

Nom :

Mathématiques

Cours

double-diplôme
ESCP x CentraleSupélec

Livret VI

Chapitre

6. Compléments sur la réduction des matrices et endomorphismes

2026

La rigueur n'a jamais eu pour objet que de sanctionner et légitimer les conquêtes de l'intuition.

Jacques Hadamard Mathématicien français (1865-1963).

1 Théorème de Gauss, factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

On dit qu'un polynôme P est **scindé** dans \mathbb{K} si on peut l'écrire sous la forme

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r, \quad (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}^{*r}.$$

On dit qu'il est **scindé à racines simples** dans \mathbb{K} si on peut l'écrire sous la forme

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \forall i \neq j, \quad \alpha_i \neq \alpha_j.$$

Autrement dit, un polynôme est scindé si le nombre de racines (comptées avec multiplicité) est égal au degré. Le polynôme est scindé à racines simples si le nombre de racines (sans multiplicité) est égal exactement au degré.

Théorème 1 (de D'Alembert-Gauss)

Toute équation polynomiale complexe de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admet au moins une solution.

Dit autrement, pour tout polynôme P non constant, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ et un polynôme Q tels que $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$. En itérant ce processus, on obtient :

Corollaire 2 (du théorème de D'Alembert-Gauss)

Tout polynôme complexe, non constant, est scindé sur \mathbb{C} .

Exemples. • Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

$$(X - \exp(i\theta))(X - \exp(-i\theta)) = X^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})X + e^{i\theta}e^{-i\theta} = X^2 + 2\cos(\theta)X + 1.$$

Le polynôme $X^2 + 2\cos(\theta)X + 1$ est scindé sur \mathbb{C} mais n'est scindé sur \mathbb{R} que pour $e^{i\theta} \in \mathbb{R}$. C'est-à-dire, $\theta = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n})$, ce dernier est scindé à racines simples. Les racines sont les racines n -ième de l'unité.

2.1 Polynômes annulateurs

(rappels)

Soient $P(X) = \sum_{i=0}^p a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

→ Le polynôme de matrice $P(A)$ est défini par : $P(A) = \sum_{i=0}^p a_i A^i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Un polynôme P est annulateur de A si $P(A) = 0_n$.

→ Le polynôme d'endomorphisme $P(\varphi)$ est défini par : $P(\varphi) = \sum_{i=0}^p a_i \varphi^i \in \mathcal{L}(E)$.

Un polynôme P est annulateur de φ si $P(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Rappelons aussi deux faits importants : pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et $u \in E$.

→ Si $\varphi(u) = \lambda u$, alors $P(\varphi)(u) = P(\lambda)u$;

→ Si P est un polynôme annulateur de φ , toute valeur propre de φ est racine de P .

2.2 Polynôme minimal

Définition 3 (Polynôme minimal)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe un unique polynôme unitaire qui divise tous les polynômes annulateurs de A . Ce polynôme est appelé polynôme minimal de A , noté π_A .

Exercice 1

→ On considère la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

À l'aide du code Python suivant, donner le polynôme minimal pour M . Justifier.

Editeur

```
M = np.array([[7, 10, 0],
              [-3, -4, 0],
              [0, 0, 2]])
print(np.dot(M, M) - 3 * M)
```

Console

```
[[ -2  0  0]
 [  0 -2  0]
 [  0  0 -2]]
```

CeR1

Remarques.

→ Deux matrices semblables ont même polynôme minimal.

→ Le polynôme minimal ne dépend pas du corps. Dit autrement, le polynôme minimal d'une matrice A à coefficients réels est le même que celui de A vue comme une matrice à coefficients complexes.

Exercice 2

→ Soit φ , un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n . On pose

$$\mathbb{K}[\varphi] = \{P(\varphi) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Justifier que si d désigne le degré du polynôme minimal de φ , alors la famille $(\varphi^k)_{k \in \llbracket 0; d-1 \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{K}[\varphi]$.

CeR2

2.3 Lien avec la réduction

Proposition 4 (Spectre et polynôme minimal)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Le nombre λ est valeur propre de A si et seulement si λ est racine de π_A .

Comme tout polynôme non constant admet au moins une racine complexe, on en déduit que toute matrice admet au moins une valeur propre complexe.

Théorème 5 (CNS polynomiale pour la diagonalisabilité)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a l'équivalence entre les énoncés suivants :

- i) La matrice est diagonalisable dans \mathbb{K} .
- ii) Il existe un polynôme annulateur scindé dans \mathbb{K} à racines simples.
- iii) Le polynôme minimal est scindé dans \mathbb{K} à racines simples.

Pour une preuve, on pourra regarder l'exercice 17.

Remarque. On peut faire un théorème équivalent pour tout endomorphisme défini sur un espace vectoriel de dimension finie.

Exemple. Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables puisqu'ils admettent un polynôme annulateur scindé qui sont respectivement

$$X^2 - X = X(X - 1) \quad \text{et} \quad X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1).$$

Exercice 3



Les questions sont indépendantes

1. Soit F , un sous-espace stable par $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. Justifier que si φ est diagonalisable alors la restriction de φ à F , noté $\varphi|_F$, est aussi diagonalisable.
2. Vrai ou faux?
Pour toute matrice A inversible, A^2 est diagonalisable si et seulement si A l'est.

CeR3

3 Le polynôme caractéristique

3.1 Définition et exemples

Définition 6 (polynôme caractéristique d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique** de A , noté χ_A , le polynôme

$$\chi_A = \det(XI_n - A).$$

Exemple. Vérifier que le polynôme caractéristique de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{est} \quad \chi_A = (X - 1)(X^2 - 2X + 2) = (X - 1)(X - 1 + i)(X - 1 - i).$$

Exercice 4



◆◆ Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. Donner le polynôme caractéristique de la matrice

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & -a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

CeR4

Remarques.

Dans ce cas, on a directement :

Le nombre λ est valeur propre de A si et seulement si λ est racine de χ_A .

→ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme $\chi_A = \det(XI_n - A)$ est de degré n et unitaire. De plus, on montre en utilisant la formule explicite du déterminant que

$$\chi_A = X^n - \text{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$

→ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$.

Exercice 5



◆

Les questions sont indépendantes

1. En utilisant le polynôme caractéristique, montrer que toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans \mathbb{R} .
2. Si $\chi_A = \chi_B$, a-t-on A semblable à B ?

CeR5

Définition 7 (polynôme caractéristique)

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, où E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

On appelle **polynôme caractéristique** de φ , noté χ_φ , le polynôme caractéristique de toute matrice représentative de φ .

Remarques.

- Précisons que c'est l'invariance par similitude du polynôme caractéristique et la formule de changement de base qui prouve que le polynôme caractéristique d'un endomorphisme ne dépend pas du choix de la base.
- Les résultats sur les matrices s'étendent aux endomorphismes. Par exemple, le nombre λ est valeur propre de φ si et seulement si λ est racine de χ_φ .

Exercice 6



◆◆ Soient φ , un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie et F un sous-espace vectoriel stable par φ . Justifier que $\chi_\varphi|_F$ divise χ_φ .

CeR6

3.2 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 8 (Cayley-Hamilton)

Le polynôme caractéristique de toute matrice est un polynôme annulateur. Autrement dit,

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \chi_A(A) = 0_n.$$

Remarque. Une des conséquences directe est que le degré du polynôme minimal est toujours inférieur ou égal à $\dim(E)$.

3.3 Multiplicités d'une valeur propre

Définition 9 (multiplicités d'une valeur propre)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ , une valeur propre de A .

- On appelle ordre de **multiplicité algébrique** de la valeur propre λ , l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique de A .
- On appelle ordre de **multiplicité géométrique** de la valeur propre λ , la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre λ .

Exemple. On pose $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

La matrice est triangulaire, on a directement $\chi_A(X) = (X-2)^2(X-3)$. La multiplicité algébrique de 2 est 2, celle de 3 est 1. Par contre, on montre que les sous-espaces propres sont de dimension 1. Les multiplicités géométriques sont donc, pour 2 et 3, égales à 1.

Proposition 10 (comparaison des multiplicités)

Soit λ une valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'ordre de multiplicité algébrique $m(\lambda)$. Alors,

$$1 \leq \dim E_\lambda(A) \leq m(\lambda).$$

Remarque. Si χ_A est scindé et n'admet que des racines simples, alors A est diagonalisable.

4 Trigonalisation

Définition 11 (trigonalisable)

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **trigonalisable** (sur \mathbb{K}) si la matrice est semblable à une matrice triangulaire.

Exemples.

- La matrice R_θ n'est pas trigonalisable dans \mathbb{R} mais dans \mathbb{C} (elle y est diagonalisable).
- Une matrice non nulle nilpotente d'indice maximal est trigonalisable dans \mathbb{K} . Toutefois elle n'est pas diagonalisable.

Proposition 12 (CNS trigonalisable)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a l'équivalence entre les énoncés suivants :

- i) La matrice A est trigonalisable.
- ii) La matrice A admet un polynôme annulateur scindé.

Proposition 13 (trigonalisable dans \mathbb{C})

Toute matrice à coefficients complexes est trigonalisable.

Exercice 7



✧ Si A est une matrice nilpotente, donner $\text{Tr}(A^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

CeR7

Remarque. On en déduit que la trace d'une matrice est aussi la somme des valeurs propres complexes de la matrice comptées avec multiplicité (algébrique).



Exercices



Exercice 8. ♦♦ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. On note P un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$. # CeR8
Établir l'existence d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = A$.

Exercice 9. ♦♦ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que AB est diagonalisable. Montrer que si A est inversible alors BA est diagonalisable. # CeR9

Exercice 10. ♦ **Preuve d'un lemme du théorème spectral** # CeR10
Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice symétrique. En utilisant le fait que toute matrice admet une valeur propre complexe, justifier que S admet une valeur propre réelle.

Exercice 11. ♦♦ Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et a, b , deux réels non nuls. On définit la matrice $M(a, b)$ par : # CeR11

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ a & \cdots & a & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

On note χ_n , le polynôme caractéristique de $M(a, b)$.

1. Préciser le rang de $M(a, b)$. En déduire le polynôme X^{n-1} divise χ_n .
2. a) Calculer χ_2 .
b) Vérifier que pour tout entier $n \geq 2$

$$\chi_{n+1}(X) = X\chi_n(X) - abX^n.$$

- c) En déduire une expression explicite de χ_n en fonction de n, a et b .
3. À quelle condition sur a, b , la matrice $M(a, b)$ est diagonalisable sur \mathbb{R} ?
4. Donner le polynôme minimal de $M(a, b)$.

Exercice 12. ♦♦ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, on pose # CeR12

$$C_a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & a_1 & \ddots & \vdots \\ a_3 & & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = C_{(1,0,\dots,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. a) Vérifier que $X^n - 1$ est le polynôme minimal de J .
b) Est-ce que J est diagonalisable dans \mathbb{C} ? Préciser le spectre dans \mathbb{C} de J ?
2. Soit $a \in \mathbb{C}^n$. Déterminer un polynôme Q tel que $C_a = Q(J)$.
3. En déduire que C_a est diagonalisable et préciser son déterminant.

Exercice 13. ♦♦ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose *d'après Oral Mines-Ponts PSI 2025* # CeR13

$$A_z = \begin{pmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que A_1 est diagonalisable.
2. Pour quelle valeur de $z \in \mathbb{C}$, la matrice A_z est diagonalisable?

Exercice 14. ♦♦ On considère une matrice diagonalisable $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. # CeR14

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p est encore diagonalisable.
2. On suppose qu'une des valeurs propres de A , notons-la λ , a un module strictement supérieur aux modules des autres. Prouver que $\text{Tr}(A^{p+1})/\text{Tr}(A^p)$ tend vers λ quand p tend vers $+\infty$.
3. a) Proposer un programme python qui prend en argument une matrice A et renvoie une approximation de sa plus grande valeur propre (en module).
b) Si A est inversible, comment obtenir la plus petite valeur propre en module?

Exercice 15. ♦♦ Trace et séries entières*d'après Centrale MP 2003. # CeR15*

On pose

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Vérifier que A est diagonalisable et admet trois valeurs propres réelles dont on précisera les parties entières.
2. On pose $t_n = \text{Tr}(A^n)$. Exprimer t_n en fonction de $t_{n-1}, t_{n-2}, t_{n-3}$.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum t_n z^n$ et calculer sa somme.

Exercice 16. ♦♦ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec

CeR16

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \text{Tr}(A^k) = na^k.$$

1. Prouver que pour tout $P \in \mathbb{C}[X], \text{Tr}(P(A)) = nP(a)$.
2. Prouver que $A - aI_n$ est nilpotente.

Exercice 17. ♦♦♦ Preuve de la CNS polynomiale sur la diagonalisabilité

CeR17

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et φ un endomorphisme de E. L'objectif de l'exercice est de prouver l'équivalence entre les énoncés :

- i) L'endomorphisme φ est diagonalisable sur \mathbb{K} .
- ii) L'endomorphisme φ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples sur \mathbb{K} .
- iii) Le polynôme minimal est scindé dans \mathbb{K} à racines simples.

1. Montrer que i) \Rightarrow ii).
2. Prouvons la réciproque. Supposons donc que φ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
 - a) Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Justifier que l'application suivante est bien posée, linéaire et injective

$$\Phi : \begin{cases} H & \rightarrow & \text{Ker } f \\ u & \rightarrow & g(u) \end{cases} \quad \text{avec } H \text{ un supplémentaire de } \text{Ker } g \text{ dans } \text{Ker } f \circ g.$$

En déduire que $\dim \text{Ker}(f \circ g) \leq \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(g))$.

- b) Montrer plus généralement que pour $f_1, f_2, \dots, f_r \in \mathcal{L}(E)$,

$$\dim(\text{Ker}(f_1 \circ \dots \circ f_r)) \leq \sum_{j=1}^r \dim(\text{Ker}(f_j)).$$

- c) En déduire la réciproque ii) \Rightarrow i).
- d) Vérifier l'équivalence avec l'énoncé iii).

Exercice 18. ♦♦♦ Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^2 + M^T = I_3 \quad \text{et} \quad \text{Tr}(M) = 0$$