

La rigueur n'a jamais eu pour objet que de sanctionner et légitimer les conquêtes de l'intuition.

Jacques Hadamard Mathématicien français (1865-1963).

Ce cours complète le cours d'ECG sur la réduction des matrices et endomorphismes à l'aide des deux nouveaux outils : les nombres complexes et le déterminant. Plus précisément, on verra les conséquences du théorème de Gauss et la factorisation sur l'existence de valeurs propres. Ensuite, on introduira le polynôme caractéristique, ses propriétés et son intérêt en réduction.

1 Polynômes à coefficients complexes

1.1 Théorème de Gauss, factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

On dit qu'un polynôme P est **scindé** dans \mathbb{K} si on peut l'écrire sous la forme

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r, \quad (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}^{*r}.$$

On dit qu'il est **scindé à racines simples** dans \mathbb{K} si on peut l'écrire sous la forme

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i) \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \forall i \neq j, \quad \alpha_i \neq \alpha_j.$$

Autrement dit, un polynôme est scindé si le nombre de racines (comptées avec multiplicité) est égal au degré.

Le polynôme est scindé à racines simples si le nombre de racines (sans multiplicité) est égal exactement au degré.

⚠ Attention. Ces notions dépendent fortement du choix de \mathbb{K} . Il est clair qu'un polynôme scindé (respectivement scindé à racines simples) sur \mathbb{R} l'est aussi sur \mathbb{C} . L'inverse est faux. Par exemple

$$X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \bar{j}) \quad \text{où } j = e^{i\frac{2\pi}{3}},$$

est scindé à racines simples sur \mathbb{C} mais pas sur \mathbb{R} .

La situation est particulièrement simple sur \mathbb{C} à l'aide du résultat suivant :

THÉORÈME

de D'Alembert-Gauss

Toute équation polynomiale complexe de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admet au moins une solution.

Dit autrement, pour tout polynôme P non constant, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ et un polynôme Q tels que $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$. En itérant ce processus, on obtient :

COROLLAIRE

du théorème de D'Alembert-Gauss

Tout polynôme complexe, non constant, est scindé sur \mathbb{C} .

Exemples. • Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

$$(X - \exp(i\theta))(X - \exp(-i\theta)) = X^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})X + e^{i\theta}e^{-i\theta} = X^2 + 2\cos(\theta)X + 1.$$

Le polynôme $X^2 + 2\cos(\theta)X + 1$ est scindé sur \mathbb{C} mais n'est scindé sur \mathbb{R} que pour $e^{i\theta} \in \mathbb{R}$. C'est-à-dire, $\theta = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons vu que $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n})$, ce dernier est scindé à racines simples. Les racines sont les racines n -ième de l'unité.

Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Il ne faut pas oublier que l'on peut appliquer à un polynôme *réel* les résultats sur les applications de la variable réelle.

• Par exemple, on peut prouver l'existence d'une racine réelle d'un polynôme P réel de degré impair par le théorème des valeurs intermédiaires.

Supposons sans perte de généralité que son coefficient dominant soit positif. On a alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty.$$

En particulier, il existe deux réels α et β tels que $\alpha < \beta$, $P(\alpha) < 0$ et $P(\beta) > 0$. Un polynôme réel *étant continu* sur \mathbb{R} , le théorème des valeurs intermédiaires s'applique, il existe un réel c tel que $P(c) = 0$. Ce polynôme admet donc une racine réelle.

• On peut aussi reprendre l'exemple de la méthode précédente : le seul polynôme réel vérifiant $P(X) + P(X+1) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ est le polynôme nul. En effet, pour un entier n , comme $P(n) + P(n+1) = 0$, on en déduit que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont soit nuls, soit de signe opposé. Par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout entier n , il existe au moins une racine dans $[n; n+1]$. On a de nouveau une infinité de racines, le polynôme est nul.

LEMME

Soit P un polynôme dont les coefficients sont réels.

Le réel α est une racine complexe de P si et seulement le conjugué $\bar{\alpha}$ est une racine de P .

Preuve. On note $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ avec pour tout indice i , $a_i \in \mathbb{R}$. En particulier, $\bar{a_i} = a_i$. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$P(\bar{\alpha}) = \sum_{i=0}^n a_i (\bar{\alpha})^i = \sum_{i=0}^n \overline{a_i \alpha^i} = \overline{\sum_{i=0}^n a_i \alpha^i} = \overline{P(\alpha)}.$$

Ainsi, α est une racine de P si et seulement si $P(\alpha) = 0$, si et seulement si $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = 0$, c'est-à-dire, $\bar{\alpha}$ est une racine de P . ■

Considérons un polynôme réel P non constant.

En particulier, P est un polynôme complexe. D'après le théorème de D'Alembert-Gauss, il existe une racine complexe α . Distinguons :

• Si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors on peut factoriser P par $(X - \alpha)$ dans $\mathbb{R}[X]$. Il existe $P_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)P_1$.

• Sinon, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, ou encore $\alpha \neq \bar{\alpha}$. On a vu que dans le cas d'un polynôme réel, $\bar{\alpha}$ est encore une racine de P . On en déduit que $R_1(X) = (X - \alpha)(X - \bar{\alpha})$ divise P . Or,

$$R_1(X) = (X - \alpha)(X - \bar{\alpha}) = X^2 - (\alpha + \bar{\alpha})X + \alpha\bar{\alpha} = X^2 - 2\Re(\alpha)X + |\alpha|^2 \in \mathbb{R}[X].$$

Autrement dit, il existe $R_1 \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 avec deux racines complexes conjuguées (son discriminant est strictement négatif), $P_1 \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P = R_1 P_1 \quad \text{et} \quad \deg(P_1) < \deg(P).$$

Ensuite, on a une disjonction similaire pour P_1 . Si P_1 n'est pas constant, il admet une racine. On distingue ensuite si cette racine est réelle ou non.

En procédant par récurrence, on montre la proposition suivante. Notons que la récurrence est finie puisque la suite des degrés est une suite strictement décroissante d'entiers naturels.

PROPOSITION

Factorisation dans le cas réel

Tout polynôme réel P s'écrit sous la forme

$$P(X) = \lambda(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_s) \cdot R_1 \cdots R_r$$

avec :

- λ le coefficient dominant de P ;
- $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 1; s \rrbracket}$ les racines réelles de P ;
- Pour tout indice i , R_i est un polynôme réel de degré 2 sans racines réelles (c'est-à-dire de discriminant strictement négatif).

2

Compléments sur les polynômes de matrices, d'endomorphismes

2.1 Polynômes annulateurs

(rappels)

Soient $P(X) = \sum_{i=0}^p a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

→ Le polynôme de matrice $P(A)$ est défini par : $P(A) = \sum_{i=0}^p a_i A^i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Un polynôme P est annulateur de A si $P(A) = 0_n$.

→ Le polynôme d'endomorphisme $P(\varphi)$ est défini par : $P(\varphi) = \sum_{i=0}^p a_i \varphi^i \in \mathcal{L}(E)$.

Un polynôme P est annulateur de φ si $P(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Rappelons aussi deux faits importants : pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et $u \in E$.

- Si $\varphi(u) = \lambda u$, alors $P(\varphi)(u) = P(\lambda)u$;
- Si P est un polynôme annulateur de φ , toute valeur propre de φ est racine de P .

2.2 Polynôme minimal

DÉFINITION

Polynôme minimal

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe un unique polynôme unitaire qui divise tous les polynômes annulateurs de A . Ce polynôme est appelé polynôme minimal de A , noté π_A .

Preuve. Existence

La famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ contient $n^2 + 1 > \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ éléments. Nécessairement, la famille est liée : il existe $(a_i)_{i \in \llbracket 0; n^2 \rrbracket}$ tel que

$$(a_i)_i \neq (0, \dots, 0) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n^2} a_i A^i = 0_n.$$

Le polynôme $P = \sum_{i=0}^{n^2} a_i X^i$ est non nul et annulateur. On peut donc considérer l'ensemble non vide

$$\mathcal{S}_A = \{P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\} \mid P \text{ annulateur de } A\}$$

et

$$D_A = \{\deg P \mid P \in \mathcal{S}_A\}.$$

L'ensemble D_A est une partie non vide de \mathbb{N} . Il existe un plus petit élément. Soit $P_0 \in \mathcal{S}_A$ dont le degré est bien le minimum. Comme P_0 est non nul, P_0 admet un coefficient dominant non nul c_P . Dès lors le polynôme

$$\pi_A = \frac{1}{c_P} P_0 \text{ convient.}$$

Unicité

Considérons un deuxième polynôme Q vérifiant les mêmes conditions. Le polynôme $R = \pi_A - Q$ est annulateur de A dont le degré est strictement inférieur à celui de π_A car $\pi_A - Q$ ont même degré, même coefficient dominant. Par construction, R est nécessairement le polynôme nul et $\pi_A = Q$, l'unicité est prouvée.

Divisibilité

Soit $P \in \mathcal{S}_A$. Justifions que π_A divise P . Pour cela on effectue la division euclidienne.

$$\exists (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad \begin{cases} P = Q\pi_A + R \\ \deg R < \deg \pi_A. \end{cases}$$

Or R est aussi annulateur de A . Pour des questions de degré, R est nécessairement le polynôme nul. Ce qui conclut. ■

Exercice 1



◇ On considère la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

À l'aide du code Python suivant, donner le polynôme minimal pour M . Justifier.

Editeur

```
M = np.array([[7, 10, 0],
              [-3, -4, 0],
              [0, 0, 2]])
print(np.dot(M, M) - 3 * M)
```

Console

```
[[ -2  0  0]
 [ 0 -2  0]
 [ 0  0 -2]]
```

CeR1

Remarques.

→ Soient $A, B, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que Q est inversible et $A = QBQ^{-1}$. On vérifie par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = QB^kQ^{-1}$. On en déduit par linéarité de la somme que pour tout polynôme P , $P(A) = QP(B)Q^{-1}$. Dès lors, deux matrices semblables ont même polynôme minimal.

→ Le polynôme minimal ne dépend pas du corps. Dit autrement, le polynôme minimal d'une matrice A à coefficients réels est le même que celui de A vue comme une matrice à coefficients complexes.

Exercice 2



◆◆ Soit φ , un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n . On pose

$$\mathbb{K}[\varphi] = \{P(\varphi) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Justifier que si d désigne le degré du polynôme minimal de φ , alors la famille $(\varphi^k)_{k \in \llbracket 0; d-1 \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{K}[\varphi]$.

CeR2

2.3 Lien avec la réduction

PROPOSITION

Spectre et polynôme minimal

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Le nombre λ est valeur propre de A si et seulement si λ est racine de π_A .

Preuve. → Comme π_A est annulateur, on a déjà vu que

$$\text{Sp}(A) \subset \text{Racines}(\pi_A).$$

→ Prouvons l'inclusion réciproque. Soit λ une racine de π_A . Il existe donc $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\pi_A = (x - \lambda)Q$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\lambda \notin \text{Sp}(A)$. La matrice $(A - \lambda I_n)$ est inversible. La relation

$$0_n = \pi_A(A) = (A - \lambda I_n) \cdot Q(A)$$

multipliée à gauche par $(A - \lambda I_n)^{-1}$ donne $Q(A) = 0_n$. Absurde car Q est non nul, annulateur de A et de degré strictement inférieur à π_A . Ce qui conclut. ■

COROLLAIRE

Existence d'une valeur propre

Toute matrice admet au moins une valeur propre complexe.

Preuve. Il suffit de dire que π_A , en tant que polynôme complexe admet une racine complexe (Théorème de D'Alembert-Gauss). On applique ensuite la proposition précédente. ■

THÉORÈME

CNS polynomiale pour la diagonalisabilité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a l'équivalence entre les énoncés suivants :

- i) La matrice est diagonalisable dans \mathbb{K} .
- ii) Il existe un polynôme annulateur scindé dans \mathbb{K} à racines simples.
- iii) Le polynôme minimal est scindé dans \mathbb{K} à racines simples.

Pour une preuve, on pourra regarder l'exercice 18.

Remarque. On peut faire un théorème équivalent pour tout endomorphisme défini sur un espace vectoriel de dimension finie.

Exemple. Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables puisqu'ils admettent un polynôme annulateur scindé qui sont respectivement

$$X^2 - X = X(X - 1) \quad \text{et} \quad X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1).$$

Exercice 3



Les questions sont indépendantes

1. Soit F , un sous-espace stable par $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. Justifier que si φ est diagonalisable alors la restriction de φ à F , noté $\varphi|_F$, est aussi diagonalisable.
2. Vrai ou faux?
Pour toute matrice A inversible, A^2 est diagonalisable si et seulement si A l'est.

CeR3

3

Le polynôme caractéristique

3.1

Définition et exemples

DÉFINITION

polynôme caractéristique d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique** de A , noté χ_A , le polynôme

$$\chi_A = \det(XI_n - A).$$

Exemple. Vérifier que le polynôme caractéristique de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est $\chi_A = (X-1)(X^2 - 2X + 2) = (X-1)(X-1+i)(X-1-i)$.

Exercice 4



◆◆ Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. Donner le polynôme caractéristique de la matrice

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & -a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

CeR4

Remarques.

Dans ce cas, on a directement :

Le nombre λ est valeur propre de A si et seulement si λ est racine de χ_A .

→ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme $\chi_A = \det(XI_n - A)$ est de degré n et unitaire. De plus, on montre en utilisant la formule explicite du déterminant que

$$\chi_A = X^n - \text{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$

→ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$.

En effet, il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$ de sorte que

$$\chi_B = \det(XI_n - B) = \det(XI_n - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det(XI_n - A) \det(P) = \chi_A.$$

Exercice 5



◆

Les questions sont indépendantes

1. En utilisant le polynôme caractéristique, montrer que toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans \mathbb{R} .
2. Si $\chi_A = \chi_B$, a-t-on A semblable à B ?

CeR5

DÉFINITION

polynôme caractéristique

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, où E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

On appelle **polynôme caractéristique** de φ , noté χ_φ , le polynôme caractéristique de toute matrice représentative de φ .

Remarques.

→ Précisons que c'est l'invariance par similitude du polynôme caractéristique et la formule de changement de base qui prouve que le polynôme caractéristique d'un endomorphisme ne dépend pas du choix de la base.

- Les résultats sur les matrices s'étendent aux endomorphismes. Par exemple, le nombre λ est valeur propre de φ si et seulement si λ est racine de χ_φ .
- En reprenant la définition du déterminant d'un endomorphisme, on a aussi

$$\chi_\varphi = \det(\text{Xid}_E - \varphi).$$

Exercice 6



◆◆ Soient φ , un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie et F un sous-espace vectoriel stable par φ . Justifier que $\chi_\varphi|_F$ divise χ_φ .

CeR6

Exemple. Supposons que A soit une matrice diagonale. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, les valeurs propres de A deux à deux distinctes et d_i la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i . On sait alors que A est semblable à la matrice

$$D = \text{diag} \left(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{d_1 \text{ répétitions}}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{d_r \text{ répétitions}} \right).$$

Par invariance par similitude, on a alors

$$\chi_A = \chi_D = \det(\text{XI}_n - D) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{d_i}.$$

3.2 Théorème de Cayley-Hamilton

THÉORÈME

Cayley-Hamilton

La polynôme caractéristique de toute matrice est un polynôme annulateur. Autrement dit,

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \chi_A(A) = 0_n.$$

Avant de faire la preuve, commençons par deux cas particuliers.

- $n = 2$

D'une part, en reprenant le deuxième encadré de la remarque précédente, on sait que

$$\chi_A = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A).$$

D'autre part, on peut poser le calcul avec $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, on a

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{bmatrix} \\ -\text{Tr}(A)A &= \begin{bmatrix} -a^2 - da & -ba - bd \\ -ac - dc & -ad - d^2 \end{bmatrix} \\ \det(A)I_2 &= \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Par somme,

$$A^2 - \text{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0_2.$$

On a donc bien

$$\chi_A(A) = 0_2.$$

- Traitons maintenant le cas où A est diagonalisable. Si on reprend les résultats précédents, on a

$$\pi_A = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda) \quad \text{et} \quad \chi_A = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda)^{\dim E_\lambda(A)}.$$

En particulier π_A divise χ_A , il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q\pi_A = \chi_A$. Sachant que π_A est annulateur de A , on obtient bien

$$0_n = Q(A)\pi_A(A) = \chi_A(A).$$

Preuve. Soit φ , l'endomorphisme canoniquement associé à A. Montrer que $\chi_\varphi(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ est équivalent à

$$\forall u \in E, \quad \chi_\varphi(\varphi)(u) = 0_E.$$

Soit $u \in E$, non nul. Comme E est de dimension finie, on peut considérer

$$p = \max \left\{ p \in \mathbb{N}^* \mid (u, \varphi(u), \dots, \varphi^{p-1}(u)) \text{ soit libre} \right\}.$$

Dans ce cas, $(u, \varphi(u), \dots, \varphi^{p-1}(u), \varphi^p(u))$ est liée. Par construction, $\varphi^p(u)$ s'écrit comme combinaison linéaire de $(u, \varphi(u), \dots, \varphi^{p-1}(u))$.

$$\exists a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{K}, \quad \varphi^p(u) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \varphi^i(u) \quad (*)$$

Notons que dans ce cas

$$C_u = \text{Vect} \left(u, \varphi(u), \dots, \varphi^{p-1}(u) \right)$$

est un sous-espace de E stable par φ avec une base donnée par

$$\mathcal{B}_u = \left(u, \varphi(u), \varphi^2(u), \dots, \varphi^{p-1}(u) \right).$$

Notons aussi que

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_u}(\varphi|_{C_u}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_0 \\ 1 & \cdots & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & a_{p-1} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}).$$

On a vu (exercice 4) que c'est un cas de matrice compagnon

$$X_n = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - a_{p-2}X^{p-2} \cdots - a_1X - a_0.$$

On constate alors que (*) donne $\chi_M(\varphi|_{C_u})(u) = 0_E$. De plus, C_u étant un espace stable on sait qu'en complétant \mathcal{B}_u en une base \mathcal{B} de E, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} M & B \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, on a à l'aide des résultats sur le déterminant de matrices triangulaires

$$\begin{aligned} \chi_\varphi &= \det(XI_n - \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)) \\ &= \det \begin{bmatrix} XI_p - \text{Mat}_{\mathcal{B}_u}(\varphi|_{C_u}) & -B \\ 0 & XI_{n-p} - C \end{bmatrix} \\ \chi_\varphi &= \det(XI_p - \text{Mat}_{\mathcal{B}_u}(\varphi|_{C_u})) \cdot \det(XI_{n-p} - C). \end{aligned}$$

Dit autrement, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\chi_\varphi = Q(X) \chi_{\varphi|_{C_u}} \quad (\text{car } M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_u}(\varphi|_{C_u})).$$

On peut maintenant conclure :

$$\begin{aligned} \chi_\varphi(\varphi)(u) &= Q(\varphi) \circ \chi_{\varphi|_{C_u}}(\varphi)(u) \\ &= Q(\varphi)(0_E) = 0_E \quad Q(\varphi) \text{ est linéaire.} \end{aligned}$$

Ce qui conclut. ■

Remarque. Une des conséquences directe est que le degré du polynôme minimal est toujours inférieur ou égal à $\dim(E)$.

3.3 Multiplicités d'une valeur propre

DÉFINITION

multiplicités d'une valeur propre

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ , une valeur propre de A .

- On appelle ordre de **multiplicité algébrique** de la valeur propre λ , l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique de A .
- On appelle ordre de **multiplicité géométrique** de la valeur propre λ , la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre λ .

Exemple. On pose $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

La matrice est triangulaire, on a directement $\chi_A(X) = (X-2)^2(X-3)$. La multiplicité algébrique de 2 est 2, celle de 3 est 1. Par contre, on montre que

$$E_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{K} \right\} \quad \text{et} \quad E_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{K} \right\}.$$

Ces espaces sont de dimension 1, les multiplicités géométriques sont donc, pour 2 et 3, égales à 1.

PROPOSITION

comparaison des multiplicités

Soit λ une valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'ordre de multiplicité algébrique $m(\lambda)$. Alors,

$$1 \leq \dim E_\lambda(A) \leq m(\lambda).$$

Preuve. Soient φ l'endomorphisme canoniquement associé à A et $\lambda \in \text{Sp}(A)$. On sait que $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(\varphi)$ et $E_\lambda(\varphi)$ est stable par φ . En reprenant l'exercice 6, $\chi_{\varphi|_{E_\lambda(\varphi)}}$ divise χ_φ . Or dans toute base de $E_\lambda(\varphi)$, la matrice représentative de la restriction est λI_d (avec $d = \dim E_\lambda(\varphi)$). Ce qui donne $\chi_{\varphi|_{E_\lambda(\varphi)}} = (X-\lambda)^d$. Comme $m(\lambda)$ est par définition la plus grande puissance p telle que $(X-\lambda)^p$ divise χ_φ , on obtient bien $d \leq m$. ■

Remarque. Si χ_A est scindé sur \mathbb{K} et n'admet que des racines simples, alors A est diagonalisable. Par contre, s'il existe $\lambda \in \text{Sp}(A)$ tel que

$$\dim E_\lambda(A) < m(\lambda)$$

alors A n'est pas diagonalisable puisque χ_A étant de degré n

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) < \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m(\lambda) \leq n.$$

4

Trigonalisation

DÉFINITION

trigonalisable

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **trigonalisable** (sur \mathbb{K}) si la matrice est semblable à une matrice triangulaire.

Exemples.

- La matrice R_θ n'est pas trigonalisable dans \mathbb{R} mais dans \mathbb{C} (elle y est diagonalisable).
- Une matrice non nulle nilpotente d'indice maximal est trigonalisable dans \mathbb{K} . Toutefois elle n'est pas diagonalisable.

Avant d'énoncer la proposition importante de cette partie, commençons par un lemme sous forme d'exercice :

Exercice 7



- ◆◆ Soit φ un endomorphisme de E de dimension n tel que $\chi_\varphi = X^n$.
- 1. Vérifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\varphi^p = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad \varphi^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)},$$

en déduire les inclusions strictes :

$$\text{Ker } \varphi \subset \text{Ker } \varphi^2 \subset \dots \subset \text{Ker } \varphi^{p-1} \subset \text{Ker } \varphi^p.$$

- 2. En utilisant une base de E « adaptée » aux inclusions précédentes, justifier que φ admet une matrice représentative strictement triangulaire.
- 3. Énoncer un résultat similaire si $\chi_\varphi = (X - \lambda)^n$.

CeR19

Remarque. On en déduit que la trace d'une matrice est aussi la somme des valeurs propres complexes de la matrice comptées avec multiplicité (algébrique).

PROPOSITION

CNS trigonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a l'équivalence entre les énoncés suivants :

- i) La matrice A est trigonalisable.
- ii) La matrice A admet un polynôme annulateur scindé.

Preuve. Raisonnons par double implication.

Supposons i). Si A est trigonalisable, alors A est semblable à une matrice T triangulaire

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & t_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Ainsi

$$\chi_A = \chi_T = \prod_{i=1}^n (X - t_{ii}) \quad (\text{scindé}).$$

Supposons ii).

...

Sachant que tout polynôme est scindé sur \mathbb{C} , on obtient directement :

COROLLAIRE

trigonalisable dans \mathbb{C}

Toute matrice à coefficients complexes est trigonalisable.

Exercice 8



- ◆ Si A est une matrice nilpotente, donner $\text{Tr}(A^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

CeR7

Remarque. On en déduit que la trace d'une matrice est aussi la somme des valeurs propres complexes de la matrice comptées avec multiplicité (algébrique).



Exercices



Exercice 9. ♦♦ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. On note P un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$. # CeR8
Établir l'existence d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = A$.

Exercice 10. ♦♦ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que AB est diagonalisable. Montrer que si A est inversible alors BA est diagonalisable. # CeR9

Exercice 11. ♦ **Preuve d'un lemme du théorème spectral** # CeR10
Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice symétrique. En utilisant le fait que toute matrice admet une valeur propre complexe, justifier que S admet une valeur propre réelle.

Exercice 12. ♦♦ Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et a, b , deux réels non nuls. On définit la matrice $M(a, b)$ par : # CeR11

$$M(a, b) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ a & \cdots & a & a & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

On note χ_n , le polynôme caractéristique de $M(a, b)$.

1. Préciser le rang de $M(a, b)$. En déduire le polynôme X^{n-1} divise χ_n .
2. a) Calculer χ_2 .
b) Vérifier que pour tout entier $n \geq 2$

$$\chi_{n+1}(X) = X\chi_n(X) - abX^n.$$

- c) En déduire une expression explicite de χ_n en fonction de n, a et b .
3. À quelle condition sur a, b , la matrice $M(a, b)$ est diagonalisable sur \mathbb{R} ?
4. Donner le polynôme minimal de $M(a, b)$.

Exercice 13. ♦♦ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, on pose # CeR12

$$C_a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & a_1 & \ddots & \vdots \\ a_3 & & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad J = C_{(1,0,\dots,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

1. a) Vérifier que $X^n - 1$ est le polynôme minimal de J .
b) Est-ce que J est diagonalisable dans \mathbb{C} ? Préciser le spectre dans \mathbb{C} de J ?
2. Soit $a \in \mathbb{C}^n$. Déterminer un polynôme Q tel que $C_a = Q(J)$.
3. En déduire que C_a est diagonalisable et préciser son déterminant.

Exercice 14. ♦♦ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose

d'après Oral Mines-Ponts PSI 2025 # CeR13

$$A_z = \begin{bmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Justifier que A_1 est diagonalisable.
2. Pour quelle valeur de $z \in \mathbb{C}$, la matrice A_z est diagonalisable?

Exercice 15. ♦♦ On considère une matrice diagonalisable $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. # CeR14

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p est encore diagonalisable.

2. On suppose qu'une des valeurs propres de A, notons-la λ , a un module strictement supérieur aux modules des autres. Prouver que $\text{Tr}(A^{p+1})/\text{Tr}(A^p)$ tend vers λ quand p tend vers $+\infty$.
3. a) Proposer un programme python qui prend en argument une matrice A et renvoie une approximation de sa plus grande valeur propre (en module).
b) Si A est inversible, comment obtenir la plus petite valeur propre en module?

Exercice 16. ♦♦ Trace et séries entières

d'après Centrale MP 2003. # CeR15

On pose

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Vérifier que A est diagonalisable et admet trois valeurs propres réelles dont on précisera les parties entières.
2. On pose $t_n = \text{Tr}(A^n)$. Exprimer t_n en fonction de $t_{n-1}, t_{n-2}, t_{n-3}$.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum t_n z^n$ et calculer sa somme.

Exercice 17. ♦♦ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec

CeR16

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \text{Tr}(A^k) = na^k.$$

1. Prouver que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $\text{Tr}(P(A)) = nP(a)$.
2. Prouver que $A - aI_n$ est nilpotente.

Exercice 18. ♦♦♦ Preuve de la CNS polynomiale sur la diagonalisabilité

CeR17

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et φ un endomorphisme de E. L'objectif de l'exercice est de prouver l'équivalence entre les énoncés :

- i) L'endomorphisme φ est diagonalisable sur \mathbb{K} .
- ii) L'endomorphisme φ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples sur \mathbb{K} .
- iii) Le polynôme minimal est scindé dans \mathbb{K} à racines simples.

1. Montrer que i) \Rightarrow ii).
2. Prouvons la réciproque. Supposons donc que φ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
a) Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Justifier que l'application suivante est bien posée, linéaire et injective

$$\Phi: \begin{cases} H & \rightarrow & \text{Ker } f \\ u & \mapsto & g(u) \end{cases} \quad \text{avec } H \text{ un supplémentaire de } \text{Ker } g \text{ dans } \text{Ker } f \circ g.$$

En déduire que $\dim \text{Ker}(f \circ g) \leq \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(g))$.

- b) Montrer plus généralement que pour $f_1, f_2, \dots, f_r \in \mathcal{L}(E)$,

$$\dim(\text{Ker}(f_1 \circ \dots \circ f_r)) \leq \sum_{j=1}^r \dim(\text{Ker}(f_j)).$$

- c) En déduire la réciproque ii) \Rightarrow i).
- d) Vérifier l'équivalence avec l'énoncé iii).

Exercice 19. ♦♦♦ Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

CeR18

$$M^2 + M^T = I_3 \quad \text{et} \quad \text{Tr}(M) = 0$$



Indications et solutions



Exercice 3

1. Notons $g = \varphi|_F$ la restriction de φ à F . Comme F est stable par φ , g est un endomorphisme de F . Soit P un polynôme à racines simples annulateur de φ diagonalisable. C'est-à-dire

$$P(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

ou encore

$$\forall u \in E, \quad P(\varphi)(u) = 0_E.$$

En particulier,

$$\forall u \in F, \quad P(g)(u) = P(\varphi)(u) = 0_E.$$

L'endomorphisme g admet le même polynôme annulateur scindé à racines simples. Il est donc diagonalisable.

2. Voir la généralisation sur le cahier de prépa.

Exercice 4

On a

$$XI_n - C = \begin{bmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & X & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Développons le déterminant suivant la première ligne :

$$\det(XI_n - C) = X \cdot D_{n-1} + (-1)^{1+n} a_0 \cdot \Delta,$$

où :

- D_{n-1} est le déterminant de la sous-matrice obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne;
- Δ est le déterminant de la matrice triangulaire inférieure avec des -1 sur la sous-diagonale.

On remarque que :

$$\Delta = (-1)^{n-1}.$$

De plus, D_{n-1} a exactement la même structure que $\det(XI_{n-1} - C_{n-1})$, où C_{n-1} est la matrice compagnon associée à a_1, \dots, a_{n-1} . Ainsi, on obtient la relation de récurrence :

$$\chi_n(X) = X\chi_{n-1}(X) + a_0.$$

En poursuivant ce raisonnement par récurrence, on obtient :

$$\chi_C(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0.$$

Exercice 5

1. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, symétrique. On a

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det(XI_2 - A) = \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -b & X-c \end{vmatrix} \\ &= (X-a)(X-c) - (-b)^2 \\ \chi_A &= X^2 - (a+c)X + a^2c - b^2. \end{aligned}$$

Le discriminant est alors

$$\begin{aligned} \Delta &= (a+c)^2 - 4(ac - b^2) \\ &= a^2 + c^2 - 2ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0. \end{aligned}$$

- Si $b = 0$, A est diagonale donc diagonalisable.
- Si $b \neq 0$, $\Delta > 0$ et χ_A a deux racines réelles distinctes. La matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ a donc deux valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.

2. Faux. Prendre par exemple :

$$A = 0_2 \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 6

Soit G un supplémentaire de F dans E . Ainsi,

$$E = F \oplus G.$$

Si l'on considère une base \mathcal{B} adaptée à cette décomposition, la matrice de φ dans cette base s'écrit sous forme de blocs :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} A & \star \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad \text{où } A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi|_F).$$

On a alors

$$\chi_{\varphi}(X) = \det(XI_n - \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)).$$

D'où

$$\chi_{\varphi}(X) = \det \begin{bmatrix} XI_p - A & * \\ 0 & XI_{n-p} - B \end{bmatrix}.$$

Comme il s'agit d'une matrice triangulaire par blocs, on obtient :

$$\chi_{\varphi}(X) = \det(XI_p - A) \det(XI_{n-p} - B).$$

Ainsi,

$$\chi_{\varphi}(X) = \chi_{\varphi|_F}(X) \det(XI_{n-p} - B).$$

En utilisant les résultats sur les déterminants des matrices triangulaires par blocs, le résultat s'en déduit.

Exercice 14



Solution
Youtube

Exercice 18

1. Supposons que φ soit diagonalisable. Notons

$$\text{Sp}(\varphi) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\} \quad \text{avec} \quad r = \text{Card Sp}(\varphi).$$

Posons $P(x) = \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)$ et justifions que

$$P(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

C'est-à-dire $\forall u \in E, \quad P(\varphi)(u) = 0_E.$

Soit e , un vecteur propre associé à la valeur propre λ_{i_0} , on a donc $\varphi(e) = \lambda_{i_0} e$, ou encore

$$(\varphi - \lambda_{i_0} \text{id}_E)(e) = 0_E.$$

Comme

$$P(\varphi) = \overbrace{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^r (\varphi - \lambda_i \text{id}_E)}^{:=g} \circ (\varphi - \lambda_{i_0} \text{id}_E)$$

on obtient

$$P(\varphi)(e) = g \circ (\varphi - \lambda_{i_0} \text{id}_E)(e) = g(0_E) = 0_E$$

car g est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

Attention, noter bien la composition \circ . On évitera les expressions qui n'ont pas de sens du type

$$P(\varphi) = \prod_{i=1}^r (\varphi - \lambda_i \text{id}_E) \quad \times \times \times$$

Or φ est diagonalisable, il existe une base de vecteurs propres. Donc il existe une base (e_1, e_2, \dots, e_n) telle que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad P(\varphi)(e_i) = 0_E.$$

Justifions que cette égalité s'étend alors à tout vecteur de E par linéarité. Pour $u \in E$, il existe une famille de réels $(\mu_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ telle que

$$u = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$$

$$\text{et} \quad P(\varphi)(u) = \sum_{i=1}^n \mu_i P(\varphi)(e_i) = \sum_{i=1}^n \mu_i 0_E = 0_E.$$

D'où $P(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$

Le polynôme P est scindé à racines simples et annulateur de l'endomorphisme φ diagonalisable.

2.a) On sait que $\text{Ker } g \subset \text{Ker } f \circ g$, on peut donc considérer H , un supplémentaire de $\text{Ker } g$ dans $\text{Ker } f \circ g$. C'est-à-dire

$$H \oplus \text{Ker } g = \text{Ker } f \circ g.$$

Étudions l'application Φ définie dans l'énoncé.

• Φ est bien posé.

Comme $\mu \in H \subset \text{Ker}(f \circ g)$, on a $f \circ g(u) = f(g(u)) = 0_E$ et $g(u) \in \text{Ker } f$.

• Φ est linéaire.

H et $\text{Ker } f$ sont des espaces vectoriels et g est linéaire, la restriction aussi.

• Φ est injective.

Soit $u \in \text{Ker } \Phi$. C'est-à-dire $g(u) = 0_E$ et $u \in \text{Ker } g$. Or par construction, on a

$$u \in H \quad \text{et} \quad H \cap \text{Ker}(g) = \{0_E\}.$$

Donc $u = 0_E$ et Φ est injective.

• Par injectivité, on a

$$\dim H \leq \dim \text{Ker } f.$$

Or, on a aussi par les propriétés de dimension des supplémentaires

$$\dim(H) + \dim \text{Ker } g = \dim \text{Ker } f \circ g.$$

Ainsi

$$\dim \text{Ker } f \circ g - \dim \text{Ker } g \leq \dim \text{Ker } f.$$

Le résultat s'en déduit.

2.b) Il suffit de procéder par récurrence à partir de la question précédente.

2.c) Supposons que $P(x) = \prod_{i=1}^r (x - a_i)$ soit annulateur de φ . Notons

$$f_i = \varphi - a_i \text{id}_E$$

de sorte que

$$f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_r = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

C'est-à-dire

$$\text{Ker}(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_r) = E.$$

La relation précédente donne donc

$$\sum_{i=1}^r \dim \text{Ker } f_i \geq \dim E.$$

Puis $\sum_{i=1}^r \dim E_{a_i}(\varphi) \geq \dim E.$

Or, on sait d'après le cours que les sous-espaces propres sont en somme directe et

$$\sum_{i=1}^r \dim E_{a_i}(\varphi) \leq \dim E.$$

On a donc égalité des dimensions et φ est diagonalisable.

2.d) Le dernier point est direct puisque le polynôme minimal divise tout polynôme annulateur.

Exercice 19

Soit M convenant. Par hypothèse, on a $M^T = I - M^2$, d'où :

$$M = (I - M^2)^T = I - (M^T)^2 = I - (I - M^2)^2 = 2M^2 - M^4.$$

Le polynôme $P = X^4 - 2X^2 + X \in \mathbb{R}[X]$ est donc annulateur de M . Factorisons P :

$$\begin{aligned} P &= X(X^3 - 2X + 1) \\ &= X(X-1)(X^2 + X - 1) \\ &= X(X-1)(X-\alpha)(X-\beta), \\ \alpha &= \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Puisque P est scindé simple dans $\mathbb{R}[X]$, M est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ et $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \{0, 1, \alpha, \beta\}$. Il existe donc $Q \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathbf{D}_3(\mathbb{R})$ (dont les éléments diagonaux sont parmi $0, 1, \alpha, \beta$) telles que $M = QDQ^{-1}$. On a :

$$\begin{aligned} M^2 = I - M^T &\iff QD^2Q^{-1} = I - {}^tQ^{-1}DQ^T \\ &\iff QD^2Q^{-1} = {}^tQ^{-1}(I-D)Q^T \\ &\iff (Q^TQ)D^2(Q^TQ)^{-1} = I-D. \end{aligned}$$

Ceci montre que D^2 et $I - D$ sont semblables. Il en résulte que, si 0 est valeur propre de M , alors 1 l'est aussi et réciproquement, et que ni 0 ni 1 ne peuvent être valeur propre au moins double de M . En effet, si 0 est valeur propre au moins double de M , alors, comme $I - D \sim D^2$, 1 serait aussi valeur propre au moins double de M , contradiction avec $M \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ (la somme des ordres de multiplicité serait alors ≥ 4). On en déduit que les seules possibilités de diagonale pour D sont les suivantes (à l'ordre près des trois éléments de la diagonale) :

$$(0, 1, \alpha), (0, 1, \beta), (\alpha, \alpha, \alpha), (\alpha, \alpha, \beta), (\alpha, \beta, \beta), (\beta, \beta, \beta)$$

Comme par hypothèse $\text{tr}(M) = \text{tr}(D) = 0$, on aboutit, dans chaque cas, à une contradiction. Finalement, il n'existe aucune matrice convenant.