CHAPITRE 7

Équations différentielles II

Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est uniquement parce qu'ils ne réalisent pas à quel point la vie est compliquée.

John von Neumann (1903-1957) .

1 Normes et régularité des fonctions à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

1.1 Un détour par les normes

Commençons par une définition générale où E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Une application $\|\cdot\| : \mathrm{E} \to \mathbb{R}_+$ est une **norme** si elle vérifie :

- Pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$;
- Pour tout $x \in \mathrm{E}$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$; (homogénéité)
- Pour tous $x, y \in \mathrm{E}$, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

On dit alors que $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

Remarque. On a vu en ECG que si $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur un espace E, alors l'application $x \in \mathrm{E} \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une norme. Toutefois, toute norme ne découle pas nécessairement d'un produit scalaire.

Une fois fixé une norme, on peut définir la notion de distance entre deux éléments de E par

$$\forall\, x,\ y \in \mathrm{E}, \qquad d(x, y) = \left\|x - y\right\|.$$

Et une fois la notion de distance fixée, on peut définir la notion de convergence d'une suite d'éléments de E : une suite (u_n) de $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ est dite convergente vers $\ell \in \mathrm{E}$ si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant \mathrm{N}, \qquad \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

On peut aussi donner une définition de la continuité d'une fonction $f : t \in \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ par : la fonction f est continue en $a \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_*^+, \qquad |x - a| < \eta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Ensuite, la fonction f est continue sur I si elle est continue en tout point $a \in \mathrm{I}$.

A priori, ces définitions de limites, continuité ... dépendent du choix de la norme $\|\cdot\|$ sur E. Mais si E est de dimension finie, cela n'est pas le cas car on dispose du théorème d'équivalence des normes [1] qui affirme que si $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ désignent deux normes sur E alors, il existe

1. admis dans la suite.

1.2 Retour sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Exemples de normes.
Dans la suite, $[\mathrm{A}]_{ij}$ désigne le coefficient en position (i,j) de A.

- Vérifier que l'application suivante est une norme sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

$$\mathrm{A}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\longmapsto\|\mathrm{A}\|_\infty=\max_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}\left|a_{ij}\right|.$$

- On a vu que l'application $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2\longmapsto\mathrm{Tr}\left(\mathrm{AB}^\top\right)$ est un produit scalaire. On en déduit une seconde norme :

$$\mathrm{A}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\longmapsto\|\mathrm{A}\|_2=\sqrt{\mathrm{Tr}\left(\mathrm{AA}^\top\right)}=\left(\sum_{i,j}[\mathrm{A}]_{ij}{}^2\right)^{1/2}.$$

- Pour $n=p$. Considérons une norme $\|\cdot\|$ sur. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On définit alors une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (dite subordonnée) par

$$|||\mathrm{A}|||=\sup_{\substack{\mathrm{X}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\\ \|\mathrm{X}\|=1}}\|\mathrm{A}+\mathrm{X}\|.$$

  Notons que la borne supérieure est bien définie (c'est même un maximum : $\mathrm{X}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\longmapsto\|\mathrm{AX}\|$ est continue sur le fermé borné $\mathscr{B}=\left\{\mathrm{Y}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \|\mathrm{Y}\|=1\right\}$). Un des avantages d'une telle norme est qu'elle est multiplicative

$$\forall\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\quad |||\mathrm{AB}|||\leqslant|||\mathrm{A}|||\cdot|||\mathrm{B}|||.$$

Exercice 1

✧ Soient $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Justifier que

$$\|\mathrm{AB}\|_\infty\leqslant p\|\mathrm{A}\|_\infty\cdot\|\mathrm{B}\|_\infty\quad\text{et}\quad|||\mathrm{AB}|||\leqslant|||\mathrm{A}|||\cdot|||\mathrm{B}|||.$$

ceEqD11

Continuité
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:\mathrm{I}\to\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. En considérant la norme $\|\cdot\|_\infty$, on établit l'équivalence entre les deux énoncés suivants :

i) La fonction f est continue sur I.

ii) Pour tout $(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]$, l'application coefficient $t\in\mathrm{I}\longmapsto\left[f(t)\right]_{i,j}\in\mathbb{K}$ est continue.

D'après la remarque préliminaire, **ii)** est équivalent à la continuité de f pour toute norme sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Dérivabilité, caractère $\mathscr{C}^p(\mathrm{I})$
On généralise, la fonction $f:\mathrm{I}\to\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dérivable sur I (resp. de classe $\mathscr{C}^p$ sur I) si pour tout $(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]$, l'application coefficient $t\in\mathrm{I}\longmapsto\left[f(t)\right]_{i,j}\in\mathbb{K}$ est dérivable sur I (resp. de classe $\mathscr{C}^p$ sur I).

2 L'exponentielle matricielle

2.1 Définition et exemples

Proposition — exponentielle d'une matrice

Soit $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. La suite de matrices de terme général $\sum_{k=0}^{n}\mathrm{A}^k/k!$ est convergente. On pose alors

$$\exp(\mathrm{A})=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{A}^k}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{A}^k}{k!}.$$

Preuve. Pour justifier que exp(A) est bien posé, il faut justifier pour tout $(i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, la convergence de $\left(\sum_{k=0}^{n} \left[A^k\right]_{ij} / k!\right)_n$. Pour cela, il suffit de prouver la convergence absolue de la série

$$\sum \frac{\left[A^k\right]_{ij}}{k!}$$

Or pour $k \in \mathbb{N}$, et en reprenant la première inégalité de l'exercice 1, on a

$$\left\|A^{k+1}\right\|_\infty = \left\|A^k \cdot A\right\|_\infty \leqslant q \left\|A^k\right\|.$$

où on a posé $q = p\|A\|_\infty$. Par récurrence, on a

$$\left\|A^k\right\|_\infty \leqslant q^k \quad \text{puis} \quad \frac{\left|\left[A^k\right]_{ij}\right|}{k!} \leqslant \frac{q^k}{k!}.$$

Or la série exponentielle $\sum q^k / k!$ de paramètre réel q est convergente. On en déduit la convergence de la série $\sum \frac{[A^k]_{ij}}{k!}$. Ceci étant valable pour tout couple $(i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, exp(A) est bien posé. ■

Donnons quelques propriétés :

- Le cas diagonal.

$$\text{Si} \quad A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}, \quad \text{alors} \quad \exp(A) = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\alpha_2} & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\alpha_n} \end{bmatrix}.$$

- Si P est une matrice inversible, alors $\exp\left(PAP^{-1}\right) = P\exp(A)P^{-1}$.
- Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *commutent* alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.
- On en déduit que exp(A) est inversible et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.
- Pour toute norme multiplicative sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, on a $\|\exp(A)\| \leqslant \exp(\|A\|)$.

⚠ **Attention.** Si A et B ne commutent pas, alors, en général, $\exp(A+B) \neq \exp(A) \cdot \exp(B)$.

Exercice 2

✧ Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Justifier que exp(A) est une matrice orthogonale.

ceEqD1

Exercice 3

✦✦ **Exemples de calculs d'une exponentielle** *Questions indépendantes*

1. **a)** On pose $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\exp(\theta J)$.

b) Est-ce que l'application $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \exp(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est injective ? surjective ?

2. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. On pose

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer exp(A).

ceEqD2

2.2 Régularité

Proposition **Dérivabilité de** $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tA)$

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. *La fonction* $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tA) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et la dérivée est définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\varphi'(t) = A\exp(tA).$$

Preuve.

Attention. Si $t \in \mathrm{I} \mapsto \mathrm{A}(t)$ est dérivable, on a bien la dérivabilité de $t \in \mathrm{I} \mapsto \exp\left(\mathrm{A}(t)\right)$ mais on ne peut affirmer que la dérivée est donnée par $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{A}'(t)\exp\left(\mathrm{A}(t)\right)$ car A' ne commute pas forcément avec A.

3 Système différentiel linéaire

3.1 Définition et exemple

DÉFINITION — Système différentiel linéaire

*On appelle **système différentiel linéaire** toute équation différentielle de la forme :*

$$\forall t \in \mathrm{I}, \qquad \mathrm{X}'(t) = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}(t) + \mathrm{B}(t) \qquad (\mathscr{E})$$

où
- *$t \mapsto \mathrm{A}(t)$ est une application continue de l'intervalle I dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$;*
- *$t \mapsto \mathrm{B}(t)$ est une application continue de l'intervalle I dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;*
- *et l'inconnue est $\mathrm{X} : t \mapsto \mathrm{X}(t)$, une fonction dérivable de I dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.*

Exemple. Le système d'équations différentielles :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3y(t) - z(t) + \mathrm{e}^t \\ y'(t) = x(t) + y(t) + 2z(t) + 1 \\ z'(t) = x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

se ramène à système différentiel linéaire en posant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathrm{A}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Noter ici que A est constante. On parle de système linéaire à coefficients constants.

Remarque. À l'instar des équations différentielles du premier et second ordre, l'ensemble des solutions est un espace affine. Dans un premier temps, on détermine l'ensemble des solutions du système homogène

$$\forall t \in \mathrm{I}, \qquad \mathrm{X}'(t) = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}(t) \qquad (\mathscr{E}_{\mathrm{H}})$$

Cet ensemble est un espace vectoriel, on le note $\mathscr{S}_{\mathscr{E},\mathrm{H}}$. Ensuite, on détermine une solution particulière X_0 de $(\mathscr{E})$. On conclut en précisant que l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$ est

$$\mathscr{S}_{\mathscr{E}} = \left\{ t \in \mathrm{I} \mapsto \mathrm{X}_0(t) + \mathrm{X}_{\mathrm{H}}(t) \,|\, \mathrm{X}_{\mathrm{H}} \in \mathscr{S}_{\mathscr{E},\mathrm{H}} \right\}.$$

3.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

THÉORÈME — de Cauchy-Lipschitz linéaire

Soient I un intervalle, $\mathrm{A} \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$, $\mathrm{B} \in \mathscr{C}^0\left(\mathrm{I}, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\right)$, $t_0 \in \mathrm{I}$ et $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B} \\ \mathrm{X}(t_0) = \mathrm{X}_0 \end{cases}$$

admet une unique solution qui est définie sur tout l'intervalle I.

3.3 Cas des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Le théorème

THÉORÈME — **Résolution complète du cas constant**

On considère le système différentiel

$$\forall t \in \mathrm{I}, \qquad \mathrm{X}'(t) = \mathrm{AX}(t) + \mathrm{B}(t) \qquad (\mathscr{E})$$

où $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *est constante, fixée,* $t \mapsto \mathrm{B}(t) \in \mathscr{C}^0\left(\mathrm{I}, \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})\right)$. *Alors, on a les énoncés :*

i) *les solutions de l'équation homogène* $(\mathscr{E}_\mathrm{H})$ *sont définies sur I par*

$$\forall t \in \mathrm{I}, \qquad \mathrm{X}(t) = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{V}_0 \quad , \textit{avec } \mathrm{V}_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K});$$

ii) *Pour* $t_0 \in \mathrm{I}$, *les solutions de* (E) *sont définies sur* I *par :*

$$\forall t \in \mathrm{I}, \qquad \mathrm{X}(t) = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{V}_0 + \mathrm{e}^{t\mathrm{A}} \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-s\mathrm{A}}\mathrm{B}(s)\,\mathrm{d}s.$$

iii) *Pour tout* $(t_0, \mathrm{X}_0) \in \mathrm{I} \times \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, *le problème de Cauchy :* $\begin{cases} \mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B} \\ \mathrm{X}(t_0) = \mathrm{X}_0 \end{cases}$

admet une unique solution donnée par :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{X}(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)\mathrm{A}}\mathrm{X}_0 + \mathrm{e}^{t\mathrm{A}} \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-s\mathrm{A}}\mathrm{B}(s)\,\mathrm{d}s$$

Preuve. **Énoncé i)**.

On reprend la démonstration dans le cas $p = 1$. On pose :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \qquad \mathrm{H}(t) = \mathrm{e}^{-t\mathrm{A}}\mathrm{X}(t).$$

Par produit, H est dérivable sur I avec

$$\begin{aligned} \mathrm{H}'(t) &= -\mathrm{A}\mathrm{e}^{-t\mathrm{A}}\mathrm{X}(t) + \mathrm{e}^{-t\mathrm{A}}\mathrm{X}'(t) \\ &= -\mathrm{A}\mathrm{e}^{-t\mathrm{A}}\mathrm{X}(t) + \mathrm{e}^{-t\mathrm{A}}\mathrm{AX}(t). \end{aligned}$$

D'où $\mathrm{H}'(t) = 0$ car $\mathrm{e}^{-\mathrm{A}t}$ et A commutent. Comme I est un intervalle, H est constante. Si $\mathrm{V}_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est cette constante :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \qquad \mathrm{e}^{-t\mathrm{A}}\mathrm{X}(t) = \mathrm{V}_0 \quad \text{puis} \quad \mathrm{X}(t) = \mathrm{e}^{-t\mathrm{A}}\mathrm{V}_0$$

• Faire la méthode de la variation de la constante.

■

La pratique

Exemples. • **Un cas diagonalisable**

Résolution du système différentiel :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} x'(t) = 5x(t) + 2y(t) + t \\ y'(t) = -4x(t) - y(t) + 1 \end{cases}$$

Rédaction 1 : En appliquant directement les formules pour les solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

On pose pour $t \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

de sorte que $\mathrm{X}'(t) = \mathrm{AX}(t) + \mathrm{B}(t)$.

⟶ Calcul de $\exp(t\mathrm{A})$ via une diagonalisation.

$$\chi_\mathrm{A} = \det \begin{bmatrix} \mathrm{X}-5 & -2 \\ 4 & \mathrm{X}+1 \end{bmatrix} = (\mathrm{X}-5)(\mathrm{X}+1) + 8 = \mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X} + 3 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-3).$$

Une base de vecteurs propres est donnée par

$$C_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

On pose alors

$$P = [\ C_1 \quad C_2\ ] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

On a alors pour $t \in \mathbb{R}$

$$\exp(tA) = P\exp(tD)P^{-1} = P\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} -e^t & e^{3t} \\ 2e^t & -e^{3t} \end{bmatrix}P^{-1}$$

Et les solutions de l'équation homogène sont

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{bmatrix} -e^t & e^{3t} \\ 2e^t & -e^{3t} \end{bmatrix}\tilde{V}_0 \quad \text{où} \quad \tilde{V}_0 = P^{-1}V_0.$$

Soit
$$X_H : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{bmatrix} \mu e^{3t} - \lambda e^t \\ 2\lambda e^t - \mu e^{3t} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

→ Solution particulière.

On cherche une solution particulière sous la forme $x_p(t) = at + b$, $y_p(t) = ct + d$. On remplace dans le système et on identifie. On obtient :

$$x_p(t) = \frac{1}{3}t + \frac{13}{9}, \qquad y_p(t) = -\frac{4}{3}t - \frac{31}{9}$$

→ Solution générale. Les solutions sont données par $X_H : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{bmatrix} \mu e^{3t} - \lambda e^t + \frac{1}{3}t + \frac{13}{9} \\ 2\lambda e^t - \mu e^{3t} - \frac{4}{3}t - \frac{31}{9} \end{bmatrix}$ où $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$.

Rédaction 2 :

En posant $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \alpha(t)u + \beta(t)v$ où (u, v) désigne une base de vecteurs propres de la matrice associée au système.

Les fonctions α et β sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec

$$\begin{aligned}
\alpha'(t)u + \beta'(t)v &= X'(t) = AX(t) + B(t) \\
&= A\big(\alpha(t)u + \beta(t)v\big) + B(t) \\
&= \alpha(t)Au + \beta(t)Av + B(t) \\
&= \alpha(t)u + 3\beta(t)v + (1+t)u + (2t+1)v \\
\alpha'(t)u + \beta'(t)v &= \big(\alpha(t) + 1 + t\big)u + \big(3\beta(t) + (2t+1)\big)v
\end{aligned}$$

Comme u et v sont vecteurs propres pour des valeurs propres différentes, (u, v) est une famille libre :

$$\alpha'(t) = \alpha(t) + 1 + t \quad \text{et} \quad \beta'(t) = 3\beta(t) + 2t + 1$$

La résolution de ces deux équations, justifient l'existence de deux constantes c_α, c_β tels que :

$$\alpha(t) = c_\alpha e^t - t - 2 \quad \text{et} \quad \beta(t) = c_\beta e^{3t} - \frac{2}{3}t - \frac{5}{9}.$$

On obtient

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \alpha(t)u + \beta(t)v = \begin{bmatrix} -c_\alpha e^t + c_\beta e^{3t} + \frac{1}{3}t + \frac{13}{9} \\ 2c_\alpha e^t - c_\beta e^{3t} - \frac{4}{3}t - \frac{31}{9} \end{bmatrix}$$

- **Un cas non diagonalisable**

Résolution du système $X' = AX$ avec la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

On écrit $A = I + N$ avec $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $N^2 = 0_2$.

Comme I et N commutent :

$$\exp(tA) = \exp(t(I+N)) = e^t \exp(tN) = e^t(I + tN) = e^t\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$X(t) = \exp(tA)X_0 = \begin{bmatrix} e^t(\lambda + t\mu) \\ \mu e^t \end{bmatrix}.$$

Exercice 4

✦

1. À l'aide d'un calcul d'exponentielle de matrice, résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$.
2. Montrer que les trajectoires des solutions sont des cercles centrés à l'origine.

ceEqD3

Retour sur les équations différentielles linéaire d'ordre 2

Pour $a, b \in \mathbb{K}$, on considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$y'' + ay' + by = 0$$

Remarquons que c'est équivalent à

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -ax - by \end{cases}$$

qui est encore équivalent à

$$X' = AX \quad \text{où} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}.$$

Réduisons la matrice A. Son polynôme caractéristique est alors

$$\chi_A = \det \begin{bmatrix} -X & 1 \\ -a & -b-X \end{bmatrix} = X^2 + bX + a.$$

On constate que $r \in \mathbb{K}$ est racine de χ_A si et seulement si $r^2 + br + a = 0$. On retrouve ici l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle.

• Si χ_A a deux racines r_1, r_2 distinctes (cas A diagonalisable) alors la matrice A est semblable à $\operatorname{diag}(r_1, r_2)$, puis $\exp(tA)$ est semblable à $\operatorname{diag}\big(\exp(tr_1), \exp(tr_2)\big)$. On sait alors qu'il existe $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad X(t) = P \operatorname{diag}\big(\exp(tr_1), \exp(tr_2)\big) P^{-1} V_0.$$

En ne regardant que la première coordonnée, on a l'existence de $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}.$$

On retrouve bien le résultat du chapitre 4 : Équations différentielles (partie I).

Généralisation aux équations différentielles linéaire d'ordre n

On considère maintenant l'équation différentielle linéaire

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = 0 \qquad (\mathscr{E}_n)$$

On introduit les fonctions auxiliaires :

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = x_1' = y' \\ \quad \vdots \\ x_{n-1} = x_{n-2}' = y^{(n-2)} \\ x_n = x_{n-1}' = y^{(n-1)} \end{cases}$$

de sorte que $(\mathscr{E}_n)$ est maintenant équivalent au système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \quad \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \cdots - a_n x_1 \end{cases}$$

que l'on récrit matriciellement :

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} \quad \text{avec} \quad \mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}.$$

On reconnait une matrice compagnon étudiée dans les chapitres précédents. On sait alors que le polynôme caractéristique est

$$\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^n + a_1 \mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mathrm{X} + a_n$$

où les a_i sont les coefficients de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_n)$.

Si χ_A est scindé à racines simples (en particulier A est diagonalisable), notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, les n valeurs propres distinctes de A. En reprenant la démonstration précédente, on montre que les solutions s'écrivent :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{e}^{\lambda_i t} \quad \text{où} \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Dans le cas plus général, on montre que :

THÉORÈME **Résolution complète cas linéaire homogène**

Soit l'équation différentielle

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = 0 \qquad (\mathscr{E}_n)$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Notons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ les racines deux à deux distinctes du polynôme caractéristique $\chi_\mathrm{A}(\mathrm{X})$ et $m_1, m_2, \ldots, m_r$ les multiplicités. Autrement dit :

$$\chi_\mathrm{A}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n + a_1 \mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_n = (\mathrm{X} - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\mathrm{X} - \lambda_r)^{m_r}.$$

Alors les solutions sont de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{i=1}^{r} \mathrm{P}_i(t) \mathrm{e}^{\lambda_i t}$$

où, pour tout indice i, P_i est un polynôme de degré strictement inférieur à m_i.

Exercices

Exercice 5. ✦ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier que $\det(\exp A) = \exp(\mathrm{Tr}\, A)$. # ceEqD4

Exercice 6. ✦✦✦ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. En utilisant les polynômes de Lagrange, justifier qu'il existe un polynôme P tel que $\exp(A) = P(A)$. # ceEqD5

Exercice 7. ✦✦ Dans la suite, A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonalisables et qui commutent ($AB = BA$). L'objectif est d'établir l'égalité : # ceEqD6

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A).$$

On note :

- u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associés à A et B.
- $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ les valeurs propres de u et $(\mu_1, \ldots, \mu_q)$ les valeurs propres de v.
- $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre de u associé à une valeur propre λ.

1. Montrer que $E_\lambda(u)$ est stable par v.
Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on note alors v_i l'endomorphisme de $E_{\lambda_i}(u)$ induit par la restriction de v à $E_{\lambda_i}(u)$. L'objet de la question suivante est de montrer que v_i est diagonalisable.

2. Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une base de $\mathbb{R}^p$ constituée de vecteurs propres de v. On suppose que chaque vecteur x_j est écrit sous la forme

$$x_j = x_{1,j} + x_{2,j} + \cdots + x_{r,j}, \quad \text{avec} \quad x_{k,j} \in E_{\lambda_k}(u) \text{ pour tout } k \text{ de } [\![1, r]\!].$$

a) Montrer que les vecteurs non nuls de la famille $\left(x_{k,1}, \ldots, x_{k,p}\right)$ sont des vecteurs propres de v et des vecteurs propres de u.

b) Montrer que cette famille est une famille génératrice de $E_{\lambda_k}(u)$.

c) En déduire que u et v admettent une base commune de vecteurs propres.

3. Conclure.

Exercice 8. ✦ Résoudre le système différentiel sur $\mathbb{R}$: # ceEqD7

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x - \frac{y}{2} - z \\ y' & = & -x + z \\ z' & = & x - \frac{y}{2} - z. \end{array}\right.$$

Exercice 9. ✦ Résoudre le système différentiel : # ceEqD8

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x - 2y + t \\ y' & = & 3x - 4y. \end{array}\right.$$

Exercice 10. ✦ Soit $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. # ceEqD9

1. Sans calculer $\exp(A)$, résoudre le système différentiel $X' = AX$.

2. En déduire $\exp(A)$.

Exercice 11. ✦✦ Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique non nulle. On considère le système différentiel $X' = AX$. # ceEqD10

1. Justifier que le système admet des solutions constantes non nulles.

2. Montrer que toutes les solutions sont bornées.

Indications et solutions

Exercice 1

- Soit $(i, j) \in [\![1; p]\!]^2$

$$[\mathrm{AB}]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} [\mathrm{A}]_{ik}[\mathrm{B}]_{kj}.$$

On en déduit par inégalité triangulaire et définition de la norme $\|\cdot\|_\infty$:

$$\begin{aligned}\left|[\mathrm{AB}]_{ij}\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{p} \left|[\mathrm{A}]_{ik}\right| \cdot \left|[\mathrm{B}]_{kj}\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{p} \|\mathrm{A}\|_\infty \cdot \|\mathrm{B}\|_\infty = p\|\mathrm{A}\|_\infty \cdot \|\mathrm{B}\|_\infty.\end{aligned}$$

La première inégalité s'en déduit.

- Notons que

$$|\!|\!|\mathrm{A}|\!|\!| = \sup_{\substack{\mathrm{X}\in\mathcal{M}_{p_1}(\mathbb{K}) \\ \mathrm{X}\neq 0_{p,1}}} \frac{\|\mathrm{AX}\|}{\|\mathrm{X}\|}.$$

Soit $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $\mathrm{X} \neq 0_{p,1}$. On pose $\mathrm{Y} = \mathrm{BX}$. Si $\mathrm{Y} \neq 0$

$$\frac{\|\mathrm{ABX}\|}{\|\mathrm{X}\|} = \frac{\|\mathrm{AY}\|}{\|\mathrm{Y}\|} \cdot \frac{\|\mathrm{BX}\|}{\|\mathrm{X}\|} \leqslant |\!|\!|\mathrm{A}|\!|\!| \cdot |\!|\!|\mathrm{B}|\!|\!|.$$

Notons que cette inégalité est vraie si $\mathrm{Y} = 0$. Par passage à la borne supérieure, la seconde inégalité s'en déduit.

Exercice 2

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique, c'est-à-dire $\mathrm{A}^\mathrm{T} = -\mathrm{A}$. Or on vérifie que

$$\exp(\mathrm{A})^\mathrm{T} = \exp(\mathrm{A}^\mathrm{T}).$$

Ainsi, $$\exp(\mathrm{A})^\mathrm{T} = \exp(-\mathrm{A}).$$

En reprenant les propriétés de l'exponentielle matricielle, il vient alors

$$\exp(\mathrm{A})^\mathrm{T} \exp(-\mathrm{A}) = \exp(-\mathrm{A})\exp(\mathrm{A}) = \exp(0) = \mathrm{I}_n.$$

Donc $\exp(\mathrm{A})$ est une matrice orthogonale.

Exercice 3

1. Le cas antisymétrique

1.a) On remarque que

$$\mathrm{J}^2 = -\mathrm{I}_2.$$

Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{J}^{2p} = (-1)^p \mathrm{I}_2 \quad \text{et} \quad \mathrm{J}^{2p+1} = (-1)^p \mathrm{J}.$$

Ainsi, en distinguant les termes d'indices pairs et ceux impairs, on obtient

$$\exp(\theta\mathrm{J}) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\theta^{2p}\mathrm{J}^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\theta^{2p+1}\mathrm{J}^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

En reprenant les résultats sur les séries entières :

$$\begin{aligned}\exp(\theta\mathrm{J}) &= \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p\theta^{2p}}{(2p)!}\right)\mathrm{I}_2 + \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p\theta^{2p+1}}{(2p+1)!}\right)\mathrm{J} \\ &= \exp(\theta\mathrm{J}) = \cos(\theta)\mathrm{I}_2 + \sin(\theta)\mathrm{J}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\exp(\theta\mathrm{J}) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

On retrouve les matrices de rotation.

1.b) L'application

$$\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \exp(\mathrm{M}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

n'est pas injective. En effet, $\exp(0) = \mathrm{I}_2$ et, d'après la question précédente,

$$\exp(2\pi\mathrm{J}) = \mathrm{I}_2.$$

Or $2\pi\mathrm{J} \neq 0$. Dès lors, l'application n'est pas injective.

- On a vu que pour tout $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\exp(\mathrm{M})$ est une matrice inversible. Ainsi la matrice nulle ne peut avoir d'antécédent par l'application. Elle n'est donc pas surjective.

2. Le cas nilpotent

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On calcule

$$\mathrm{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puis $\mathrm{A}^3 = 0$. Ainsi, la série de l'exponentielle est stationnaire

$$\exp(\mathrm{A}) = \mathrm{I}_3 + \mathrm{A} + \frac{1}{2}\mathrm{A}^2.$$

Donc

$$\exp(\mathrm{A}) = \begin{bmatrix} 1 & a & b + \dfrac{a^2}{2} \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 4

1. On pose $\mathrm{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathrm{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ de sorte que

$$\mathrm{X}' = \mathrm{JX}.$$

On sait alors que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = \exp(tJ)X(0).$$

Or on a calculé cette exponentielle de matrice à l'exercice 3, on a alors

$$X(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} X(0).$$

On en déduit

$$\begin{cases} x(t) = x(0)\cos(t) + y(0)\sin(t) \\ y(t) = -x(0)\sin(t) + y(0)\cos(t). \end{cases}.$$

2. Il suffit de vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$x(t)^2 + y(t)^2 = \text{Cste}.$$

Exercice 5

Comme A est une matrice complexe, elle est trigonalisable. Il existe donc une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telles que

$$A = PTP^{-1}.$$

Alors $\qquad \exp(A) = P\exp(T)P^{-1}.$

Donc $\qquad \det(\exp(A)) = \det(\exp(T)).$

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de T. Alors $\exp(T)$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$. Ainsi,

$$\det\big(\exp(T)\big) = e^{\lambda_1} \cdots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}.$$

Or on sait aussi que par invariance par similitude de la trace

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{Tr}(T) = \mathrm{Tr}(A).$$

Ce qui conclut :

$$\det(\exp A) = \exp(\mathrm{Tr} A)$$

Exercice 6

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Notons

$$\lambda_1, \dots, \lambda_r$$

les valeurs propres deux à deux distinctes de A. On construit le polynôme d'interpolation de Lagrange P tel que pour tout $i \in [\![1; r]\!]$

$$P(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$$

On a par exemple la formule explicite

$$P(X) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} L_i(X),$$

où

$$L_i(X) = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant r \\ j \neq i}} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

Comme A est diagonalisable, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = QDQ^{-1}$ où D est diagonale avec les valeurs propres de A sur la diagonale (comptées avec multiplicité). Ainsi

$$P(D) = \mathrm{Diag}(e_1^{\lambda}, \cdots, e^{\lambda_r}) = \exp(D).$$

Puis

$$P(A) = QP(D)Q^{-1} = Q\exp(D)Q^{-1} = \exp(QDQ^{-1}) = \exp(A).$$

Ce qui conclut.

Exercice 10

Si on pose ${}^tX = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4]$, le système $X' = AX$ s'écrit

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_3, \\ x_2' = 4x_2 + 2x_4, \\ x_3' = 2x_1 + 4x_3, \\ x_4' = 2x_2 + 4x_4. \end{cases}$$

On remarque que les variables (x_1, x_3) et (x_2, x_4) sont découplées. On obtient donc deux systèmes identiques :

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_3, \\ x_3' = 2x_1 + 4x_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2' = 4x_2 + 2x_4, \\ x_4' = 2x_2 + 4x_4. \end{cases}$$

On étudie la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique vaut

$$\chi_B(\lambda) = (4-\lambda)^2 - 4 = (\lambda - 6)(\lambda - 2).$$

Les valeurs propres sont donc 6 et 2 et on vérifie que si on pose

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad v \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

alors u et v sont respectivement vecteur propre pour 6 et 2. Ainsi,

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \alpha_1 e^{6t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

et

$$\begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \alpha_2 e^{6t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

La solution générale du système est donc

$$X(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{6t} + \beta_1 e^{2t} \\ \alpha_2 e^{6t} + \beta_2 e^{2t} \\ \alpha_1 e^{6t} - \beta_1 e^{2t} \\ \alpha_2 e^{6t} - \beta_2 e^{2t} \end{bmatrix}, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}.$$

2. On en déduit

$$\exp(tA) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{6t} + e^{2t} & 0 & e^{6t} - e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{6t} + e^{2t} & 0 & e^{6t} - e^{2t} \\ e^{6t} - e^{2t} & 0 & e^{6t} + e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{6t} - e^{2t} & 0 & e^{6t} + e^{2t} \end{bmatrix}.$$

En particulier, pour $t = 1$

$$\exp(A) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{6} + e^{2} & 0 & e^{6} - e^{2} & 0 \\ 0 & e^{6} + e^{2} & 0 & e^{6} - e^{2} \\ e^{6} - e^{2} & 0 & e^{6} + e^{2} & 0 \\ 0 & e^{6} - e^{2} & 0 & e^{6} + e^{2} \end{bmatrix}.$$