Nom :

Mathématiques

Cours

double-diplôme
ESCP x CentraleSupélec

Livret VII

Chapitre

2026

CHAPITRE 7

Équations différentielles II

Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est uniquement parce qu'ils ne réalisent pas à quel point la vie est compliquée.

John von Neumann (1903-1957) .

1 L'exponentielle matricielle

1.1 Définition et exemples

Proposition 1 (exponentielle d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La suite de matrices de terme général $\sum\limits_{k=0}^{n} A^k / k!$ est convergente. On pose alors

$$\exp(A) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Donnons quelques propriétés :

- Le cas diagonal.

$$\text{Si} \quad A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{alors} \quad \exp(A) = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\alpha_2} & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\alpha_n} \end{bmatrix}.$$

- Si P est une matrice inversible, alors $\exp\left(PAP^{-1}\right) = P\exp(A)P^{-1}$.
- Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *commutent* alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.
- On en déduit que $\exp(A)$ est inversible et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

⚠ **Attention.** Si A et B ne commutent pas, alors, en général, $\exp(A+B) \neq \exp(A)\cdot\exp(B)$.

Exercice 1

✧ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Justifier que $\exp(A)$ est une matrice orthogonale.

ceEqD1

Exercice 2

✦✦ **Exemples de calculs d'une exponentielle** *Questions indépendantes*

1. **a)** On pose $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\exp(\theta J)$.

b) Est-ce que l'application $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \exp(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est injective ? surjective ?

2. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. On pose

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer $\exp(A)$.

ceEqD2

1.2 Régularité

Proposition 2 (Dérivabilité de $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tA)$)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La fonction $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tA) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi'(t) = A\exp(tA).$$

⚠ **Attention.** Si $t \in I \mapsto A(t)$ est dérivable, on a bien la dérivabilité de $t \in I \mapsto \exp\big(A(t)\big)$ mais on ne peut affirmer que la dérivée est donnée par $t \in \mathbb{R} \mapsto A'(t)\exp\big(A(t)\big)$ car $A'(t)$ ne commute pas forcément avec $A(t)$.

2 Système différentiel linéaire

2.1 Définition et exemple

Définition 3 (Système différentiel linéaire)

On appelle **système différentiel linéaire** toute équation différentielle de la forme :

$$\forall t \in I, \qquad X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \qquad (\mathscr{E})$$

où
- $t \mapsto A(t)$ est une application continue de l'intervalle I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
- $t \mapsto B(t)$ est une application continue de l'intervalle I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;
- et l'inconnue est $X : t \mapsto X(t)$, une fonction dérivable de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Exemple. Le système d'équations différentielles :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3y(t) - z(t) + e^t \\ y'(t) = x(t) + y(t) + 2z(t) + 1 \\ z'(t) = x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

se ramène à un système différentiel linéaire en posant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad A(t) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Noter ici que A est constante. On parle de système linéaire à coefficients constants.

Remarque. À l'instar des équations différentielles du premier et second ordre, l'ensemble des solutions est un espace affine. Dans un premier temps, on détermine l'ensemble des solutions du système homogène

$$\forall t \in I, \qquad X'(t) = A(t)X(t) \qquad (\mathscr{E}_H)$$

Cet ensemble est un espace vectoriel, on le note $\mathscr{S}_{\mathscr{E},H}$. Ensuite, on détermine une solution particulière X_p de $(\mathscr{E})$. On conclut en précisant que l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$ est

$$\mathscr{S}_{\mathscr{E}} = \big\{t \in I \mapsto X_p(t) + X_H(t) \,|\, X_H \in \mathscr{S}_{\mathscr{E},H}\big\}.$$

2.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Théorème 4 (de Cauchy-Lipschitz linéaire)

Soient I un intervalle, $A \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$, $B \in \mathscr{C}^0\left(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\right)$, $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution qui est définie sur tout l'intervalle I.

2.3 Cas des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Le théorème

Théorème 5 (Résolution complète)

On considère le système différentiel

$$\forall t \in I, \qquad X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \qquad (\mathscr{E})$$

où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est constante, fixée, $t \mapsto B(t) \in \mathscr{C}^0\left(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\right)$. Alors, on a les énoncés :

i) les solutions de l'équation homogène $(\mathscr{E}_H)$ sont définies sur I par

$$\forall t \in I, \qquad X(t) = e^{tA}V_0 \quad , \text{avec } V_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K});$$

ii) Pour $t_0 \in I$, les solutions de (E) sont définies sur I par :

$$\forall t \in I, \qquad X(t) = e^{tA}V_0 + e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)\,\mathrm{d}s.$$

iii) Pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le problème de Cauchy : $\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$

admet une unique solution donnée par :

$$\forall t \in I, \quad X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0 + e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)\,\mathrm{d}s$$

La pratique

Exemples. • **Un cas diagonalisable**. Résolution du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = 5x(t) + 2y(t) + t \\ y'(t) = -4x(t) - y(t) + 1 \end{cases}$

→ *Rédaction 1*

En appliquant directement les formules pour les solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

→ *Rédaction 2*

En posant $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \alpha(t)u + \beta(t)v$ où (u, v) désigne une base de vecteurs propres de la matrice associée au système.

• **Un cas non diagonalisable**

Résolution du système $X' = AX$ avec la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercice 3

✦

1. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$.
2. Montrer que les trajectoires des solutions sont des cercles centrés à l'origine.

ceEqD3

Retour sur les équations différentielles linéaire d'ordre 2

Pour a, $b \in \mathbb{K}$, on considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$x'' + ax' + bx = 0$$

Remarquons que c'est équivalent à

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -bx - ay \end{cases} \qquad \text{puis à} \quad X' = AX \quad \text{où} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}.$$

Réduisons la matrice A. Son polynôme caractéristique est alors $\chi_A = X^2 + aX + b$. On constate que $r \in \mathbb{K}$ est racine de χ_A si et seulement si $r^2 + ar + b = 0$. On retrouve ici l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle.

- Si χ_A a deux racines r_1, r_2 distinctes (cas A diagonalisable) alors la matrice A est semblable à $\mathrm{diag}(r_1, r_2)$. On va en déduire l'existence de λ, $\mu \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}.$$

On retrouve bien le résultat du chapitre 4 : Équations différentielles (partie I).

Généralisation aux équations différentielles linéaire d'ordre n

On considère maintenant l'équation différentielle linéaire

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = 0 \qquad (\mathscr{E}_n)$$

On introduit les fonctions auxiliaires :

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = x_1' = y' \\ \quad\vdots \\ x_{n-1} = x_{n-2}' = y^{(n-2)} \\ x_n = x_{n-1}' = y^{(n-1)} \end{cases}$$

de sorte que $(\mathscr{E}_n)$ est maintenant équivalent au système différentiel suivant :

$$X' = AX \quad \text{avec} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}.$$

On reconnait une matrice compagnon étudiée dans les chapitres précédents. On sait alors que le polynôme caractéristique est

$$\chi_A = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n$$

où les a_i sont les coefficients de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_n)$.

Théorème 6 (Résolution complète cas linéaire homogène)

Soit l'équation différentielle

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = 0 \qquad (\mathscr{E}_n)$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Notons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ les racines deux à deux distinctes du polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ et $m_1, m_2, \ldots, m_r$ les multiplicités. Autrement dit :

$$\chi_A(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}.$$

Alors les solutions sont de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{i=1}^{r} P_i(t) e^{\lambda_i t}$$

où, pour tout indice i, P_i est un polynôme de degré strictement inférieur à m_i.

Exercices

Exercice 4. ✦ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier que $\det(\exp A) = \exp(\operatorname{Tr} A)$. # ceEqD4

Exercice 5. ✦✦✦ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. En utilisant les polynômes de Lagrange, justifier qu'il existe un polynôme P tel que $\exp(A) = P(A)$. # ceEqD5

Exercice 6. ✦✦ Dans la suite, A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonalisables et qui commutent ($AB = BA$). L'objectif est d'établir l'égalité : # ceEqD6

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A).$$

On note :

- u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associés à A et B.
- $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ les valeurs propres de u et $(\mu_1, \ldots, \mu_q)$ les valeurs propres de v.
- $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre de u associé à une valeur propre λ.

1. Montrer que $E_\lambda(u)$ est stable par v.
   Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on note alors v_i l'endomorphisme de $E_{\lambda_i}(u)$ induit par la restriction de v à $E_{\lambda_i}(u)$. L'objet de la question suivante est de montrer que v_i est diagonalisable.

2. Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une base de $\mathbb{R}^p$ constituée de vecteurs propres de v. On suppose que chaque vecteur x_j est écrit sous la forme
$$x_j = x_{1,j} + x_{2,j} + \cdots + x_{r,j}, \quad \text{avec} \quad x_{k,j} \in E_{\lambda_k}(u) \text{ pour tout } k \text{ de } [\![1, r]\!].$$
   a) Montrer que les vecteurs non nuls de la famille $\left(x_{k,1}, \ldots, x_{k,p}\right)$ sont des vecteurs propres de v et des vecteurs propres de u.
   b) Montrer que cette famille est une famille génératrice de $E_{\lambda_k}(u)$.
   c) En déduire que u et v admettent une base commune de vecteurs propres.
3. Conclure.

Exercice 7. ✦ Résoudre le système différentiel sur $\mathbb{R}$: # ceEqD7

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x - \frac{y}{2} - z \\ y' & = & -x + z \\ z' & = & x - \frac{y}{2} - z. \end{array}\right.$$

Exercice 8. ✦ Résoudre le système différentiel : # ceEqD8

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x - 2y + t \\ y' & = & 3x - 4y. \end{array}\right.$$

Exercice 9. ✦ Soit $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. # ceEqD9

1. Sans calculer $\exp(A)$, résoudre le système différentiel $X' = AX$.
2. En déduire $\exp(A)$.

Exercice 10. ✦✦ Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique non nulle. On considère le système différentiel $X' = AX$. # ceEqD10

1. Justifier que le système admet des solutions constantes non nulles.
2. Montrer que toutes les solutions sont bornées.