Généralisation.

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ inversible telle que A^p ($p \in \mathbb{N}^*$) soit diagonalisable.
Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

On commence par des rappels sur les nombres complexes. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, il existe $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ tel que $\alpha^p = \lambda$. Pour s'en convaincre, on peut écrire $\lambda = r\exp(i\theta)$ sous forme exponentielle et $\alpha = \sqrt[p]{r}\exp(i\theta/p)$ convient. (precisons que $r \in \mathbb{R}^+$, le module)
Ensuite pour tout $k \in [\![0;p-1]\!]$, en posant $\omega = \exp(2i\pi/p)$.

$$(\alpha\omega^k)^p = \alpha^p(\omega^p)^k = \alpha^p = \lambda$$

On en déduit la factorisation de $X^p - \alpha$ via :

$$\prod_{k=0}^{p-1}(X - \alpha\omega^k) = X^p - a.$$

(on a bien égalité car les racines sont bien 2 à 2 distinctes et on les a toutes puisque $X^p - \alpha$ est de degré p).

Revenons à l'exercice.
Comme A^p est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples :

$$P = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i) \quad \text{avec} \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{pour } i \neq j.$$

Comme A est inversible, on peut supposer $\lambda_i \neq 0$ pour tout indice i.
Notons que

$$0 = P(A^p) = \prod_{i=1}^{r}(A^p - \lambda_i)$$

Ainsi $P(X^p)$ est annulateur de A et d'après le rappel préliminaire.

$$P(X^p) = \prod_{i=1}^{r}(X^p - \lambda_i) = \prod_{i=1}^{r}\prod_{k=0}^{p-1}(X - \alpha_i\omega^k) \quad \text{où } \alpha_i^p = \lambda_i$$

precisons que toutes les racines sont 2 à 2 distinctes ($\alpha_i \neq 0$), on a un polynôme scindé à racines simple annulateur de A qui est alors diagonalisable