus généralement,

$$\ker(A) = \ker(\varphi_A).$$

Justifions maintenant que la matrice A est diagonalisable si et seulement si φ_A est un endomorphisme diagonalisable.

Preuve. Raisonnons par double implication.

⇒ Supposons la matrice A diagonalisable. Soient P inversible et D diagonale telles que $A = P^{-1}DP$. Nous avons vu que les colonnes de P forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres de A . C'est aussi une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres de φ_A qui est donc diagonalisable.

⇐ Réciproquement, si φ_A est un endomorphisme diagonalisable, φ_A (et donc A) admet une base de vecteurs propres. Notons $(C_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$, une telle base. Pour tout indice i , il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que $AC_i = \lambda_i C_i$. Si on pose $P = [C_1, C_2, \dots, C_n]$

$$\begin{aligned} AP &= A[C_1, C_2, \dots, C_n] \\ &= [AC_1, AC_2, \dots, AC_n] \\ &= [\lambda_1 C_1, \lambda_2 C_2, \dots, \lambda_n C_n] = PD \quad \text{avec} \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n). \end{aligned}$$

Comme la famille $(C_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est une base, P est inversible et $A = PDP^{-1}$. La matrice A est diagonalisable.

Regroupons et traduisons les résultats précédents dans le cadre matriciel.

THÉORÈME

caractérisations

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les énoncés suivants sont équivalents.

- i) La matrice A est diagonalisable.
- ii) Il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A .
- iii) $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est somme directe des sous-espaces propres de A .
- iv) $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n$.

Preuve. C'est une conséquence directe des résultats précédents appliqué à l'endomorphisme φ_A car nous avons vu que la matrice A est diagonalisable si et seulement si φ_A est un endomorphisme diagonalisable.

Exemple. La matrice Attila

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et J la matrice de taille (n, n) constituée uniquement de 1. Il est clair que J est de rang 1, la formule du rang donne

$$\dim(E_0(J)) = \dim(\ker J) = n - \text{rg}(J) = n - 1.$$

Si (E_1, \dots, E_n) désigne la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on vérifie que les vecteurs

$$W_j = E_1 - E_j \quad \text{avec} \quad j \in \llbracket 2; n \rrbracket$$

donnent une base du noyau de J . De plus, si on pose

$$V = \sum_{j=1}^n E_j \quad \text{alors} \quad JV = nV \quad \text{et} \quad V \neq 0_{n,1}.$$

Il vient $\dim(E_1(J)) \geq 1$ et même égalité.

Vérifions séparément chacun des énoncés :

iv) $\dim E_0(J) + \dim E_n(J) = (n-1) + 1 = n.$

iii) On sait déjà que $E_0(J)$ et $E_{n-1}(J)$ sont en somme directe et

$$\dim(E_0(J) \oplus E_{n-1}(J)) = \dim(E_0(J)) + \dim(E_{n-1}(J)) = n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

D'où $E_0(J) \oplus E_{n-1}(J) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$

ii) On montre que la famille $(V, W_2, W_3, \dots, W_n)$ est libre. Comme elle contient autant de vecteurs que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de J .

i) Si on pose

$$P = [V \quad W_2 \quad \dots \quad W_n] \quad \text{et} \quad D = \text{diag}(n, 0, \dots, 0).$$

On vérifie que P est inversible et $AP = PD$, puis $A = PDP^{-1}$.

PROPOSITION

n valeurs propres

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A admet n valeurs propres distinctes,

alors A est diagonalisable et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

Python. La commande `eigvals` permet le calcul de valeurs propres. Par exemple :

Editeur

```
import numpy.linalg as al
# On importe la sous-bibliothèque
# linalg
A=np.array([[1,3,0],[0,-2,0],[-1,-2,0]])
# On définit la matrice A
print(al.eigvals(A))
```

Console

```
>>> # script executed
[ 0.  1. -2.]
```

Selon ce calcul, 0, 1 et -2 sont toutes les valeurs propres de A . La matrice A est diagonalisable.

3

Compléments

3.1

Cas particuliers

Cas des matrices de taille 2

Rappelons que pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \iff \det(A - \lambda I_2) = 0.$$

Exercice 49



Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonalisable. Notons λ_1 et λ_2 , les deux valeurs propres éventuellement confondues de la matrice A .

1. Montrer que $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(A)$ et $\lambda_1 \lambda_2 = \det(A)$.

p. 61

2. En minimisant le nombre de calculs, montrer que la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable dans \mathbb{R} .

DA6

Exercice 50



◆ Soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Démontrer que A est diagonalisable.

p. 62

DA7

Cas des matrices triangulaires

Limitons l'étude à des exemples.

Exercice 51



Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. ☞ Est-ce que les matrices suivantes sont diagonalisables?

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

p. 62

2. ☞ À quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice $M_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ est diagonalisable?

DA8

Cas des matrices symétriques réelles

Anticipons sur un théorème dont on donnera un énoncé plus complet au second semestre.

THÉORÈME

cas symétrique, première version

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Résultat admis.

Exercice 52



Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que l'endomorphisme suivant est diagonalisable.

$$\varphi: \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (2x + y + z, x + 3z, x + 3y - z). \end{cases}$$

p. 62

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice symétrique appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^n = I_n$. Calculer A^2 .

DA9

Cas des projecteurs et symétries

- Soit p , un projecteur de E (avec $p \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $p \neq \text{id}_E$). En reprenant l'étude effectué à la page 8, on a

$$E = E_0(p) \oplus E_1(p).$$

Les projecteurs sont des endomorphismes diagonalisables. Si \mathcal{B} est une base adaptée à la décomposition en sous-espaces propres, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\dim E_1(p)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\dim E_0(p)}$

En particulier, on constate que $\text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)) = \text{rg}(p)$.

• Soit s , une symétrie ($s \neq \pm \text{id}_E$). Grâce à la décomposition $E = E_{-1}(s) \oplus E_1(s)$, on vérifie que toutes les symétries sont diagonalisables et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\dim E_1(p)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\dim E_{-1}(p)}$

3.2 Pratique de la diagonalisation

En reprenant les méthodes étudiées page 13, traiter les exercices suivants.

Exercice 53



◆ Si possible, diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

p. 62

Diagonaliser la matrice A signifie : donner, si possible, une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

DA10

Exercice 54



◆ Considérons l'application φ défini sur $\mathbb{R}_2[x]$ par $\varphi(P)(x) = x(1-x)P'(x) + 2xP(x)$.

1. Montrer que φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Exprimer la matrice de φ dans la base canonique. La diagonaliser.
3. Conclure en donnant une base de vecteurs propres de φ .

p. 63

DA11

Astuce. Dans la recherche des valeurs, il ne faut pas oublier que pour une matrice diagonalisable

$$\text{Tr}(A) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda \times \dim(E_{\lambda}(A)).$$

Exercice 55



◆ Prouver la remarque précédente.

2. *Application.* Soit A définie par $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$.

p. 63

Sachant que $\text{rg}(A + 2I_n) = 1$, que peut-on en déduire sur la diagonalisation de A?

DA12

3.3 Quelques applications de la diagonalisation

Exercice 56



◇ Calcul des puissances

Calculer pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p où la matrice A est étudiée à l'exercice 53.

p. 63

#DA13

◇ Polynôme de matrices et racine carrée d'une matrice

Exercice 57



On pose

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Vérifier que A est diagonalisable et la diagonaliser.
2. En déduire l'inversibilité de A et A^{-1} .
3. Expliquer comment calculer $Q(A)$ où $Q \in \mathbb{R}[x]$. Préciser un polynôme annulateur non nul de A .
4. Déterminer une matrice B telle que $B^2 = A$.

p. 63

#DA14

Les applications sont nombreuses. Citons par exemple :

- La recherche du commutant (voir exercice 82, p.55).
- La résolution des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (voir exercice 83, p.56).
- La résolution de systèmes différentiels linéaires (voir exercice 84, p.56).



Exercices



Exercice 58. ✧ Montrer que la matrice $A = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

DA15

>> Solution p. 64

Exercice 59. ✦ Parmi les matrices élémentaires $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, lesquelles sont diagonalisables?

DA16

>> Solution p. 64

Exercice 60. ✧ Soit φ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[x], \varphi(P)(x) = (2x+1)P(x) - (x^2-1)P'(x)$. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$. Est-il diagonalisable?

DA17

>> Solution p. 64

Exercice 61. ✧ Montrer que les matrices suivantes sont semblables

DA18

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

>> Solution p. 64

Exercice 62. ✧ Soit φ un endomorphisme de E de dimension finie. Montrer que φ est un projecteur si et seulement si φ est diagonalisable et $\text{Sp}(\varphi) \subset \{0, 1\}$.

DA19

>> Solution p. 64

Exercice 63. ✦✦ **Diagonalisation avec un paramètre**

DA20

Pour tout réel a , on pose

$$M_a = \begin{bmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On vérifie par le calcul que $Q(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a$ est annulateur de M_a .

- Justifier que pour $a = 1$, M_a ne peut être diagonalisable.
- Déterminer les réels a pour lesquels M_a est diagonalisable.

>> Solution p. 65

Exercice 64. ✦ Pour tout n entier non nul, on considère la matrice

DA21

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1/n & 1/n \\ -1/n & (n+2)/n & 1/n \\ 1/n & -1/n & 1 \end{bmatrix}.$$

- Montrer sans calculs superflus que 1 et $1 + 1/n$ sont les valeurs propres de A_n .
- La matrice A_n est-elle diagonalisable? inversible?
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n la matrice produit : $B_n = A_1 A_2 \dots A_n$. La matrice B_n est-elle diagonalisable? inversible? Si oui, déterminer B_n^{-1} .

>> Solution p. 65

Exercice 65. ✦ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \text{rg}(A - \lambda I_n) = (\text{card}(\text{Sp}(A)) - 1)n$.

DA22

>> Solution p. 66

Exercice 66. ✦ On considère l'application φ , qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ associe $\varphi(P) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}$, où $P^{(k)}$ désigne la dérivée k -ième de P avec la convention $P^{(0)} = P$.

DA23

- Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
- Est-ce que φ est diagonalisable?

>> Solution p. 66

Exercice 67. ✦ Posons $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = AM$.

DA24

- Déterminer la matrice de φ dans la base canonique.
 - Trouver un polynôme annulateur de φ .
 - L'endomorphisme φ est-il diagonalisable?
- On définit maintenant les endomorphismes ψ et s de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $\psi(M) = MA$ et $s(M) = {}^tM$.
 - Vérifier que $\psi = s \circ \varphi \circ s^{-1}$.
 - En déduire un polynôme annulateur de ψ . Est-ce que l'endomorphisme ψ est diagonalisable?

>> Solution p. 66

Exercice 68. ♦♦♦

D'après EDHEC 2014 # DA24

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et A une matrice non nulle donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application f qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = \text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A.$$

- Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, exprimer $(f \circ f)(M)$ à l'aide de $\text{Tr}(A)$ et $f(M)$.
 - En déduire un polynôme annulateur de f . Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de f ?
- Montrer que 0 est valeur propre de f .
 - Montrer que, si $\text{Tr}(A) = 0$, alors f n'est pas diagonalisable.
- On suppose dans cette question que la trace de A est non nulle.
 - Préciser la dimension de $\text{Ker}(f)$.
 - En déduire que f est diagonalisable.

>> Solution p. 67

Exercice 69. ♦♦♦ **Diagonalisation des matrices de rang 1**

DA26

- Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si et seulement si il existe deux matrices colonnes non nulles U, V telles que $M = U^tV$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note U et V deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U^tV$ et on note $a = \text{Tr}(A)$.
 - Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
 - Vérifier que ${}^tVU = a$, puis que $A^2 = aA$.
 - Justifier que si $a = 0$ alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - On suppose dans la suite $a \neq 0$. Calculer AU . Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.
 - Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 soit diagonalisable.

>> Solution p. 67

Exercice 70. ♦♦♦ Soit φ un endomorphisme de E admettant un polynôme annulateur P .

DA27

- On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $P(x) = x(x - \alpha)$. Vérifier que les sous-espaces propres $E_0(\varphi)$ et $E_\alpha(\varphi)$ sont supplémentaires dans E . En déduire que φ est diagonalisable.
- On suppose maintenant que P est de degré 2 avec deux racines distinctes. Montrer que φ est diagonalisable.

>> Solution p. 68

Exercice 71. ♦♦♦♦

D'après Orlaux HEC 2014 # DA28

Soit φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Montrer que $\varphi - \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ est un projecteur.
- En déduire les valeurs propres de φ ?
- Combien existe-t-il de droites vectorielles de \mathbb{R}^3 stables par φ ?
- Combien existe-t-il de plans vectoriels de \mathbb{R}^3 stables par φ ?

Exercice 72. ♦♦♦ Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, a et b deux réels tels que $ab \neq 0$. On note $M(a, b)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ donnée par : # DA29

$$M(a, b) = \begin{bmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

1. a) Calculer $M(a, b)^2$.
- b) Montrer que $M(a, b)^2$ est diagonalisable et trouver ses deux valeurs propres.

2. Soient $c, d \in \mathbb{R}^*$ et $M(c, d) = \begin{bmatrix} 0 & c & c & \cdots & c \\ d & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

- a) \mathcal{Q} Montrer que si $M(c, d)$ est semblable à $M(a, b)$ alors $ab = cd$.
- b) Établir la réciproque en considérant une matrice $P_\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon, 1, \dots, 1) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.
3. a) Est-ce que la matrice $M(a, b)$ est semblable à sa transposée?
- b) \mathcal{Q} À l'aide de la trace, montrer que si la matrice $M(a, b)$ est diagonalisable alors $ab > 0$.
- c) \mathcal{Q} On suppose que $ab > 0$, vérifier que $M(a, b)$ est semblable à une matrice du type $M(\alpha, \alpha)$. En déduire que $M(a, b)$ est diagonalisable.

>> Solution p. 69

Exercice 73. ♦ \mathcal{M} **Mélange algèbre et probabilité**

DA30

1. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, dans quel(s) cas la matrice

$$M_{a,b} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

est-elle diagonalisable?

2. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers, indépendantes et de même loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$.
 - a) Rappeler la loi de $X + Y$ et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.
 - b) Calculer la probabilité pour que la matrice $M_{X,Y}$ soit diagonalisable.

>> Solution p. 70

Exercice 74. ♦ **Exemple avec deux valeurs propres**

DA31

Soient E un espace vectoriel et φ un endomorphisme de E diagonalisable avec exactement deux valeurs propres λ et μ . Notons E_λ et E_μ les sous-espaces propres associés respectivement aux valeurs propres λ et μ .

1. Justifier que E_λ et E_μ sont supplémentaires dans E .
On peut donc considérer le projecteur p (respectivement q) sur E_λ parallèlement à E_μ (respectivement sur E_μ parallèlement à E_λ).
2. Préciser $p + q$, $p \circ q$ et $q \circ p$.
3. Vérifier que $\varphi = \lambda p + \mu q$ et plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^n = \lambda^n p + \mu^n q$.

>> Solution p. 70

Exercice 75. ♦♦♦ **Caractérisation de la diagonalisabilité via des projecteurs**

DA32

1. *Préliminaires*

Soient E_1, \dots, E_n des sous-espaces vectoriels de E . On suppose que $E_1 \oplus \dots \oplus E_n = E$. On note p_i le projecteur sur E_i parallèlement à $\oplus_{j \neq i} E_j$.

Montrer que $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$ et que $p_1 + \dots + p_n = \text{id}_E$.

2. *Application*


Soit E , un espace de dimension finie et φ , un endomorphisme de E .

- a) On suppose que φ est diagonalisable. Montrer qu'il existe des projecteurs $(p_i)_{i \in I}$ vérifiant $p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$ et des réels λ_i tels que

$$\varphi = \sum_{i \in I} \lambda_i p_i.$$

b) Étudier la réciproque.

>> Solution p. 70

Exercice 76. ♦♦♦  Soit E un espace vectoriel de dimension finie et φ un endomorphisme de E . L'objectif de l'exercice est de prouver l'équivalence entre les énoncés : # DA33

- i) L'endomorphisme φ est diagonalisable.
- ii) L'endomorphisme φ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
Pour rappel, un polynôme P est scindé à racines simples s'il existe r réels a_1, \dots, a_r deux à deux distincts tels que $P(x) = \prod_{i=1}^r (x - a_i)$.

1. Montrer que i) \Rightarrow ii).

2. Prouvons la réciproque. Supposons donc que φ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

a) Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Justifier que l'application suivante est bien posée, linéaire et injective

$$\Phi: \begin{cases} H & \rightarrow & \text{Ker } f \\ u & \rightarrow & g(u) \end{cases} \quad \text{avec } H \text{ un supplémentaire de } \text{Ker } g \text{ dans } \text{Ker } f \circ g.$$

En déduire que $\dim \text{Ker}(f \circ g) \leq \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(g))$.

b) Montrer plus généralement que pour $f_1, f_2, \dots, f_r \in \mathcal{L}(E)$,

$$\dim(\text{Ker}(f_1 \circ \dots \circ f_r)) \leq \sum_{j=1}^r \dim(\text{Ker}(f_j)).$$

c) En déduire la réciproque ii) \Rightarrow i).

3. Application



En déduire que si φ est diagonalisable et F est un sous-espace stable par φ , alors la restriction de φ à F est un endomorphisme diagonalisable.

>> Solution p. 70

Exercice 77. ♦♦ Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et φ l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}_n[x]$ défini par :

DA34

$$\varphi(P) : x \in \mathbb{R} \mapsto P(ax + b).$$

1. Donner la matrice de φ dans la base canonique de E . En déduire le spectre de φ .
2. Justifier que si $a \notin \{-1; 1\}$, l'endomorphisme φ est diagonalisable.
3.  Est-ce que φ est diagonalisable si $a = 1$?
4. a)  Après avoir justifié que tout polynôme peut s'écrire comme somme d'un polynôme pair et d'un polynôme impair, justifier que φ est diagonalisable pour $a = -1$ et $b = 0$.
- b) Généraliser à $a = -1$ et $b \neq 0$.


>> Solution p. 71

Exercice 78. ♦♦ Soient f et g deux endomorphismes de E qui commutent. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Soit $\lambda \in \text{Sp}(f)$ et x un vecteur propre associé. # DA35

1. Montrer que $E_\lambda(f)$ est un espace stable par g .
2. Justifier l'existence de $k \in \mathbb{N}$ tel que $g^k(x) \neq 0_E$ et $g^{k+1}(x) = 0_E$.
3. Vérifier que $g^k(x)$ est un vecteur propre de $f + g$ et préciser la valeur propre associée.
4. En déduire que $\text{Sp}(f) \subset \text{Sp}(f + g)$.

>> Solution p. 72

Exercice 79. ♦♦ Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[x]$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[x]$, associe le polynôme $\varphi(P)$ obtenu comme le reste de la division euclidienne de P par $(x - 1)^2$. # DA36

1. Vérifier que φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Donner M , la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.
3.  Calculer M^2 . Qu'en déduire sur φ ?
4. Est-ce que φ est diagonalisable ? Si oui, précisez les sous-espaces propres.

Problème 80. ♦♦♦♦ Exemple de convergence de matrices de Hessenberg

On dit qu'une suite de matrices $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice L si pour tout couple d'indice (i, j) , la suite des coefficients $([M_p]_{i,j})_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers le coefficient $L_{i,j}$. On note $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} L$.

On admet le résultat suivant : Si P, Q sont deux matrices fixées et $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} L$ alors $PM_pQ \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} PLQ$.

Soit a un réel strictement positif. On note $H(a)$ et $J(a)$ les deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par

$$H(a) = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a + \sqrt{a} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad J(a) = \begin{bmatrix} a & a & a \\ -1 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

1.
 - a) Trouver les valeurs propres de la matrice $H(a)$ et montrer qu'elle est diagonalisable.
 - b) Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que la suite de matrices $\left(\frac{1}{r^p} (H(a))^p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, le réel r est supérieur ou égal à $a + \sqrt{a}$.
 - c) Soit $Q(a) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{(a + \sqrt{a})^p} (H(a))^p$. Justifier que l'endomorphisme φ_a , canoniquement associé à $Q(a)$, est un projecteur, dont on précisera le rang, l'image et le noyau.
2. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que la suite de matrices $\left(\frac{1}{r^p} (J(a))^p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, le réel r est strictement supérieur à $\sqrt{a(1+a)}$.

>> Solution p. ??

Exercice 81. ♦♦♦♦

d'après ESCP 2012 # DA45

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et posons $E = \mathbb{R}[x]$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$u(P)(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(t) e^{-t} dt.$$

Enfin, on pose $e_k : x \mapsto x^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $u(P)$ est bien défini, puis calculer $u(e_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes réels de degré $\leq n$.
 - a) Montrer que $\mathbb{R}_n[x]$ est stable par u , c'est-à-dire $u(\mathbb{R}_n[x]) \subset \mathbb{R}_n[x]$.
 - b) Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ induit par u . Montrer que v est bijectif de $\mathbb{R}_n[x]$ sur $\mathbb{R}_n[x]$.
 - c) Calculer la matrice A de v dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
 - d) L'endomorphisme v est-il diagonalisable? Justifier.
 - e) Déterminer l'inverse A^{-1} de A .
4. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(x) \geq 0.$$

>> Solution p. ??

Quelques applications de la diagonalisation

Exercice 82. ♦♦♦♦ Recherche du commutant

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres distinctes. On définit le commutant de A par

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

1. Justifier que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est libre.
2. Vérifier que \mathcal{C} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\dim \mathcal{C} \geq n$.
3. Montrer l'existence d'une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
4. Soit $M \in \mathcal{C}$. Montrer que tout vecteur propre de A est un vecteur propre de M . En déduire que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale. En déduire que \mathcal{C} est de dimension inférieure ou égale à n .

5. Conclure en montrant que (I_n, A, \dots, A^{n-1}) est une base de \mathcal{E} .


>> Solution p. 73

Exercice 83. ♦♦ Suite récurrente linéaire d'ordre 2

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On note E l'espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n.$$

Soit u , une suite de E . On pose $U_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix}$.

1.  Déterminer une matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.
2. a) Montrer que la matrice A est diagonalisable. Puis, préciser une matrice inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
b) En déduire A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. À partir des questions précédentes, donner l'expression de u_n en fonction de n , a , u_0 et u_1 .
4. Donner une base de E . Comparer les résultats obtenus avec la méthode classique des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

>> Solution p. 73

Exercice 84. ♦♦ Système différentiel linéaire

DA39

1. *Preliminaires*

Soient I intervalle de \mathbb{R} et a , une fonction continue sur I . On considère l'équation différentielle

$$\forall x \in I, \quad y'(x) = a(x)y(x).$$

Soit A , une primitive de a sur I . Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $y(x) = Ce^{A(x)}$.

2. On considère le système différentiel suivant :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x' = 8x - 18y + 27z \\ y' = -3x + \frac{7}{2}y - 6z \\ z' = -4x + 7y - 11z \end{cases}$$

avec les conditions initiales : $x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0.$

a) Écrire le système (\mathcal{S}) ci-dessus sous la forme $X' = AX$, pour une certaine matrice A de taille 3×3 à coefficients réels qu'on déterminera où on a posé :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix}.$$

b) Vérifier que la matrice A est diagonalisable et déterminer une matrice inversible Q et une matrice diagonale D telles que $A = Q^{-1}DQ$.

Pour commencer, on pourra calculer AX_1, AX_2 où :

$$X_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On admet dans la suite que pour toute matrice Q à coefficients constants, si $Y = Q \cdot X$ alors $Y' = Q \cdot X'$.

- c) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $Y(t) = QX(t)$. Montrer que X est solution du système (E) si et seulement si les coordonnées u, v et w de Y sont solutions d'un système différentiel diagonal.
- d) Donner l'expression de $Y(t)$ puis les expressions de x, y et z .

>> Solution p. 74

Sujets de révision

Problème 85. ♦♦♦  Diagonalisation simultanée

D'après Orlaux ESCP 2016 # DA40

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E diagonalisable. On note $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ l'ensemble de ses valeurs propres et E_1, \dots, E_p les sous-espaces propres associés. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f , tel que $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$. Soit x un vecteur de F .

1. Montrer qu'il existe un unique p -uplet $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ tel que $x = x_1 + \dots + x_p$.

2. On suppose désormais $x \neq 0$. Montrer que, quitte à modifier l'ordre, on peut supposer qu'il existe $r \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $x_i = 0$ pour $i > r$ et $x_i \neq 0$ pour $i \leq r$. On a alors $x = x_1 + \dots + x_r$. On note V_x le sous-espace vectoriel engendré par (x_1, \dots, x_r) .
3. a) Montrer que (x_1, \dots, x_r) est une base de V_x .
 b) Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $f^j(x) \in V_x$.
 c) Déterminer la matrice A de la famille $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$ dans la base (x_1, \dots, x_r) de V_x .
 d) Notons C_1, \dots, C_r les colonnes de A et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des réels tels que $\sum_{j=1}^r \alpha_j C_j = 0$.
 Montrer que le polynôme $P(x) = \sum_{j=1}^r \alpha_j x^{j-1}$ est le polynôme nul. En déduire que A est inversible.
 e) Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_i \in F$, puis que $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$.
4. Soit g un endomorphisme de E , diagonalisable et commutant avec f (i.e. tel que $f \circ g = g \circ f$).
 Montrer qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à f et g .

>> Solution p. 74

Problème 86. ♦♦  **Réduction du crochet de Lie**

D'après EMLyon 2014 ECS # DA41

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Pour tout i de $\llbracket 1; n \rrbracket$, on note V_i la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la i -ième ligne qui est égal à 1. On admet que la famille $(V_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour tout (i, j) de $\llbracket 1; n \rrbracket^2$, on note $E_{i,j} = V_i {}^t V_j$. Ainsi, pour tout (i, j) de $\llbracket 1; n \rrbracket^2$, la matrice $E_{i,j}$ est la matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne qui est égal à 1. On admet que la famille $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout λ de \mathbb{R} , $A \neq \lambda I_n$. On considère l'application Φ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi_A(M) = AM - MA.$$

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Calculer $\Phi_A(I_n)$. L'endomorphisme Φ_A est-il injectif? surjectif?
3. Montrer que A et ${}^t A$ ont les mêmes valeurs propres.
4. Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que X (resp. Y) est un vecteur propre de A (resp. de ${}^t A$).
 Montrer que $X {}^t Y$ est un vecteur propre de Φ_A .
5. Soient (X_1, X_2, \dots, X_n) et (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note \mathcal{F} la famille $\mathcal{F} = (X_i {}^t Y_j)_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2}$.
 Montrer que, pour tout (i, j) de $\llbracket 1; n \rrbracket^2$, $V_i {}^t V_j$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par \mathcal{F} , et en déduire que la famille \mathcal{F} est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
6. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de Φ_A est l'ensemble des différences $\lambda - \mu$ lorsque λ et μ décrivent les valeurs propres de A .

>> Solution p. 75

Problème 87. ♦♦ **Matrices compagnons**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ des nombres réels. Soit P le polynôme défini par l'expression

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n.$$

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels. La matrice $C_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, appelée matrice compagnon de P , est définie par

$$C_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & -a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

• *Exemple*

1. a) Déterminer le polynôme R dont la matrice compagnon est $C_R = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.
 b) Quelles sont les racines de R ? Quelles sont les valeurs propres de C_R ? Que constatez-vous?

2. La matrice C_R est-elle diagonalisable? Justifiez votre réponse.

• *Retour au cas général*

3. Déterminer le rang de C_P . *Indication. On pourra distinguer deux cas : le cas où $a_0 = 0$ et le cas où $a_0 \neq 0$.*

4. Justifier que 0 est valeur propre de C_P si et seulement si $a_0 = P(0) = 0$.

5. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $\dim(\text{Ker}(C_P - \lambda I_n)) \leq 1$.

• *La matrice M_P*

Dans la suite, on considère $M_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M_P = a_0 I_n + a_1 C_P + a_2 C_P^2 + \dots + a_{n-1} C_P^{n-1} + C_P^n$.

On note $(E_1, E_2, \dots, E_n) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

les n vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'objectif est de montrer que M_P est la matrice nulle.

6. *Retour sur l'exemple*

Vérifier que M_R est la matrice nulle, où R est le polynôme trouvé à la première question.

7. *Retour sur le cas général*

a) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E_k = C_P^{k-1} E_1$.

b) En déduire qu'il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $(X, C_P X, \dots, C_P^{n-1} X)$ soit une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

8. Montrer que $M_P E_1 = 0$.

9. En déduire que M_P est la matrice nulle.

• *Lien entre spectre et racines de P*

10. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de C_P et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. Montrer que λ est racine de P .

11. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = 0$.

a) On suppose uniquement dans cette question qu'il existe $X = {}^t [x_1 \ \dots \ x_n] \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $C_P X = \lambda X$. Expliciter un système linéaire vérifiée par (x_1, \dots, x_n) . Montrer ensuite par récurrence que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad x_{n-k} = (a_{n-k} + \lambda a_{n-k+1} + \dots + \lambda^{k-1} a_{n-1} + \lambda^k) x_n.$$

b) Montrer que λ est valeur propre de C_P et exhiber un vecteur propre associé.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On considère $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des nombres réels tous distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des entiers positifs ou nuls, puis on définit le polynôme S par $S(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{\alpha_i}$.

12. Déduire de toute cette étude que la matrice compagnon C_S de S est diagonalisable si et seulement si les entiers α_i valent tous 1.

13. Est-ce que la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ est diagonalisable?

>> Solution p. 75



Indications et solutions



🔍 Indication de l'exercice 44 p. 41

Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de vecteurs propres de φ , poser pour tout indice i , $\varepsilon_i = s(e_i)$. Que dire de $s \circ \varphi \circ s^{-1}(e_i)$?

🔍 Indication de l'exercice 45 p. 43

- | | | | |
|----|---|--|---|
| 1. | ✓ | | × |
| 2. | ✓ | | × |
| 3. | ✓ | | × |
| 4. | ✓ | | × |

🔍 Indication de l'exercice 46 p. 43

Raisonnement par une contraposée. Montrer que si A est diagonalisable alors $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2)$.

🔍 Indication de l'exercice 49 p. 48

Introduire le polynôme de degré 2 et utiliser les relations coefficients/racines.

$$Q: \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \det(A - \lambda I_2).$$

🔍 Indication de l'exercice 51 p. 48

- T_2 n'est pas diagonalisable alors que T_3 l'est. Préciser la dimension de l'espace propre pour la valeur propre 1.
- Distinguer trois cas $\alpha = 1$, $\alpha = -1$ et $\alpha \neq \pm 1$.

🔍 Indication de l'exercice 59 p. 51

Elles sont toutes triangulaires et pour $i = j$, elles sont même diagonale (donc diagonalisable).

🔍 Indication de l'exercice 66 p. 51

- Vérifier que la matrice de φ dans la base canonique est triangulaire. En déduire le spectre.

🔍 Indication de l'exercice 68 p. 52

- 3.a) Calculer $f(A)$.
- 4.a) La trace est une forme linéaire non nulle, son noyau est un hyperplan.

🔍 Indication de l'exercice 69 p. 52

- La matrice est de rang 1 si et seulement si toutes les colonnes sont proportionnelles à une même colonne non

nulle. Il existe un indice i_0 et des réels λ_i tels que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $C_i = \lambda_i C_{i_0}$.

- 2.a) C'est la formule du rang.
- 2.c) La question précédente donne un polynôme annulateur et donc une condition sur le spectre. Est-ce que la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n ?

🔍 Indication de l'exercice 72 p. 53

- 2.a) Si $M(a, b)$ et $M(c, d)$ sont semblables alors $M(a, b)^2$ et $M(c, d)^2$. Utiliser 1.b).
- 3.b) Dans le cas diagonalisable, la somme des valeurs propres vaut la trace. Que dire de la trace de $M(a, b)^2$?

- 3.c) La matrice $M(\alpha, \alpha)$ est symétrique.

🔍 Indication de l'exercice 77 p. 54

3. Dans ce cas, seule 1 est valeur propre. Un endomorphisme diagonalisable avec une seule valeur propre est du type λid .

- 4.a) Partir de l'égalité

$$P(x) = \frac{P(x) + P(-x)}{2} + \frac{P(x) - P(-x)}{2}.$$

🔍 Indication de l'exercice 79 p. 54

3. Vérifier que $M^2 = M$. Donc $\varphi \circ \varphi = \varphi$.

🔍 Indication de l'exercice 82 p. 55

1. Le début de la preuve : Soient $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i A^i = 0_n.$$

Si on introduit le polynôme

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i x^i.$$

alors Q est annulateur de A . Montrons que Q est nul.

4. Utiliser le fait que les sous-espaces propres sont de dimension 1. Ainsi, deux vecteurs colonnes d'un même sous-espace propre sont colinéaires.

Indication de l'exercice 83

p. 56

1. Poser $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{bmatrix}$.

Exercice 44

p. 41

DA1

1. Si φ est bijectif, 0 ne peut être valeur propre de φ . Soit $(e_i)_{i \in I}$, une base de vecteurs propres et $(\lambda_i)_{i \in I}$ les valeurs propres associées.

$$\forall i \in I, \quad \varphi(e_i) = \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad e_i \neq 0_E.$$

Par application de φ^{-1} , on obtient

$$\forall i \in I, \quad \varphi^{-1}(e_i) = \frac{1}{\lambda_i} e_i \quad \text{et} \quad e_i \neq 0_E.$$

Autrement dit, $(e_i)_{i \in I}$ est aussi une base de vecteurs propres pour φ^{-1} qui est donc diagonalisable.

2. Soit $(e_i)_{i \in I}$, une base de vecteurs propres. Comme la valeur propre est unique, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall i \in I, \quad \varphi(e_i) = \lambda e_i.$$

Soit $u \in E$, il existe des réels $(\mu_i)_{i \in I}$ tels que

$$u = \sum_{i \in I} \mu_i e_i.$$

Par linéarité de φ

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \sum_{i \in I} \mu_i \varphi(e_i) = \sum_{i \in I} \mu_i \cdot \lambda e_i \\ &= \lambda \sum_{i \in I} \mu_i e_i = \lambda u. \end{aligned}$$

Le résultat étant valable pour tout vecteur u de E , il vient

$$\varphi = \lambda \text{id}_E.$$

Autrement dit, φ est une homothétie ou l'application nulle (si $\lambda = 0$).

3. Comme φ n'est pas injective, 0 est valeur propre de φ . Le polynôme x^2 est annulateur de φ car $\varphi^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. 0 est donc l'unique valeur propre. En reprenant le raisonnement précédent

$$\varphi = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

4. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de vecteurs propres de φ . Ainsi, pour tout $i \in I$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que

$$\varphi(e_i) = \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad e_i \neq 0_E.$$

Posons pour tout $i \in I$, $\varepsilon_i = s(e_i)$.

→ Comme s est un isomorphisme de E , la famille $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ est

une base de E .

→ Pour $i \in I$

$$\begin{aligned} s \circ \varphi \circ s^{-1}(\varepsilon_i) &= s \circ \varphi \circ s^{-1}(s(e_i)) \\ &= s(\varphi(e_i)) \\ &= s(\lambda_i e_i) \\ &= \lambda_i s(e_i) \\ s \circ \varphi \circ s^{-1}(\varepsilon_i) &= \lambda_i \varepsilon_i. \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon_i \neq 0_E$, c'est un vecteur propre.

En conclusion, $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de $s \circ \varphi \circ s^{-1}$ qui est donc diagonalisable.

Exercice 45

p. 43

DA2

1. **Vrai.**

Si $A = PDP^{-1}$ alors $A^2 = PD^2P^{-1}$ avec P inversible, D diagonale.

2. **Faux.**

La matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est un contre exemple. La matrice n'est pas diagonalisable (voir l'exemple précédent), mais son carré est la matrice nulle qui est trivialement diagonalisable.

3. **Vrai.**

Si A est diagonalisable, alors il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible et D , diagonale telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

Comme A est inversible, $D = P^{-1}AP$ est inversible par produit et

$$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}.$$

Ainsi A^{-1} est diagonalisable. La réciproque se prouve de la même manière mais il est plus judicieux d'utiliser le résultat précédent avec A^{-1} : Si A^{-1} est diagonalisable, d'après ce qui précède, $A = (A^{-1})^{-1}$ est aussi diagonalisable. D'où la conclusion.

4. **Faux.**

Donnons un contre-exemple :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_T$$

La matrice A est diagonale donc diagonalisable. De plus, on vérifie que B est diagonalisable, pourtant la somme T n'est pas diagonalisable (adapter l'exemple p. 43).

Exercice 46

p. 43

DA3

Raisonnons par contraposée en montrant que si A est diagonalisable alors $\text{rg}(A^2) = \text{rg}(A)$.

Si A est diagonalisable, alors A est semblable à une matrice diagonale D. Il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}.$$

En particulier

$$A^2 = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} = PD^2P^{-1}.$$

A^2 est semblable à D^2 . On a donc

$$\text{rg}(A^2) = \text{rg}(D^2) \quad \text{et} \quad \text{rg}(A) = \text{rg}(D)$$

Or le rang d'une matrice diagonale correspond au nombre de coefficients diagonaux non nuls. Comme

$$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \Rightarrow D^2 = \text{diag}(d_1^2, \dots, d_n^2).$$

On constate que $\text{rg}(D) = \text{rg}(D^2)$ et par extension $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2)$. D'où le résultat.

Exercice 47

p. 44

DA4

...

Exercice 48

p. 46

DA5

1. La linéarité de φ découle de la linéarité de la dérivation. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q) &= \frac{1}{n} x(1-x) (\lambda P + \mu Q)'(x) + x(\lambda P + \mu Q)(x) \\ &= \lambda \left(\frac{1}{n} x(1-x) P'(x) + xP(x) \right) \\ &\quad + \mu \left(\frac{1}{n} x(1-x) Q'(x) + xQ(x) \right) \end{aligned}$$

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q).$$

Pour justifier que φ est un endomorphisme, il suffit de vérifier que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x], \quad \varphi(P) \in \mathbb{R}_n[x].$$

Rédaction 1

Tout d'abord, par les règles de calculs sur les degrés,

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x], \quad \varphi(Q) \in \mathbb{R}_n[x].$$

Car $\deg(x(1-x)Q'(x)) \leq 2 + \deg Q - 1 \leq n$

et $\deg(xQ(x)) \leq 1 + \deg Q \leq n$.

De plus

$$\begin{aligned} \varphi(x^n) &= \frac{1}{n} x(1-x) \cdot nx^{n-1} + x^{n+1} \\ &= x^n - x^{n+1} + x^{n+1} = x^n \in \mathbb{R}_n[x]. \end{aligned}$$

Ainsi pour $P \in \mathbb{R}_n[x]$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tels que $P(x) = \lambda x^n + Q(x)$. Par linéarité de φ

$$\varphi(P) = \underbrace{\lambda \varphi(x^n)}_{\in \mathbb{R}_n[x]} + \underbrace{\varphi(Q)}_{\in \mathbb{R}_n[x]} \in \mathbb{R}_n[x].$$

En conclusion, φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

Rédaction 2

On a $\varphi(1)(x) = x$. Puis, pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on calcule :

$$\begin{aligned} \varphi(x^k)(x) &= \frac{1}{n} x(1-x) \cdot kx^{k-1} + x \cdot x^k \\ &= \frac{n-k}{n} x^{k+1} - \frac{1}{n} x^k. \end{aligned}$$

En distinguant bien $k \neq n$ et $k = n$, on constate que

$$\varphi(x^k) \in \mathbb{R}_n[x].$$

Par linéarité de φ , on a bien

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x], \quad \varphi(P) \in \mathbb{R}_n[x].$$

En conclusion, φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

2. Vérifier que pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$

$$\varphi(P_k) = \frac{k}{n} P_k.$$

3. Le calcul précédent montre que φ admet

$$n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[x])$$

valeurs propres distinctes. D'après la proposition du cours, φ est diagonalisable.

Exercice 49

p. 48

DA6

1. On introduit la fonction

$$Q : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \det(A - \lambda I_2).$$

La fonction Q est une fonction polynomiale de degré 2, en effet, si on pose

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

on a alors

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= (a-\lambda)(d-\lambda) - cb = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc \\ &= \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A). \end{aligned}$$

Or, λ_1 et λ_2 sont les racines de ce polynôme Q. D'après les relations coefficients/racines

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(A) \quad \text{et} \quad \lambda_1 \lambda_2 = \det(A).$$

2. Raisonnons par l'absurde. Si A est diagonalisable alors ses valeurs propres vérifient

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1.$$

La première condition impose que λ_1 et λ_2 soient de signes opposés alors que la seconde impose qu'elles soient de même signe. Elles sont donc nulles. En contradiction avec la

condition $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$. Finalement, A n'est pas diagonalisable.

Exercice 50

p. 48

DA7

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on vérifie par le calcul que

$$\det(A - \lambda I_2) = (a - \lambda)(d - \lambda) - c^2 = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - c^2.$$

Déterminons ses racines avec le discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= (a + d)^2 - 4(ad - c^2) \\ &= a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + 4c^2 \\ &= a^2 + d^2 - 2ad + 4c^2 \\ &= (a - d)^2 + 4c^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\Delta = 0 \iff a - d = 0 \text{ et } c = 0,$$

mais, si $c = 0$, la matrice A est déjà diagonale. Sinon $\Delta > 0$ et il y a deux racines réelles distinctes. Avec deux valeurs propres distinctes pour une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice est diagonalisable dans \mathbb{R} .

Exercice 51

p. 48

DA8

1. • T_1 est diagonalisable puisque :

→ T_1 est triangulaire, le spectre est

$$\text{Sp}(T_1) = \{1; 2; 3\}.$$

→ Il y a 3 valeurs propres distinctes pour une matrice de taille (3,3).

• T_2 n'est pas diagonalisable puisque :

→ $\text{Sp}(T_2) = \{1; 2\}$.

→ On calcule (par exemple, par la formule du rang)

$$\dim E_1(T_2) = 1, \quad \dim E_2(T_2) = 1$$

mais $\dim E_1(T_2) + \dim E_2(T_2) \neq 3$.

• T_3 est diagonalisable, on vérifie que

$$\dim E_1(T_3) + \dim E_2(T_3) = 2 + 1 = 3.$$

2. La matrice M_α est triangulaire. Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, alors $\alpha \neq \alpha^2$ et

$$\text{Sp}(M_\alpha) = \{\alpha; \alpha^2\}.$$

Il y a deux valeurs propres distinctes pour une matrice de taille (2,2), M_α est diagonalisable.

Si $\alpha = 1$, alors $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

En raisonnant par l'absurde (voir exemple p. 43), on prouve que M_1 n'est pas diagonalisable.

Si $\alpha = 0$, on montre de même que M_0 n'est pas diagonalisable. En résumé M_α est diagonalisable si et seulement si $\alpha \notin \{0; 1\}$.

Exercice 52

p. 48

DA9

1. La matrice de φ dans la base canonique est symétrique.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

La matrice A est donc diagonalisable et φ l'est aussi.

2. La matrice A est symétrique, donc diagonalisable. Il existe P et D deux matrices respectivement inversible et diagonale telles que

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

Par récurrence

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^p = P \cdot D^p \cdot P^{-1}.$$

En particulier $I_n = A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$.

D'où $D^n = P^{-1}P = I_n$. Si d_i est un coefficient diagonale de D alors $d_i \in \mathbb{R}$ et $d_i^n = 1$. Nécessairement $d_i = \pm 1$ et $d_i^2 = 1$. On obtient $D^2 = I_n$. Concluons :

$$A^2 = P \cdot D^2 \cdot P^{-1} = P \cdot P^{-1} = I_n.$$

Exercice 53

p. 49

DA10

• La matrice A est triangulaire supérieure, donc

$$\text{Sp}(A) = \{1; 2; 3\}.$$

Comme $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ a 3 valeurs propres, la matrice A est diagonalisable. Vérifier que

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

$$E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \text{ et } E_3(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Si on pose

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } D = \text{diag}(1, 2, 3),$$

on a bien $A = PDP^{-1}$.

• Vérifier que $\text{Sp}(B) = \{-1; 1; 2\}$ et

$$E_{-1}(B) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$E_1(B) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \text{ et } E_2(B) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Si on pose

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad S = \text{diag}(-1, 1, 2),$$

on a bien $B = QSQ^{-1}$.

Exercice 54

p. 49

DA11

1. Soit $P(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$.

$$\begin{aligned} \varphi(P)(x) &= x(1-x)(2ax+b) + 2x(ax^2+bx+c) \\ &= 2ax^2 + bx - 2ax^3 - bx^2 + 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx \\ &= (2a+b)x^2 + (b+2c)x. \end{aligned}$$

On a bien $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[x]$. De plus, on vérifie (par linéarité de la dérivation) que φ est linéaire.

2. D'après le calcul précédent

$$\varphi(1) = 2x, \quad \varphi(x) = x^2 + x, \quad \varphi(x^2) = 2x^2.$$

La matrice de φ dans la base canonique est

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matrice est triangulaire, donc $\text{Sp}(A) = \{0; 1; 2\}$. Vérifier que

$$E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

La matrice A est diagonalisable et si on pose

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

alors $A = PDP^{-1}$.

3. Posons

$$P_1 = 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2, \quad P_2 = x^2 - x \quad \text{et} \quad P_3 = x^2,$$

de sorte que les matrices colonnes de ces vecteurs correspondent aux vecteurs propres de A donnés précédemment.

$$\begin{cases} AC_1 = 0 \\ AC_2 = C_2 \\ AC_3 = 2C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(P_1) = 0 \\ \varphi(P_2) = P_2 \\ \varphi(P_3) = 2P_3. \end{cases}$$

Exercice 55

p. 49

DA12

1. Si la matrice A est diagonalisable, alors A est semblable à une matrice diagonale D.

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_r).$$

Le réel λ_i est une valeur propre de D (et donc de A) et le nombre de fois où il apparaît correspond à la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i pour D (et donc de A). Ensuite

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A) &= \text{Tr}(D) \\ &= \lambda_1 + \dots + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_2 + \dots + \lambda_r + \dots + \lambda_r \\ &= \lambda_1 \dim E_{\lambda_1}(A) + \lambda_2 \dim E_{\lambda_2}(A) + \dots + \lambda_r \dim E_{\lambda_r}(A) \\ &= \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda \dim E_{\lambda}(A). \end{aligned}$$

2. D'après la formule du rang

$$\begin{aligned} \dim E_{-2}(A) &= \dim \text{Ker}(A + 2I_3) \\ &= 3 - \text{rg}(A + 2I_3) = 2. \end{aligned}$$

Si A est diagonalisable, il existerait une seconde valeur propre λ . Dans ce cas

$$\lambda + 2 \times (-2) = \text{Tr}(A) = 0, \quad \text{puis} \quad \lambda = 4.$$

Testons si $\lambda = 4$. On vérifie par le calcul que

$$AX = 4X \iff X \in \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Finalement

$$\dim E_{-2}(A) + \dim E_4(A) = 3 = \dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

La matrice A est bien diagonalisable.

Exercice 56

p. 50

DA13

...

Exercice 57

p. 50

DA14

1. Vérifier que $\text{Sp}(A) = \{1, 4\}$ avec

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_4(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Comme $\dim E_1(A) + \dim E_4(A) = 3$, la matrice A est diagonalisable. Si on pose

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \text{diag}(1, 1, 4)$$

alors $A = PDP^{-1}$.

2. D est inversible, par produit A est inversible et

$$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}.$$

On pose le calcul

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. On a vu que

$$Q(A) = PQ(D)P^{-1} \\ \text{et } Q(D) = \text{diag}(Q(1), Q(1), Q(4)).$$

Un polynôme annulateur est $Q(x) = (x-1)(x-4)$.

4. Si on pose $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, on a $S^2 = D$. De plus pour

$B = PSP^{-1}$, on a

$$B^2 = (PSP^{-1})^2 = PS^2P^{-1} \\ = PDP^{-1} = A.$$

Exercice 58

p. 51

DA15

Vérifier que 0 et 2 sont les valeurs propres de A avec

$$E_0 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

et que
$$E_2 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right).$$

En particulier, on constate que

$$\dim(E_0) + \dim(E_2) = 2.$$

Or A est d'ordre 3 et $2 \neq 3$, donc la matrice A n'est pas diagonalisable.

Exercice 59

p. 51

DA16

→ Si $i = j$, alors la matrice $E_{i,j}$ est diagonale. Elle est donc diagonalisable.

→ Si $i \neq j$, alors la matrice $E_{i,j}$ est triangulaire avec uniquement des zéros sur la diagonale. En particulier

$$\text{Sp}(E_{i,j}) = \{0\}.$$

Si $E_{i,j}$ est diagonalisable, alors elle serait semblable à la matrice nulle. Absurde, seule la matrice nulle est semblable à la matrice nulle. Ainsi, $E_{i,j}$ n'est pas diagonalisable.

En conclusion, $E_{i,j}$ est diagonalisable si et seulement si $i = j$.

Exercice 60

p. 51

DA17

Par linéarité de la dérivation, on montre que φ est linéaire. Or

$$\varphi(1) = 2x + 1, \quad \varphi(x) = x^2 + x + 1 \quad \text{et} \quad \varphi(x^2) = 2x + x^2.$$

Comme ces polynômes sont dans $\mathbb{R}_2[x]$ et φ est linéaire, on en déduit que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[x]$. L'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$. De plus

$$\text{Mat}_{\text{can}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Par un calcul du rang, vérifier ensuite que $\text{Sp}(\varphi) = \{1; -1; 3\}$. En particulier, φ est diagonalisable car il y a 3 valeurs propres avec $3 = \dim \mathbb{R}_2[x]$.

Remarque. On peut montrer en plus que :

$$E_1(\varphi) = \text{Vect}(1 - x^2)$$

$$E_{-1}(\varphi) = \text{Vect}(x^2 - 2x + 1)$$

$$E_3(\varphi) = \text{Vect}(x^2 + 2x + 1).$$

Exercice 61

p. 51

DA18

Les matrices A et B sont triangulaires. On lit les valeurs propres sur les diagonales

$$\text{Sp}(A) = \{1; 2; 3\} = \text{Sp}(B).$$

Or, les matrices sont de taille 3. Elles sont diagonalisables et semblables à une même matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Les matrices A et B sont donc semblables.

Exercice 62

p. 51

DA19

Raisonnons par double implication.

⇒ Soit p un projecteur sur F parallèlement à G.

Soit $(e_1, \dots, e_p), (e_{p+1}, \dots, e_n)$ respectivement une base de F et de G. Comme

$$F \oplus G = E.$$

La famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E. Précisons que, par construction

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \varphi(e_i) = e_i, \quad \forall i \in \llbracket p+1; n \rrbracket, \varphi(e_i) = 0_E.$$

La famille \mathcal{B} est une base de vecteurs propres dont les valeurs propres sont 0 et 1 (il n'y a pas d'autres). Dès lors, p est diagonalisable et $\text{Sp}(p) = \{0; 1\}$.

⇐ Réciproquement, supposons φ diagonalisable avec $\text{Sp}(\varphi) = \{0; 1\}$. On a donc

$$E_1(\varphi) \oplus E_0(\varphi) = E.$$

Ainsi pour tout $u \in E$, il existe $v \in E_1(\varphi)$, $w \in E_0(\varphi)$ tels que $u = v + w$. Puis

$$\varphi(u) = \varphi(v) + \varphi(w) = v + 0_E = v.$$

L'endomorphisme φ est le projecteur sur $E_1(\varphi)$ parallèlement à $E_0(\varphi)$.

Exercice 63

p. 51

DA20

1. Si $a = 1$, le polynôme Q se simplifie

$$Q(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3.$$

Raisonnons par l'absurde en supposant M_1 diagonalisable. Comme Q est annulateur de M_1 avec une unique racine 1,

$$\text{Sp}(M_1) = \{1\}.$$

Dans ce cas M_1 est semblable à la matrice identité. Absurde, seule I_3 est semblable à I_3 . Concluons : M_1 n'est pas diagonalisable.

2. On a

$$Q(1) = 1 - (a+2) + (2a+1) - a = 0$$

Factorisons par $x-1$ à l'aide d'une division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a & x-1 \\ -(a+1)x^2 + (2a+1)x - a & x^2 - (a+1)x + a \\ \hline -ax - a & \end{array}$$

D'où $Q(x) = (x-1)(x^2 - (a+1)x + a)$.

Un calcul de discriminant donne deux racines de Q : 1 et a . Finalement

$$Q(x) = (x-1)^2(x-a).$$

On en déduit que $\text{Sp}(M_a) \subset \{1; a\}$.

Précisons maintenant $E_1(M_a)$.

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_1(M_a)$$

$$\iff \begin{cases} (a+1)x + (-2a-1)y + az = 0 \\ x - y + 0 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff x = y = z.$$

Finalement $E_1(M_a) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

On a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_a(M_a) &\iff \begin{cases} 2x - (2a+1)y + az = 0 \\ x - ay = 0 \\ y - az = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2ay - (2a+1)y + y = 0 \\ x = a^2z \\ y = az \end{cases} \end{aligned}$$

La première ligne est toujours vraie. Il vient

$$E_a(M_a) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

On constate que pour $a \in \mathbb{R}$

$$\dim E_1(M_a) + \dim E_a(M_a) < 3.$$

La matrice M_a n'est jamais diagonalisable.

Exercice 64

p. 51

DA21

1. On a immédiatement :

$$A_n - I = \begin{bmatrix} 0 & 1/n & 1/n \\ -1/n & 2/n & 1/n \\ 1/n & -1/n & 0 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice n'est pas inversible puisque sa troisième colonne est égale à la somme des deux premières colonnes. Ainsi, 1 est valeur propre de A_n avec :

$$\dim E_1(A_n) \geq 1.$$

On a aussi :

$$A_n - (1 + 1/n)I_3 = \begin{bmatrix} -1/n & 1/n & 1/n \\ -1/n & 1/n & 1/n \\ 1/n & -1/n & -1/n \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 1 (toutes les colonnes sont colinéaires à la première qui est non nulle), elle est donc non inversible. D'où

$$(1 + 1/n) \text{Sp}(A_n).$$

2. Enfin, avec la deuxième équation, il vient :

$$y = b - x = b - (a - b - c) = -a + 2b + c$$

Ainsi, on aboutit à :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On prendra un instant pour vérifier l'égalité : $PP^{-1} = I_3$. On aboutit ainsi à :

$$\begin{aligned} B_n^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/(n+1) & 0 \\ 0 & 0 & 1/(n+1) \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1/(n+1) & 1/(n+1) \\ 1 & 1/(n+1) & 0 \\ -1 & 0 & 1/(n+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-1/(n+1) & -1+2/(n+1) & -1+1/(n+1) \\ -1+1/(n+1) & 1-1/(n+1) & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement

$$B_n^{-1} = \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} n+1 & -n & -n \\ n & 1-n & -n \\ -n & n & n+1 \end{bmatrix}.$$

Il vient

$$A_n = P \operatorname{diag}(1, 1 + 1/n, 1 + 1/n) P^{-1}.$$

La matrice de passage P de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base de diagonalisation de A_n est indépendante de n . Avec ces notations, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} B_n &= P \operatorname{diag}(1, \underbrace{1 + 1/1}_{=2}, 1 + 1/1) P^{-1} P \operatorname{diag}(1, \underbrace{1 + 1/2}_{=3/2}, 1 + 1/2) P^{-1} \dots \\ &\quad \dots P \operatorname{diag}(1, \underbrace{1 + 1/n}_{=(n+1)/n}, 1 + 1/n) P^{-1} \\ &= P \operatorname{diag}(1, 2 \cdot \underbrace{\frac{3}{2} \dots \frac{n+1}{n}}_{a_n}, a_n) P^{-1} \\ &= P \operatorname{diag}(1, n+1, n+1) P^{-1}. \end{aligned}$$

On en déduit que B_n est diagonalisable avec

$$\operatorname{Sp} B_n = \{1, n+1\}.$$

3. On en déduit que la matrice B_n est inversible en tant que produit de matrices inversibles. Pour aller plus loin, diagonalisons la matrice A_n . Commençons par déterminer $E_1(A_n)$. On a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A_n) &\iff \begin{cases} (1/n)y + (1/n)z = 0 \\ (-1/n)x + (2/n)y + (1/n)z = 0 \\ (1/n)x - (1/n)y \end{cases} \\ &\iff x = y = -z. \end{aligned}$$

Ainsi, il vient :

$$E_1(A_n) = \operatorname{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Déterminons maintenant $E_{1+1/n}(A_n)$. On a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{1+1/n}(A_n) &\iff \begin{cases} (-1/n)x + (1/n)y + (1/n)z = 0 \\ (-1/n)x + (1/n)y + (1/n)z = 0 \\ (1/n)x - (1/n)y - (1/n)z = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y + z. \end{aligned}$$

Exercice 65

p. 51

DA22

D'après la formule du rang

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \operatorname{rg}(A - \lambda I_n) &= \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} n - \dim E_\lambda(A) \\ &= n \operatorname{Card}(\operatorname{Sp}(A)) - \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A). \end{aligned}$$

On conclut en rappelant que A est diagonalisable si et seulement si

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = n.$$

Exercice 66

p. 51

DA23

1. Vérifier que :

- φ est linéaire (par linéarité de la dérivation).
- Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[x]$.

2. Explicitons la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

Pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$

$$\varphi(x^i) = x^i + ix^{i-1} + (i-1)x^{i-2} + \dots + i!$$

Ainsi la matrice de φ dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \dots & n! \\ 0 & 1 & 2 & \dots & (n-1)! \\ 0 & 0 & 1 & \dots & (n-2)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

On obtient une matrice triangulaire. Seule 1 est valeur propre. Si A était diagonalisable, A serait semblable à l'identité. Ce qui serait absurde puisque seule la matrice identité est semblable à l'identité. En conclusion, A et (donc) φ ne sont pas diagonalisables.

Exercice 67

p. 51

DA24

1.a) Posons $\mathcal{C} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ composée des matrices élémentaires. On vérifie que

$$\varphi(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{11} + E_{21}$$

$$\varphi(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{12} + E_{22}$$

$$\varphi(E_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{11} + E_{21}$$

$$\varphi(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{12} + E_{22}.$$

Il vient

$$B = \operatorname{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.b) On vérifie que $B^2 = 2B$. On en déduit que

$$x^2 - 2x = x(x-2)$$

est un polynôme annulateur de B et donc de φ .

1.c) Méthode 1.

La matrice B est symétrique. Elle est donc diagonalisable et φ aussi.

Méthode 2.

Le polynôme annulateur permet d'affirmer que $\operatorname{Sp}(\varphi) \subset \{0; 2\}$ Or $\operatorname{rg}(\varphi) = \operatorname{rg}(B) = 2$. Donc par le théorème du rang

$$\dim E_0(\varphi) = 2.$$

De plus, on vérifie que

$$\begin{aligned} \varphi(E_{11} + E_{21}) &= \varphi(E_{11}) + \varphi(E_{21}) \\ &= 2(E_{11} + E_{21}). \end{aligned}$$

On a aussi $\varphi(E_{12} + E_{22}) = 2(E_{12} + E_{22})$.

On en déduit que la famille composée des deux vecteurs propres

$$E_{11} + E_{21} \quad \text{et} \quad E_{12} + E_{22}$$

est libre. D'où

$$\dim E_2(\varphi) \geq 2.$$

Nécessairement

$$\dim E_0(\varphi) + \dim E_2(\varphi) = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

et φ est diagonalisable.

2.a) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} s \circ \varphi \circ s^{-1}(M) &= {}^t(A^t M) \\ &= M^t A = M A \quad (A \text{ est symétrique}) \\ &= \psi(M). \end{aligned}$$

2.b) On en déduit que φ et ψ ont même polynôme annulateur et ψ est diagonalisable (voir exercice 44 par exemple).

Exercice 68

p. 52

DA25

1. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ . Par linéarité de la trace

$$\begin{aligned} f(M + \lambda N) &= \text{Tr}(A)(M + \lambda N) - \text{Tr}(M + \lambda N)A \\ &= \text{Tr}(A)M + \lambda \text{Tr}(A)N - \text{Tr}(M)A - \lambda \text{Tr}(N)A \\ &= \text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A + \lambda(\text{Tr}(A)N - \text{Tr}(N)A) \\ f(M + \lambda N) &= f(M) + \lambda f(N). \end{aligned}$$

D'où f est linéaire. Comme l'espace de départ correspond à l'espace d'arrivée, f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par linéarité de f ,

$$\begin{aligned} (f \circ f)(M) &= f(f(M)) \\ &= f(\text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A) \\ &= \text{Tr}(A)f(M) - \text{Tr}(M)f(A) \\ (f \circ f)(M) &= \text{Tr}(A)f(M) \quad \text{car } f(A) = 0. \end{aligned}$$

2.b) Le résultat précédent étant valable pour toute matrice M ,

$$f \circ f = \text{Tr}(A)f.$$

Autrement dit, le polynôme $x^2 - \text{Tr}(A)x$ est un polynôme annulateur de f . Ainsi, les valeurs propres de f sont parmi les racines de ce polynôme :

$$\text{Sp}(f) \subset \{0, \text{Tr}(A)\}.$$

3.a) Il suffit de constater que

$$f(A) = 0 \quad \text{et} \quad A \neq 0_n$$

pour conclure que A est vecteur propre de f associé à la valeur propre 0.

3.b) Si $\text{Tr}(A) = 0$, alors la seule valeur propre de f est 0 et f n'est diagonalisable que si f est l'endomorphisme nul. Comme f n'est pas l'endomorphisme nul, on peut conclure que f n'est pas diagonalisable.

4.a) La trace est une forme linéaire non nulle, son noyau est de dimension

$$\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - 1 = n^2 - 1.$$

(détails à l'exercice ??, p.??).

4.b) Pour toute matrice M appartenant au noyau de la trace, on a, par définition de l'endomorphisme f :

$$f(M) = \text{Tr}(A)M.$$

On en déduit que $\text{Tr}(A)$ est valeur propre de f et que le sous-espace propre associé est de dimension au moins $n^2 - 1$. Comme, d'après la troisième question, 0 est aussi valeur propre avec un sous-espace propre associé qui est au moins de dimension 1, on a bien

$$\dim E_{\text{Tr}(A)}(f) + \dim E_0(f) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

et l'endomorphisme f est diagonalisable.

Exercice 69

p. 52

DA26

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons C_1, C_2, \dots, C_n ses colonnes. La matrice M est de rang 1 si, et seulement si, il existe une colonne C_{i_0} non nulle telle que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ la colonne C_i est colinéaire à C_{i_0} . C'est-à-dire, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $C_i = \lambda_i C_{i_0}$.

Si on pose $U = C_{i_0}$ et $V = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$, on a bien

$$\begin{aligned} {}^t V U &= [\lambda_1 C_{i_0} \quad \lambda_2 C_{i_0} \quad \dots \quad \lambda_n C_{i_0}] \\ &= [C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_n] = M. \end{aligned}$$

2.a) D'après la formule du rang

$$\begin{aligned} \dim E_0(A) &= \dim \text{Ker } A \\ &= n - \text{rg}(A) = n - 1. \end{aligned}$$

Comme $n \geq 2$

$$\dim E_0(A) > 0$$

Le réel 0 est bien valeur propre de A .

2.b) On a

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(U^t V) = \text{Tr}({}^t V U) = {}^t V U$$

en identifiant $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et \mathbb{R} . D'où

$${}^t V U = a.$$

De plus, par associativité du produit matriciel

$$\begin{aligned} A^2 &= (U^t V)(U^t V) = U({}^t V U){}^t V \\ &= U \cdot a \cdot {}^t V = a U {}^t V \quad \text{car } a \in \mathbb{R} \\ A^2 &= aA. \end{aligned}$$

2.c) Si $a = 0$ alors $A^2 = 0$. Le polynôme x^2 est annulateur de A et seul 0 est valeur propre (question 2.(a)).

Si A est diagonalisable, alors A est semblable à la matrice nulle. A est donc la matrice nulle. Absurde, la matrice A est de rang 1.

2.d) On a :

$$AU = U^t V U = U \cdot a = aU.$$

Comme $U \neq 0$, U est vecteur propre pour la valeur propre a et

$$\dim E_a(A) \geq 1.$$

D'après 2.(a), on a aussi

$$\dim E_0(A) + \dim E_a(A) \geq (n-1) + 1 \geq n.$$

Or on a toujours

$$\dim E_0(A) + \dim E_a(A) \leq \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \leq n.$$

On a donc égalité et la matrice A est diagonalisable.

2.e) Finalement, comme $a = \text{Tr}(A)$, A est diagonalisable si et seulement si $\text{Tr}(A) \neq 0$.

Exercice 70

p. 52

DA27

1.

→ Rédaction 1 par analyse synthèse.

Montrons que $E = E_\alpha(\varphi) \oplus E_0(\varphi)$ par analyse-synthèse. Soit $u \in E$.

• Analyse.

Supposons qu'il existe $v \in E_\alpha(\varphi)$, $w \in E_0(\varphi)$ tels que $u = v + w$. Par linéarité de φ :

$$\varphi(u) = \varphi(v) + \varphi(w) = \alpha v + 0_E = \alpha v.$$

Comme $\alpha \neq 0$, on a

$$v = \frac{1}{\alpha} \varphi(u)$$

et dans ce cas

$$w = u - v = u - \frac{1}{\alpha} \varphi(u) = \frac{1}{\alpha} (\alpha u - \varphi(u)).$$

On prouve ainsi l'unicité de la décomposition.

• Synthèse.

Posons $v = \frac{1}{\alpha} \varphi(u)$ et $w = \frac{1}{\alpha} (\alpha u - \varphi(u))$. On a directement

$$v + w = u.$$

De plus, $\varphi \circ (\varphi - \alpha \text{id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ d'où $\varphi^2 = \alpha \varphi$ et

$$\varphi(v) = \frac{1}{\alpha} \varphi^2(u) = \varphi(u) = \alpha v.$$

$$\varphi(w) = \frac{1}{\alpha} (\alpha \varphi(u) - \varphi^2(u)) = \frac{1}{\alpha} 0_E = 0_E.$$

On a donc $v \in E_\alpha(\varphi)$ et $w \in E_0(\varphi)$. La décomposition de u existe.

• Conclusion.

Tout vecteur de E se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de $E_\alpha(\varphi)$ et d'un vecteur de $E_0(\varphi)$. Autrement dit, $E_0(\varphi)$ et $E_\alpha(\varphi)$ sont supplémentaires. En particulier φ est diagonalisable.

→ Rédaction 2 : via la formule du rang
De l'égalité $\varphi^2 = \alpha \varphi$, on déduit l'inclusion

$$\text{Im } \varphi \subset E_a(\varphi)$$

puis $\text{rg } \varphi = \dim \text{Im } \varphi \leq \dim E_a(\varphi)$.

Notons aussi que

$$E_0(\varphi) = \text{Ker } \varphi.$$

Ainsi par la formule du rang

$$\text{rg } \varphi + \dim \text{Ker } \varphi = \dim E.$$

On a

$$\dim E_a(\varphi) + \dim E_0(\varphi) \geq \dim E.$$

On a même égalité et on sait alors que dans ce cas, φ est diagonalisable.

2. Traitons le cas où P est annulateur à racines simples. On peut supposer P unitaire.

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \quad \text{avec } \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

On constate que si on pose

$$\psi = \varphi - \alpha_1 \text{id}_E \quad \text{et } \alpha = \alpha_2 - \alpha_1$$

alors ψ admet comme polynôme annulateur

$$\tilde{P} = x(x - \alpha) \quad \text{avec } \alpha \neq 0.$$

On en déduit par la question 1 que ψ est diagonalisable. Comme $\varphi = \psi + \alpha_1 \text{id}_E$, on en déduit que φ est aussi diagonalisable (φ et ψ admettent la même base de vecteurs propres).

Une généralisation est démontrée à l'exercice 76, p. 54.

Exercice 71

p. 52

DA28

1. L'application $\varphi - \text{id}$ est linéaire et vérifier que

$$(A - I_3)^2 = (A - I_3),$$

c'est-à-dire

$$(\varphi - \text{id})^2 = \varphi - \text{id}$$

Ainsi $p = \varphi - \text{id}$ est un projecteur.

2. D'après ce qui précède

$$(x-1)^2 - (x-1) = (x-1)(x-2)$$

est annulateur de φ . D'où

$$\text{Sp}(\varphi) \subset \{1, 2\}.$$

De plus, on vérifie que

$$\text{rg}(\varphi - \text{id}) = \text{rg}(p) < 3, \quad \text{rg}(\varphi - 2 \text{id}) = \text{rg}(p - \text{id}) < 3.$$

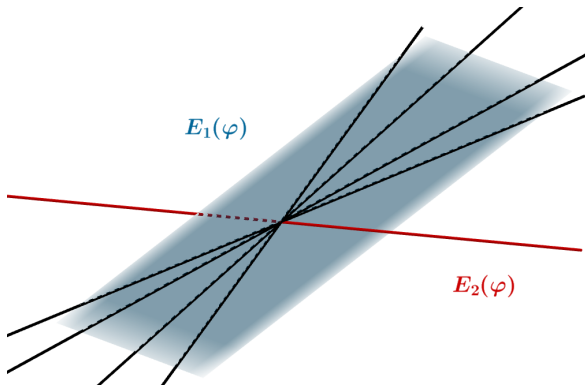
On a donc égalité

$$\text{Sp}(\varphi) = \{1, 2\}.$$

3. On peut préciser

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

On en déduit que $E_2(\varphi)$ est un plan vectoriel.



Tout vecteur non nul de $E_2(\varphi)$ donne une droite vectorielle stable par φ . Il en existe donc une infinité.

4. Le sous-espace $E_2(\varphi)$ est un exemple de plan stable par φ . Mais on peut aussi considérer

$$E_1(\varphi) \oplus \text{Vect}(u) \quad \text{où } u \in E_2(\varphi) \cup \{0\}$$

Et on obtient une infinité de plans vectoriels stables par φ .

Exercice 72

p. 53

DA29

- 1.a) Calculons

$$\begin{aligned} & M(a, b)^2 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} nab & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & ab & \cdots & ab & \\ 0 & \vdots & \cdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & ab & \cdots & ab & \end{bmatrix} = ab \begin{bmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- 1.b) Posons J de sorte que

$$M(a, b)^2 = abJ.$$

Justifions que $M(a, b)^2$ est diagonalisable. Dans un premier temps, on constate que les colonnes 2 à $n+1$ sont identiques (et non nulles), donc

$$\text{rg}(J) = 2.$$

D'après la formule du rang, 0 est valeur propre de J et

$$\dim E_0(J) = n + 1 - \text{rg}(J) = (n + 1) - 2 = n - 1.$$

De plus, si on pose

$$U = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}),$$

on a $JU = nU$ et $JV = nV$.

Remarque. Le choix de ces matrices est inspiré par l'exemple classique de la matrice Attila.

Comme U, V ne sont pas colinéaires

$$\dim E_n(J) \geq 2.$$

Nécessairement,

$$\dim E_0(J) + \dim E_n(J) = n + 1 = \dim \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}).$$

La matrice J est diagonalisable avec 2 valeurs propres. En multipliant par ab , on obtient : $M(a, b)^2$ est diagonalisable et

$$\text{Sp}(M(a, b)^2) = \{abn, 0\}.$$

- 2.a) Si $M(a, b)$ est semblable à $M(c, d)$, alors $M(a, b)^2$ est semblable à $M(c, d)^2$. Leurs spectres sont donc identiques et nécessairement $ab = cd$.

- 2.b) Réciproquement, Supposons $ab = cd$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ et P_ε la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ diagonale dont la diagonale est $(\varepsilon, 1, 1, \dots, 1)$. On vérifie par le calcul que

$$P_\varepsilon^{-1}M(a, b)P_\varepsilon = M(\varepsilon^{-1}a, \varepsilon b).$$

Les réels a, b, c, d sont non nuls et le choix

$$\varepsilon = \frac{a}{c} = \frac{d}{b} \quad (\text{possible car } ab = cd)$$

donne $\varepsilon^{-1}a = c$ et $\varepsilon b = d$ puis

$$P_\varepsilon^{-1}M(a, b)P_\varepsilon = M(c, d).$$

Les matrices $M(a, b)$ et $M(c, d)$ sont donc bien semblables.

- 3.a) Oui.

Comme $M(a, b) = M(b, a)$ et $ab = ba$, le résultat précédent prouve que $M(a, b)$ est semblable à sa transposée.

- 3.b) Supposons $M(a, b)$ diagonalisable et notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de $M(a, b)$ (comptées sans multiplicité). Autrement dit $M(a, b)$ est semblable à la matrice

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

On sait alors que $M(a, b)^2$ est semblable à la matrice

$$D^2 = \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2).$$

En particulier, elles ont même trace

$$\text{Tr}(M(a, b)^2) = \text{Tr}(D^2).$$

C'est-à-dire $2nab = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \geq 0$.

On a aussi $ab \neq 0$ d'où

$$ab > 0.$$

- 3.c) Pour $ab > 0$, on peut poser

$$\alpha = \sqrt{ab}.$$

Ainsi $ab = \alpha \cdot \alpha$ et d'après la question 2, $M(a, b)$ est semblable à $M(\alpha, \alpha)$. Or $M(\alpha, \alpha)$ est symétrique, donc diagonalisable. Par suite, $M(a, b)$ aussi.

Exercice 73

p. 53

DA30

1. Notons que $M_{a,b}$ est triangulaire.

→ Si $a \neq b$, alors $M_{a,b}$ est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec deux valeurs propres distinctes. La matrice est diagonalisable.

→ Si $a = b$. Il n'y a qu'une valeur propre. Si $M_{a,b}$ était diagonalisable, alors elle serait semblable à aI_2 , donc égale à aI_2 . Absurde.

En conclusion, $M_{a,b}$ est diagonalisable si et seulement si $a \neq b$.

2.a) Comme X et Y sont indépendantes

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, 1/2).$$

En particulier, $\mathbf{P}(X + Y = n)$ se calcule de deux manière différentes. D'une part

$$\mathbf{P}(X + Y = n) = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n}.$$

D'autre part, avec la propriété de symétrie des coefficients binomiaux

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X + Y = n) &= \sum_{k=0}^n \mathbf{P}([X + Y = n] \cap [Y = k]) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbf{P}([X = n - k] \cap [Y = k]) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbf{P}([X = n - k])\mathbf{P}([Y = k]) \quad \text{indépendance} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{n-k}} \binom{n}{n-k} \frac{1}{2^k} \binom{n}{k} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(X + Y = n) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

D'où
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Il existe une généralisation connue sous le nom de formule de Vandermonde.

2.b) La matrice $M_{X,Y}$ est diagonalisable si et seulement si $X \neq Y$.

La probabilité est alors

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \neq Y) &= 1 - \mathbf{P}(X = Y) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X = k)\mathbf{P}(Y = k) \quad \text{indépendance} \\ &= 1 - \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \\ \mathbf{P}(X \neq Y) &= 1 - \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

Exercice 74

p. 53

DA31

...

Exercice 75

p. 53

DA32

...

Exercice 76

p. 54

DA33

1. Supposons que φ soit diagonalisable. Notons

$$\text{Sp}(\varphi) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\} \quad \text{avec} \quad r = \text{Card Sp}(\varphi).$$

Posons $P(x) = \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)$ et justifions que

$$P(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

C'est-à-dire $\forall u \in E, \quad P(\varphi)(u) = 0_E.$

Soit e , un vecteur propre associé à la valeur propre λ_{i_0} , on a donc $\varphi(e) = \lambda_{i_0}e$, ou encore

$$(\varphi - \lambda_{i_0} \text{id}_E)(e) = 0_E.$$

Comme

$$P(\varphi) = \overbrace{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^r (\varphi - \lambda_i \text{id}_E)}^{:=g} \circ (\varphi - \lambda_{i_0} \text{id}_E)$$

on obtient

$$P(\varphi)(e) = g \circ (\varphi - \lambda_{i_0} \text{id}_E)(e) = g(0_E) = 0_E$$

car g est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

Attention, noter bien la composition \circ . On évitera les expressions qui n'ont pas de sens du type

$$P(\varphi) = \prod_{i=1}^r (\varphi - \lambda_i \text{id}_E) \quad \times \times \times$$

Or φ est diagonalisable, il existe une base de vecteurs propres. Donc il existe une base (e_1, e_2, \dots, e_n) telle que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad P(\varphi)(e_i) = 0_E.$$

Justifions que cette égalité s'étend alors à tout vecteur de E par linéarité. Pour $u \in E$, il existe une famille de réels $(\mu_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ telle que

$$u = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$$

et
$$P(\varphi)(u) = \sum_{i=1}^n \mu_i P(\varphi)(e_i) = \sum_{i=1}^n \mu_i 0_E = 0_E.$$

D'où $P(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Le polynôme P est scindé à racines simples et annulateur de l'endomorphisme φ diagonalisable.

2.a) On sait que $\text{Ker } g \subset \text{Ker } f \circ g$, on peut donc considérer H , un supplémentaire de $\text{Ker } g$ dans $\text{Ker } f \circ g$. C'est-à-dire

$$H \oplus \text{Ker } g = \text{Ker } f \circ g.$$

Étudions l'application Φ définie dans l'énoncé.

• Φ est bien posé.

Comme $\mu \in H \subset \text{Ker}(f \circ g)$, on a $f \circ g(u) = f(g(u)) = 0_E$ et $g(u) \in \text{Ker } f$.

• Φ est linéaire.

H et $\text{Ker } f$ sont des espaces vectoriels et g est linéaire, la restriction aussi.

• Φ est injective.

Soit $u \in \text{Ker } \Phi$. C'est-à-dire $g(u) = 0_E$ et $u \in \text{Ker } g$. Or par construction, on a

$$u \in H \quad \text{et} \quad H \cap \text{Ker}(g) = \{0_E\}.$$

Donc $u = 0_E$ et Φ est injective.

• Par injectivité, on a

$$\dim H \leq \dim \text{Ker } f.$$

Or, on a aussi par les propriétés de dimension des supplémentaires

$$\dim(H) + \dim \text{Ker } g = \dim \text{Ker } f \circ g.$$

Ainsi

$$\dim \text{Ker } f \circ g - \dim \text{Ker } g \leq \dim \text{Ker } f.$$

Le résultat s'en déduit.

2.b) Il suffit de procéder par récurrence à partir de la question précédente.

2.c) Supposons que $P(x) = \prod_{i=1}^r (x - a_i)$ soit annulateur de φ . Notons

$$f_i = \varphi - a_i \text{id}_E$$

de sorte que

$$f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_r = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

C'est-à-dire

$$\text{Ker}(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_r) = E.$$

La relation précédente donne donc

$$\sum_{i=1}^r \dim \text{Ker } f_i \geq \dim E.$$

Puis $\sum_{i=1}^r \dim E_{a_i}(\varphi) \geq \dim E$.

Or, on sait d'après le cours que les sous-espaces propres sont en somme directe et

$$\sum_{i=1}^r \dim E_{a_i}(\varphi) \leq \dim E.$$

On a donc égalité des dimensions et φ est diagonalisable.

3. Notons $g = \varphi|_F$ la restriction de φ à F . Comme F est stable par φ , g est un endomorphisme de F . Soit P un polynôme à racines simples annulateur de φ diagonalisable. C'est-à-dire

$$P(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

ou encore

$$\forall u \in E, \quad P(\varphi)(u) = 0_E.$$

En particulier,

$$\forall u \in F, \quad P(g)(u) = P(\varphi)(u) = 0_E.$$

L'endomorphisme g admet le même polynôme annulateur scindé à racines simples. Il est donc diagonalisable.

Exercice 77

p. 54

DA34

1. Posons pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$

$$e_k(x) = x^k.$$

Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Par la formule du binôme

$$\begin{aligned} \varphi(e_k)(x) &= (ax + b)^k \\ &= \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} a^\ell x^\ell b^{k-\ell}. \end{aligned}$$

D'où

$$\varphi(e_k) = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} a^\ell b^{k-\ell} e_\ell.$$

et avec la convention $\binom{k}{\ell} = 0$ si $\ell > k$, on a même

$$\varphi(e_k) = \sum_{\ell=0}^n \binom{k}{\ell} a^\ell b^{k-\ell} e_\ell.$$

Le coefficient en position (i, j) de la matrice de φ dans la base canonique est alors le coefficient devant e_{j-1} dans le développement de $\varphi(e_{j-1})$, soit

$$\binom{j-1}{i-1} a^{i-1} b^{j-i}.$$

Pour $i > j$, on trouve 0. Donc la matrice est triangulaire supérieure et les coefficients diagonaux sont

$$1, a, a^2, \dots, a^n.$$

Ils constituent le spectre de φ .

2. Si $a \notin \{\pm 1\}$, alors le spectre contient $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$ valeurs propres. On sait alors que l'endomorphisme est diagonalisable.

3. On suppose donc $a = 1$.

Si φ est diagonalisable, la matrice A de φ dans la base canonique serait semblable à la matrice I_{n+1} . Or seule I_{n+1} est semblable à I_{n+1} . Donc $A = I_{n+1}$ et $b = 0$. Réciproquement si $a = 1$ et $b = 0$ alors φ est l'endomorphisme identité de

$\mathbb{R}_n[x]$ qui est bien diagonalisable.

4.a) Considérons :

$$F = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid P \text{ est un polynôme pair}\}$$

$$\text{et } G = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid P \text{ est un polynôme impair}\}.$$

Justifions par analyse-synthèse que ces deux espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[x]$. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$.

→ *Analyse (recherche des conditions nécessaires).*

On suppose que $P \in F + G$, il existe donc P_i et P_p des polynômes respectivement impair et pair tels que $P(x) = P_i(x) + P_p(x)$. On a aussi :

$$P(-x) = P_i(-x) + P_p(-x) = -P_i(x) + P_p(x).$$

Il vient :

$$P_i(x) = \frac{P(x) - P(-x)}{2} \quad \text{et} \quad P_p(x) = \frac{P(x) + P(-x)}{2}.$$

Ainsi, les seuls candidats pour P_i et P_p sont ceux donnés par ces formules.

→ *Synthèse (recherche des conditions suffisantes).*

Posons

$$P_i(x) = \frac{P(x) - P(-x)}{2} \quad \text{et} \quad P_p(x) = \frac{P(x) + P(-x)}{2}.$$

On vérifie :

P_p est un polynôme pair car

$$P_p(-x) = \frac{P(-x) + P(x)}{2} = P_p(x).$$

De même, on montre que P_i est un polynôme impair. De plus

$$P_p(x) + P_i(x) = \frac{P(x) - P(-x)}{2} + \frac{P(x) + P(-x)}{2} = P(x).$$

→ *Conclusion.*

Tout polynôme s'écrit de manière unique comme somme d'un polynôme pair et d'un polynôme impair. Cela justifie l'égalité $F \oplus G = \mathbb{R}[x]$.

Pour en revenir à l'endomorphisme φ , on a vu que $\text{Sp}(\varphi) = \{-1; 1\}$ et on remarque que

$$E_1(\varphi) = F \quad \text{et} \quad E_{-1}(\varphi) = G.$$

On a donc la décomposition

$$E_1(\varphi) \oplus E_{-1}(\varphi) = \mathbb{R}_n[x].$$

Cela suffit à dire que l'endomorphisme φ est diagonalisable.

4.b) Posons :

$$F_b = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid P(x) = P(b-x)\}$$

$$\text{et } G_b = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid P(x) = -P(b-x)\}.$$

En reprenant la démonstration précédente, tout polynôme P peut s'écrire sous la forme

$$P(x) = \underbrace{\frac{P(x) + P(b-x)}{2}}_{\in F_b} + \underbrace{\frac{P(x) - P(b-x)}{2}}_{\in G_b}.$$

On a aussi

$$E_1(\varphi) = F_b \quad \text{et} \quad E_{-1}(\varphi) = G_b.$$

Finalement, l'endomorphisme φ est diagonalisable.

Exercice 78

p. 54

DA35

...

Exercice 79

p. 54

DA36

Rappelons le théorème de la division euclidienne.

Pour tous $A, B \in \mathbb{R}[x]$ avec $A \neq 0$, il existe un unique couple de polynômes (R, Q) tel que

$$B = AQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg A.$$

1. Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[x]$. Il existe $(Q_1, R_1), (Q_2, R_2)$ tels que

$$\begin{cases} P_1 = AQ_1 + R_1 & \deg R_1 < \deg A \\ P_2 = AQ_2 + R_2 & \deg R_2 < \deg A \end{cases}$$

Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda P_1 + \mu P_2 = A(\lambda Q_1 + \mu Q_2) + (\lambda R_1 + \mu R_2)$$

avec $\deg(\lambda R_1 + \mu R_2) < \deg A$.

La relation précédente est la division euclidienne de $\lambda P_1 + \mu P_2$ par A avec un couple « quotient/reste » donné par

$$\lambda Q_1 + \mu Q_2 \quad \text{et} \quad \lambda R_1 + \mu R_2.$$

Ainsi

$$\begin{cases} \varphi(P_1) = R_1 & \text{et} & \varphi(\lambda P_1 + \mu P_2) \\ \varphi(P_2) = R_2 & & = \lambda R_1 + \mu R_2. \end{cases}$$

On a bien

$$\varphi(\lambda P_1 + \mu P_2) = \lambda \varphi(P_1) + \mu \varphi(P_2).$$

L'application φ est bien linéaire. Comme $\varphi(P) \in \mathbb{R}_1[x]$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$, φ est un endomorphisme.

2. Explicitons les trois divisions euclidiennes des trois vecteurs de la base canonique :

$$\begin{cases} 1 & = & 0 \times (x-1)^2 + 1 \\ x & = & 0 \times (x-1)^2 + x \\ x^2 & = & 1(x-1)^2 + 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(1) & = & 1 \\ \varphi(x) & = & x \\ \varphi(x^2) & = & 2x + 1. \end{cases}$$

On obtient

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. On constate que $M^2 = M$. On en déduit que φ est un projecteur.

4. Un projecteur est diagonalisable et son spectre est $\{0; 1\}$. Comme M est de rang 2, le noyau est de dimension 1, on trouve

$$E_0(M) = \text{Ker } M = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

L'espace propre associé à la valeur propre 1 est

$$E_1(M) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Ainsi, en traduisant dans $\mathbb{R}_2[x]$

$$E_0(\varphi) = \text{Ker } \varphi = \text{Vect}(x^2 - 2x + 1) = \text{Vect}((x-1)^2)$$

et $E_1(\varphi) = \text{Vect}(1, x) = \mathbb{R}_1[x]$.

Remarque. Résultat a posteriori prévisible puisque pour tout $P \in \mathbb{R}_1[x]$

$$P = 0 \cdot (x^2 - 1) \quad \text{et} \quad \varphi(P) = P$$

et $\varphi((x-1)^2) = (x-1)^2$.

Exercice 82

p. 55

DA37

1. Soient $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i A^i = 0_n.$$

Si on introduit le polynôme

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i x^i.$$

alors Q est annulateur de A . Si \mathcal{R}_Q désigne l'ensemble des racines de Q

$$\text{Sp}(A) \subset \mathcal{R}_Q.$$

Or, A admet n valeurs propres distinctes, Q est un polynôme de degré au plus $n-1$ avec au moins n racines. Q est donc le polynôme nul, les coefficients $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ sont donc nuls et la famille (I_n, A, \dots, A^{n-1}) est libre.

2. Vérifier que \mathcal{C} est non vide et

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall M, N \in \mathcal{C}, \quad \lambda M + \mu N \in \mathcal{C}.$$

Remarque. On peut aussi écrire

$$\mathcal{C} = \text{Ker } \varphi \quad \text{où} \quad \varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Comme $A^i \in \mathcal{C}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et que la famille à n vecteurs (I_n, A, \dots, A^{n-1}) est libre

$$\dim \mathcal{C} \geq \text{Card}(I_n, A, \dots, A^{n-1}) = n.$$

3. Comme A possède n valeurs propres distinctes, A est diagonalisable. D'où le résultat.

4. Soient X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ . C'est-à-dire

$$AX = \lambda X.$$

Comme $M \in \mathcal{C}$, on a aussi

$$AMX = MAX = M(\lambda X) = \lambda(MX).$$

D'où $MX \in E_\lambda(A)$.

Or, on sait aussi que A a n valeurs propres distinctes et que les sous-espaces propres sont tous de dimension 1. Comme $X \neq 0$, on a alors

$$E_\lambda(A) = \text{Vect}(X).$$

Ainsi $MX \in \text{Vect}(X)$. Il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $MX = \mu X$ et $X \neq 0_{n,1}$, X est vecteur propre pour M .

La matrice M admet une base de vecteurs propres qui sont aussi vecteurs propres pour A . Donc M est diagonalisable avec la même matrice de passage P que A . Autrement dit, $P^{-1}MP$ est diagonale.

Si \mathcal{D}_n désigne le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de taille n .

Ce résultat permet de définir l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{C} & \rightarrow \mathcal{D}_n \\ M & \rightarrow P^{-1}MP. \end{cases}$$

L'application est injective donc

$$\dim \mathcal{C} \leq \dim \mathcal{D}_n = n.$$

5. On a donc $\dim \mathcal{C} = n$ et la famille libre à n vecteurs (I_n, A, \dots, A^{n-1}) est une base de \mathcal{C} .

Exercice 83

p. 56

DA38

1. Posons $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{bmatrix}$ de sorte que pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} AU_n &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ -au_n + (1+a)u_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2.a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= \det \left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -a & (1+a) - \lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= \lambda(\lambda - (1+a)) + a \\ &= \lambda^2 - (1+a)\lambda + a. \end{aligned}$$

On constate que 1 est racine de cette fonction polynomiale de degré 2. À l'aide des relations coefficients racines, a est la seconde racine. Comme $a \neq 1$, $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ possède 2 valeurs propres. La matrice A est diagonalisable. On vérifie que

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_a(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} \right).$$

Soit P , la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}.$$

On a alors $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

2.b) Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on montre que

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Posons ensuite le calcul

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^n \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{a-1} \begin{bmatrix} a & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a-1} \begin{bmatrix} 1 & a^n \\ 1 & a^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ A^n &= \frac{1}{a-1} \begin{bmatrix} a-a^n & a^n-1 \\ a-a^{n+1} & a^{n+1}-1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. Par récurrence, on a aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = A^n U_0.$$

Et si on pose le calcul

$$\begin{aligned} U_n &= A^n U_0 \\ &= \frac{1}{a-1} \begin{bmatrix} a-a^n & a^n-1 \\ a-a^{n+1} & a^{n+1}-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

D'où $u_n = \frac{1}{a-1} (u_0(a-a^n) + u_1(a^n-1))$.

$$= \frac{1}{a-1} (au_0 - u_1 + a^n(u_1 - u_0)).$$

Expression que l'on peut exprimer sous la forme

$$u_n = \lambda \cdot 1^n + \mu \cdot a^n, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

4. Les suites $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une base de E.

L'équation caractéristique est $x^2 = (1+a)x - a$. On retrouve l'équation de la question 2.a). Il y a deux racines 1 et a . On sait alors qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda 1^n + \mu a^n = \lambda + \mu a^n.$$

On retrouve la même base : $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 84

p. 56

DA39

1. Soit y une solution. Posons pour tout $x \in I$,

$$h(x) = y(x)e^{-A(x)}.$$

La fonction h est dérivable sur I par produit et composition.

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad h'(x) &= y'(x)e^{-A(x)} + y(x)(-A'(x)e^{-A(x)}) \\ &= y'(x)e^{-A(x)} - a(x)y(x)e^{-A(x)} \\ &= (y'(x) - a(x)y(x))e^{-A(x)} \\ h'(x) &= 0. \end{aligned}$$

La fonction h est donc constante sur l'intervalle I . Soit C , cette constante, $h(x) = C$ pour tout $x \in I$. Puis,

$$\forall x \in I, \quad y(x) = Ce^{A(x)}.$$

Remarque. Réciproquement, on vérifie que les fonctions $x \in I \mapsto Ce^{A(x)}$ sont solutions.

2.a) Il suffit de poser

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -18 & 27 \\ -3 & 7/2 & -6 \\ -4 & 7 & -11 \end{bmatrix}$$

On trouve 3 valeurs propres : 2, $-1/2$ et -1 avec

$$X_1 = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$E_2(A) = \text{Vect}(X_1)$, $E_{-1/2}(A) = \text{Vect}(X_2)$, $E_{-1}(A) = \text{Vect}(X_3)$.

La matrice A est donc diagonalisable et

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} -3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 3/2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \text{diag}(2, -1/2, -1).$$

À l'aide d'un pivot de Gauss (ou de Python)

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 4 & -10 & 16 \\ -2 & 6 & -9 \end{bmatrix}.$$

2.c) On a pour $t \in \mathbb{R}$

$$X'(t) = AX(t) = Q^{-1}DQX(t),$$

puis $Y'(t) = QX'(t) = DQX(t) = D \cdot Y(t)$.

On en déduit

$$\begin{cases} u'(t) = 2u(t) \\ v'(t) = -1/2v(t) \\ w'(t) = -w(t) \end{cases}$$

D'après la question 1, il existe $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que

$$u(t) = \lambda e^{2t}, \quad v(t) = \mu e^{-t/2}, \quad w(t) = \nu e^{-t}.$$

Enfin

$$X(t) = Q^{-1}Y(t)$$

$$X(t) = PY(t)$$

$$= \begin{bmatrix} -3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 3/2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda e^{2t} \\ \mu e^{-t/2} \\ \nu e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Finalement

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{3}{2}\lambda e^{2t} + \nu e^{-t} \\ y(t) = \lambda e^{2t} + \frac{3}{2}\mu e^{-t/2} + 2\nu e^{-t} \\ z(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{-t/2} + \nu e^{-t}. \end{cases}$$

Exercice 85

p. 56

DA40

...

Exercice 86

p. 57

DA41

...

Exercice 87

p. 57

DA42

1.a) On a $R(x) = -3 + 2x + x^2 = (x - 1)(x + 3)$.

1.b) Les réels 1 et -3 sont racines de R. De plus pour $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 3 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda(2+\lambda) - 3 = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = R(\lambda).$$

Or $\lambda \in \text{Sp}(R)$ si et seulement si $\det(C_R - \lambda I_2) = 0$, si et seulement si $R(\lambda) = 0$. Dans ce cas, le spectre de R s'identifie aux racines de C_R .

2. Oui, car la matrice a deux valeurs propres distinctes et qu'elle est de taille (2,2).

3. Notons $(c_i)_i$, les colonnes de C_P .

Les $n - 1$ premières colonnes de C_P sont linéairement indépendantes, donc

$$\text{rg}(C_P) \geq n - 1.$$

→ Si $a_0 = 0$, alors on constate que

$$c_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i c_i = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

et dans ce cas, la matrice C_P n'est pas inversible.

$$\text{rg}(C_P) = n - 1.$$

→ Si $a_0 \neq 0$, c_n ne peut être combinaison linéaire des $n - 1$ premières colonnes

$$\text{rg}(C_P) = n.$$

4. On a la suite d'équivalences.

0 est valeur propre.

si seulement si $\text{rg}(C_P - 0 \cdot I_n) < n$

si seulement si $\text{rg}(C_P) < n$

si seulement si $a_0 = 0$

si seulement si $P(0) = 0$.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On

$$C_P - \lambda I_n =$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & -\lambda & 0 & -a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & & 1 & -\lambda & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} - \lambda \end{bmatrix}.$$

On constate que les $n - 1$ premières colonnes (ou encore les lignes 2 à n) sont linéairement indépendantes.

Ainsi

$$\text{rg}(C_P - \lambda I_n) \geq n - 1$$

et par la formule du rang

$$\dim(\text{Ker}(C_P - \lambda I_n)) \leq 1.$$

6. Dans cet exemple :

$$\begin{aligned} M_R &= -3I_2 + 2C_R + C_R^2 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

7.a) On constate que pour tout $k \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$

$$E_{k+1} = C_P E_k.$$

Le résultat s'en déduit par récurrence.

7.b) $X = E_1$ convient car (E_1, E_2, \dots, E_n) est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

8. D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} M_P E_1 &= \sum_{i=0}^n a_i C_P^i E_1 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i C_P^i E_1 + a_n C_P E_n. \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i E_{i+1} + 1 \cdot C_P E_n. \end{aligned}$$

Or on a

$$C_P E_n = C_P \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_0 \\ -a_1 \\ \vdots \\ -a_{n-2} \\ -a_{n-1} \end{bmatrix} = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i E_{i+1}.$$

Il vient $M_P E_1 = 0_{n,1}$.

9. Comme M_P et C_P commutent, pour tout $i \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} M_P C_P^i X &= C_P^i M_P X = C_P^i M_P E_1 \\ &= C_P^i \cdot 0_{n,1} = 0_{n,1}. \end{aligned}$$

Comme $(X, \dots, C_P^{n-1} X)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, M_P est nulle.

Détaillons ce point. Soit φ l'endomorphisme canoniquement associé à M_P . Alors il existe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de \mathbb{R}^n telle que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \varphi(e_i) = 0_E.$$

Pour $u \in \mathbb{R}^n$, \mathcal{B} étant une base de \mathbb{R}^n , il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, puis par linéarité

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{\varphi(e_i)}_{=0_E} = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

On en déduit que φ est l'endomorphisme nul, M_P est alors aussi nulle.

10. Le polynôme P est annulateur de C_p . On sait alors que toute valeur propre de C_p est racine de P.

11.a) On a

$$C_p X = \begin{pmatrix} -a_0 x_n \\ x_1 - a_1 x_n \\ x_2 - a_2 x_n \\ \vdots \\ x_{n-2} - a_{n-2} x_{n-2} \\ x_{n-1} - a_{n-1} x_{n-1} \end{pmatrix}$$

Ainsi $C_p X = \lambda X$ si on a le système linéaire :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} -a_0 x_n = \lambda x_1 \\ x_1 - a_1 x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} - a_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

Procédons par récurrence pour établir la propriété

$$\mathcal{P}(k) : x_{n-k} = (a_{n-k} + \lambda a_{n-k+1} + \dots + \lambda^k) x_n$$

pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$.

→ *Initialisation.* pour $k = 1$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie en regardant directement la dernière ligne de \mathcal{S} .

→ *Hérédité.* Soit $k \in \llbracket 1; n-2 \rrbracket$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie. En regardant la ligne L_{n+1-k} du système \mathcal{S} , on a

$$x_{n-(k+1)} - a_{n-(k+1)} x_n = \lambda x_{n-k}$$

À l'aide de $\mathcal{P}(k)$

$$\begin{aligned} x_{n-(k+1)} &= a_{n-(k+1)} x_n + \lambda x_{n-k} \\ &= (a_{n-(k+1)} x_n) \\ &\quad + \lambda (a_{n-k} + \lambda a_{n-k+1} + \dots + \lambda^k) x_n \\ &= (a_{n-(k+1)} + \lambda a_{n-k} + \lambda^2 a_{n-k+1} \\ &\quad + \dots + \lambda^{k+1}) x_n. \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(k+1)$ est ainsi vérifiée.

→ *Conclusion.* Pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

11.b) Commençons par poser $x_n = 1$ et définir x_{n-k} grâce à la relation précédente. C'est-à-dire, pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$

$$x_{n-k} = (a_{n-k} + \lambda a_{n-k+1} + \dots + \lambda^{k-1} a_{n-1} + \lambda^k) \times 1.$$

Ou encore pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$

$$x_i = a_i + \lambda a_{i+1} + \dots + \lambda^{n-i-1} a_{n-1} + \lambda^{n-i}.$$

→ On a alors pour $k \in \llbracket 1; n-2 \rrbracket$

$$\begin{aligned} x_{n-k} - a_{n-k} x_n &= \lambda a_{n-k+1} + \dots + \lambda^{k-1} a_{n-1} + \lambda^k \\ &= \lambda (a_{n-k+1} + \dots + \lambda^{k-2} a_{n-1} + \lambda^{k-1}) \\ &= \lambda x_{n-(k+1)}. \end{aligned}$$

→ et pour $k = n-1$

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= \lambda (a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda^{n-2} a_{n-1} + \lambda^{n-1}) \\ &= a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n \\ &= P(\lambda) - a_0 \\ &= 0 - a_0 x_n \end{aligned}$$

car $x_n = 1$ et λ est racine de P.

On vient de vérifier que (x_1, \dots, x_n) est solution du système \mathcal{S} . Autrement dit X (que est non nul) est un vecteur propre de C_p .

12. Posons $n = \deg S$.

On a vu que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\dim \text{Ker}(C_S - \lambda I_n) \leq 1.$$

De plus, si $\lambda \in \text{Sp}(C_S)$

$$\dim \text{Ker}(C_S - \lambda I_n) \geq 1.$$

Sachant que C_S est diagonalisable si et seulement si

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(C_S)} \dim \text{Ker}(C_S - \lambda I_n) = n,$$

on peut affirmer que C_S est diagonalisable si et seulement si

$$\text{CardSp}(C_S) = n.$$

Autrement dit, C_S est diagonalisable si et seulement si C_S a exactement n valeurs propres. Or

$$n = \deg S = \sum_{i=1}^k \alpha_i$$

$$k = \text{Card}(\text{Sp}(C_S)) = n.$$

Nécessairement, C_S est diagonalisable si et seulement si tous les α_i valent 1.

Dit autrement, C_S est diagonalisable si et seulement si S est scindé sur \mathbb{R} à racines simples.

13. Oui, car on vérifie que le polynôme associé à cette matrice compagnon a trois racines 1, 2 et 3.