

Solutions des QSPs du cours

◆ Q₄

Exercice 1.

Endomorphisme
nilpotent

Soit φ un endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $\varphi^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $\varphi^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.
Calculer le rang de φ .

» Solution p.408

Comme φ est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 , son rang ne peut excéder 3. Si ce dernier vaut exactement 3, on aurait

$$\text{Im } \varphi \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \dim \text{Im } \varphi = \text{rg } \varphi = 3.$$

D'où l'égalité $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme φ serait donc surjectif. En tant qu'endomorphisme de dimension finie, φ serait bijectif. La composée $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi$ le serait aussi. Or $\varphi^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$, donc φ ne peut être bijectif. On a donc une contradiction : le rang ne peut valoir 3.

Soit $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $\varphi^2(x) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Justifions que la famille $(\varphi(x), \varphi^2(x))$ est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$0_{\mathbb{R}^3} = \lambda_1 \varphi(x) + \lambda_2 \varphi^2(x).$$

En appliquant φ , linéaire,

$$0_{\mathbb{R}^3} = \varphi(0_{\mathbb{R}^3}) = \lambda_1 \varphi^2(x) + \lambda_2 \varphi^3(x) = \lambda_1 \varphi^2(x).$$

Comme $\varphi^2(x) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $\lambda_1 = 0$. Ensuite $\lambda_2 = 0$. Dès lors $(\varphi(x), \varphi^2(x))$ est une famille libre de $\text{Im } \varphi$ qui est donc de dimension au moins 2. Finalement

$$\text{rg } \varphi = 2.$$

Commentaires. Dans le cas d'un endomorphisme nilpotent φ d'indice p , il est souvent utile d'introduire la famille :

$$\mathcal{F}_x = (x, \varphi(x), \dots, \varphi^{p-1}(x)) \quad \text{où} \quad \varphi^{p-1}(x) \neq 0_{\mathbb{E}}.$$

Cette famille est libre. Pour s'en convaincre, on part du test de liberté

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \varphi^i(x) = 0_{\mathbb{E}}$$

et en composant successivement par $\varphi^{p-1}, \varphi^{p-2}, \dots$, on obtient $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots$ (voir la solution de l'exercice 7 pour les détails).



Exercice 11.

d'après l'oral
HEC 2014

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle telle que $M^2 = 0$. Montrer que M est semblable à la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

» Solution p.419

On va commencer par prouver que M est de rang 1.
L'égalité $MM = 0_n$ donne l'inclusion $\text{Im}(M) \subset \text{Ker}(M)$, donc

$$\text{rg}(M) \leq \dim(\text{Ker}(M)).$$

Or d'après la formule du rang, la somme des deux vaut 3 et comme $M \neq 0_n$, $\text{rg}(M) \geq 1$, donc nécessairement $\text{rg}(M) = 1$ et $\dim(\text{Ker}(M)) = 2$.

On note ensuite u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à M . On cherche donc une base (e_1, e_2, e_3) telle que

$$\begin{cases} u(e_1) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ u(e_2) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ u(e_3) = e_1. \end{cases}$$

Donnons nous pour commencer un vecteur non nul noté e_1 dans l'image de u (cela est possible car $\text{Im}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$). D'après l'inclusion notée au début, e_1 est donc aussi dans le noyau de u .

Notons e_3 un antécédent de e_1 par u .

On complète enfin la famille libre (e_1) en une base (e_1, e_2) du noyau de u en utilisant le théorème de la base incomplète.

Nos trois vecteurs vérifient les égalités voulues, il reste à vérifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 .

Il suffit de vérifier la liberté de la famille. Soient trois réels a, b, c tels que :

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

On compose par u pour obtenir $ce_1 = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $c = 0$ car e_1 est choisi non nul. Il vient alors que $ae_1 + be_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Comme (e_1, e_2) est libre, a et b sont nuls. Finalement, la famille (e_1, e_2, e_3) est libre et c'est une base de \mathbb{R}^3 . Par construction, la matrice de u dans cette base est A . Et par la formule de changement de bases, A et M sont semblables car elles représentent le même endomorphisme.



Exercice 17.

d'après l'oral
HEC 2015

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. On note

$$A = \{(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2 \mid u \circ v = 0\}.$$

Déterminer $\sup_{(u,v) \in A} (\text{rg}(u) + \text{rg}(v))$.

» Solution p.425

Pour $(u, v) \in A$, nous avons $\text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u)$, donc par passage aux dimensions

$$\text{rg}(v) = \dim(\text{Im}(v)) \leq \dim(\text{Ker}(u)).$$

De plus par le théorème du rang

$$\dim(\text{Ker}(u)) + \text{rg}(u) = n$$

D'où

$$\text{rg}(u) + \text{rg}(v) \leq n$$

De plus, le couple $(\text{id}_E, 0_{\mathcal{L}(E)})$ appartient à A et vérifie

$$\text{rg}(\text{id}_E) + \text{rg}(0_{\mathcal{L}(E)}) = n + 0 = n.$$

Finalement, la valeur cherchée est n .

Commentaires. Il est conseillé, lorsque l'on cherche la borne supérieure d'un ensemble, de commencer par chercher à majorer cet ensemble, puis se demander si l'on peut trouver un élément proche ou égal à ce majorant. Il faut commencer, à l'oral, par donner des exemples très simples comme ci-dessus, déjà pour y voir plus clair, et aussi parce que parfois les exemples les plus simples donnent les solutions recherchées.



Exercice 20.

d'après l'oral
HEC 2016

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 2 et M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad m_{i,j} = i^{j-1}.$$

Démontrer que M est inversible.

» Solution p.428

C'est un cas particulier d'une matrice de Vandermonde.
Justifions que la famille des colonnes de $M = [C_1, \dots, C_n]$ est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0_{n,1}.$$

En regardant la i -ème ligne, il vient

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j v^{j-1} = \sum_{j=1}^n \lambda_j m_{ij} = 0.$$

Si on pose $P(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x^{j-1}$ pour $x \in \mathbb{R}$, P est un polynôme réel de degré au plus $n-1$ avec $1, 2, \dots, n$ comme racines. Il y a au moins n racines, P est en réalité le polynôme nul. Ces coefficients, les λ_j , sont donc tous nuls. La famille (C_1, \dots, C_n) est libre, la matrice M est inversible.



Exercice 35.

Oral HEC
2025 (Rayan)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On dit que A est d'ordre n si $A^n = I_2$.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de θ , la matrice R_θ est d'ordre n .

» Solution p.440

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} R_\theta R_{\theta'} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' \\ \sin \theta' & \cos \theta' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' & -\sin \theta' \cos \theta - \sin \theta \cos \theta' \\ \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta' & -\sin \theta \sin \theta' + \cos \theta \cos \theta' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$R_{\theta+\theta'} = R_\theta R_{\theta'}.$$

Par récurrence, on établit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_{n\theta} = R_\theta^n.$$

Ainsi R_θ est d'ordre n si $R_{n\theta} = I_2$, soit

$$\begin{cases} \cos(n\theta) = 1 \\ \sin(n\theta) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} n\theta = 2\pi k \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} \theta = \frac{2\pi k}{n} \\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



Exercice 41.

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$, $B^2 = B$ et $\text{Tr } A = \text{Tr } B$.
Montrer que A est semblable à B .

» Solution p.443

La matrice A est la matrice d'un projecteur, elle est diagonalisable et semblable à la matrice diagonale

$$D_r = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{r \text{ fois}}, 0, \dots, 0)$$

où $r = \text{rg } A$. Notons que $r = \text{Tr}(D_r) = \text{Tr}(A)$ car la trace est invariante par similitude. Comme A et B ont même trace, on montre que B est aussi semblable à D_r . Ainsi A et B sont semblables à une même matrice, elles sont semblables.

Commentaires. Retenons que dans la trace de la matrice d'un projecteur dans une base correspond au rang du projecteur.



Exercice 52.

Oral 2024

1. On pose $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Montrer que M est semblable à $2M$.
2. Que dire d'une matrice M diagonalisable et semblable à $2M$?

» Solution p.454

1. **Commentaires.** Deux matrices différentes sont semblables si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes. Soit φ l'endomorphisme canoniquement associé à M . Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est la base canonique de \mathbb{R}^2 , on a

$$\varphi(e_1) = 0_{\mathbb{R}^2} \quad \text{et} \quad \varphi(e_2) = e_1$$

On cherche une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ telle que

$$\varphi(\varepsilon_1) = 0_{\mathbb{R}^2} \quad \text{et} \quad \varphi(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_1.$$

On constate que $\varepsilon_1 = e_1$ et $\varepsilon_2 = 2e_2$ conviennent. La matrice de passage est alors

$$P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rédigeons la solution.

Posons $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. La matrice P est inversible et $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$. Ainsi

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2M. \end{aligned}$$

Ce qui conclut.

2. Deux matrices semblables ont même spectre. Dès lors si $\lambda \in \text{Sp}(M)$ alors $2\lambda \in \text{Sp}(2M) = \text{Sp}(M)$. Par récurrence immédiate, on a donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad 2^p \lambda \in \text{Sp}(M).$$

Si $\lambda \neq 0$, le spectre de M contiendrait une infinité de valeurs propres. Absurde, le spectre d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient au plus n valeurs propres. Ainsi $\lambda = 0$, ou encore $\text{Sp}(M) \subset \{0\}$. Comme M est diagonalisable, on a seulement 0 comme valeur propre et il existe une matrice P inversible telle que

$$M = P \text{diag}(0, \dots, 0) P^{-1} = P 0_n P^{-1} = 0_n.$$

De plus, la matrice nulle est bien semblable à son double.


En conclusion, la seule matrice solution est la matrice nulle.



Exercice 53.

Oral 2024

Soit φ un endomorphisme d'un espace vectoriel E qui commute avec tous les projecteurs de E .

1. Montrer que pour tout $u \in E \setminus \{0_E\}$ est vecteur propre de φ .
2.  En déduire que φ est une homothétie ou l'application nulle.

» Solution p.455

1. Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$. Soient H un supplémentaire de $\text{Vect}(u)$ et p le projecteur sur $\text{Vect}(u)$ parallèlement à H . On a donc $p(u) = u$. Par hypothèse sur φ , $p \circ \varphi = \varphi \circ p$. C'est-à-dire

$$\forall x \in E, \quad p \circ \varphi(x) = \varphi \circ p(x).$$

En particulier pour $x \leftarrow u$, il vient

$$\varphi(u) = \varphi(p(u)) = p \circ \varphi(u) \in \text{Vect}(u).$$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(u) = \lambda u$. Ce qui conclut.

2. On a donc pour tout $u \in E$, l'existence de $\lambda_u \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(u) = \lambda_u u$. Ce réel λ_u est même unique pour tout vecteur u non nul. Justifions que pour tous $u, v \in E$ (non nuls) $\lambda_u = \lambda_v$. Par linéarité de φ

$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v) = \lambda_u u + \lambda_v v.$$

Or, on a aussi

$$\varphi(u + v) = \lambda_{u+v}(u + v) = \lambda_{u+v}u + \lambda_{u+v}v.$$

- Si les vecteurs u et v sont non colinéaires, la famille (u, v) est libre. L'égalité

$$\lambda_u u + \lambda_v v = \lambda_{u+v}u + \lambda_{u+v}v$$

impose $\lambda_u = \lambda_{u+v} = \lambda_v$.

- Si les vecteurs u et v sont colinéaires (il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $u = \mu v$). Dans ce cas,

$$\lambda_u u = \varphi(u) = \varphi(\mu v) = \mu \varphi(v) = \mu \lambda_v v = \lambda_v \cdot (\mu v) = \lambda_v u.$$

Pour $u \neq 0_E$, $\lambda_u = \lambda_v$.

- En résumé, le réel λ_u est indépendant de $u \in E \setminus \{0_E\}$, on le note simplement λ . Comme $\varphi(0_E) = 0_E = \lambda 0_E$, on a bien

$$\forall u \in E, \quad \varphi(u) = \lambda u.$$

L'endomorphisme φ est une homothétie.



Exercice 55.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres distinctes. Justifier que l'application linéaire suivante est diagonalisable.

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto AM. \end{cases}$$

» Solution p.457

••

Comme la matrice A a n valeurs propres distinctes, A est diagonalisable. Notons (c_1, c_2, \dots, c_n) une base de matrices colonnes propres de A . Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres telles que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Ac_i = \lambda_i c_i$. Posons maintenant pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$C_{ij} = [0_{n,1}, 0_{n,1}, \dots, 0_{n,1}, c_i, 0_{n,1}, \dots, 0_{n,1}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

où on a placé la matrice colonne c_i en j -ème position. Avec ce choix :

→ En s'appuyant sur la liberté de la famille $(c_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, on montre que la famille $(C_{ij})_{i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est libre. C'est même une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puisqu'elle contient $n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ éléments.

→ Les matrices C_{ij} sont des vecteurs propres de Φ car $C_{i,j} \neq 0_n$ et

$$\begin{aligned} \Phi(C_{ij}) &= AC_{ij} = [A0_n, \dots, A0_{n,1}, AC_i, A0_{n,1}, \dots, A0_{n,1}] \\ &= [0_{n,1}, \dots, 0_{n,1}, \lambda C_i, 0_{n,1}, \dots, 0_{n,1}] = \lambda_i C_{ij}. \end{aligned}$$

Résumons, il y a une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres, Φ est diagonalisable.

Commentaires. On peut affiner la démonstration en montrant que A est diagonalisable si et seulement si Φ l'est.



————— **Exercice 61.** —————

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables et ayant chacune n valeurs propres distinctes. Montrer que les matrices A et B commutent si et seulement si elles sont diagonalisables avec la même matrice de passage.

» Solution p.462

Raisonnons par double implication :

Soient f, g les endomorphismes de \mathbb{R}^n canoniquement associés à A et B .

\Rightarrow Si A et B commutent. Notons (e_1, \dots, e_n) une base de vecteurs propres de f associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (2 à 2 distinctes par hypothèse). Comme f et g , commutent

$$f(g(e_i)) = g(f(e_i)) = g(\lambda_i e_i) = \lambda_i g(e_i).$$

Ainsi $g(e_i) \in \ker(f - \lambda_i \text{id}_{\mathbb{E}})$. Or tous les espaces propres de f sont de dimension 1 (car il y a n valeurs propres distinctes) et $e_i \in \ker(f - \lambda_i \text{id}_{\mathbb{E}})$ donc $g(e_i) \in \text{Vect}(e_i)$. Il existe $\mu_i \in \mathbb{R}$ tel que $g(e_i) = \mu_i e_i$. Autrement dit, e_i est un vecteur propre pour g . On a ainsi une base commune de diagonalisation de f et g .

\Leftarrow Réciproquement, s'il existe P une matrice inversible, D_A, D_B diagonales telles que

$$A = PD_A P^{-1} \quad \text{et} \quad B = PD_B P^{-1}$$

alors

$$\begin{aligned} AB &= PD_A D_B P^{-1} \\ &= PD_B D_A P^{-1} \text{ car diagonales} \\ &= BA. \end{aligned}$$

D'où la conclusion.



Exercice 75.

On note S_n^+ l'ensemble des matrices symétriques dont le spectre est dans \mathbb{R}^+ .

1. a) Soit $M \in S_n^+$, justifier qu'il existe $R \in S_n^+$ telle que

$$R^2 = M.$$

- b) En déduire un programme qui teste si une matrice M appartient à S_n^+ et renvoie la matrice R construite à la question précédente.

On pourra s'appuyer sur le code ci-dessous qui explique comment obtenir le spectre d'une matrice A .

```
import numpy as np

A = np.array([[4, -2],
              [1,  1]])

Sp, P = np.linalg.eig(A)
print("- Spectre :")
print(Sp)

print("- Calcul de P^(-1)AP")
P_inv = np.linalg.inv(P)
print(np.dot(np.dot(P_inv, A), P))
```

```
>>>
- Spectre :
[3.  2.]
- Calcul de P^(-1)AP
[[3.  0.]
 [0.  2.]
```

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A + {}^tA \in S_n^+$. Vérifier que

$$\text{Ker } A \subset \text{Ker } (A + {}^tA).$$

A-t-on une égalité ?

» Solution p.478

1.a) Classique.

1.b) Un code possible :

```
def Racine(M):
    n,p=np.shape(M)
    if n!=p:
        return None
    for i in range(n):
        for j in range(i-1):
            if M[i,j]!=M[j,i]:
                return None
    Sp, P = np.linalg.eig(A)
    for i in range(n):
        if Sp[i]<0:
            return None
    D=np.zeros([n,n])
    for i in range(n):
        D[i,i]=np.sqrt(Sp[i])
    R=np.dot(np.dot(P,D),P_inv)
    return R
```

2. Soit $X \in \text{Ker } A$. Considérons le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et la norme associée

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle X, Y \rangle = {}^tXY, \quad \|X\|^2 = {}^tXX.$$

On a l'existence de $R \in S_n^+$ telle que $A + {}^tA = R^2 = {}^tRR$.

$$\begin{aligned} \|RX\|^2 &= {}^tX(A + {}^tA)X \\ &= {}^tXAX + {}^tX{}^tAX \\ &= {}^tX(AX) + {}^t(AX)X \\ \|RX\|^2 &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi $RX = 0$. D'où $(A + {}^tA)X = R^2X = 0$, puis $X \in \text{Ker}(A + {}^tA)$. Ce qui conclut.

- Non, il n'y a en général pas égalité. On peut par exemple considérer une matrice antisymétrique inversible.



Exercice 78.

Matrice Atilia

Soit un entier $n \geq 2$.

1. Préciser le spectre et une base de vecteurs propres de la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des « 1 ».
2. Même question pour la matrice $J_{\alpha,\beta} = \alpha I_n + \beta J$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

» Solution p.480

1. La matrice J est symétrique réelle, la matrice est diagonalisable. On constate que 0 est valeur propre car J est de rang 1 et par la formule du rang

$$\dim E_0(J) = n - \text{rg}(J) = n - 1.$$

Une base de l'espace propre pour la valeur propre 0 est donnée par

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Commentaires. Dans le cas d'une matrice diagonalisable, on montre que

$$\text{Tr}(A) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda \cdot \dim E_\lambda(A).$$

Ce qui permet de vérifier que la seconde valeur propre λ de J est solution de

$$n = \text{Tr}(J) = \lambda \times 1 + 0 \times (n - 1) = \lambda.$$

Posons $X_0 = {}^t [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]$ de sorte que

$$JX_0 = nX_0 \quad \text{et} \quad X_0 \neq 0_{n,1}.$$

Par conséquent, $n \in \text{Sp}(J)$ et $\text{Vect}(X_0) \subset E_n(J)$. Par un compte des dimensions, $\dim E_n(J) = 1$ et on a égalité

$$\text{Vect}(X) = E_n(J).$$

La famille constituée de l'unique vecteur X_0 est une base de $E_n(J)$.

Résumons, le spectre de J est $\{0; n\}$ et une base de vecteurs propres de J est obtenue en concaténant une base de $E_0(J)$ avec une base de $E_n(J)$.

2. Soit X un vecteur propre de J pour la valeur propre λ .

$$JX = \lambda X \quad \text{et} \quad X \neq 0_{n,1}.$$

Dès lors

$$J_{\alpha,\beta}X = (\alpha I_n + \beta J)X = \alpha X + \beta JX = (\alpha + \beta\lambda)X.$$

Ainsi $\alpha + \beta\lambda$ est valeur propre de $J_{\alpha,\beta}$ avec le même vecteur propre X . On en déduit que

$$\text{Sp}(J_{\alpha,\beta}) = \{\alpha; \alpha + \beta n\} \quad \text{car} \quad \text{Sp}(J) = \{0; n\}$$

et une base de vecteurs propres est identique à celle donnée pour J dans la question précédente.



Exercice 80.

Encadrement
de Rayleigh

Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \|X\|^2 \cdot \min \operatorname{Sp}(A) \leq {}^t X A X \leq \|X\|^2 \cdot \max \operatorname{Sp}(A),$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

» Solution p.482

D'après le théorème spectral, il existe (X_1, \dots, X_n) une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique constituée de vecteurs propres de A . Il existe aussi $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad AX_i = \lambda_i X_i \quad \text{et} \quad X_i \neq 0_{n,1}.$$

Rappelons que le produit scalaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est donné par

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle X, Y \rangle = {}^tXY.$$

On a donc pour tous indices i, j

$${}^tX_iX_j = \langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Par décomposition dans une base orthonormée

$$X = \sum_{i=1}^n \langle X, X_i \rangle X_i.$$

D'où

$$AX = \sum_{i=1}^n \langle X, X_i \rangle AX_i = \sum_{i=1}^n \langle X, X_i \rangle \lambda_i X_i.$$

Puis par bilinéarité du produit scalaire

$$\begin{aligned} {}^tXAX &= \langle X, AX \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \langle X, X_j \rangle X_j, \sum_{i=1}^n \langle X, X_i \rangle \lambda_i X_i \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle X, X_j \rangle \langle X, X_i \rangle \underbrace{\langle X_j, X_i \rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle X, X_i \rangle^2. \end{aligned}$$

Si on note λ_{\min} (resp. λ_{\max}), la plus petite (resp. plus grande) valeur propre de A , on a pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\lambda_{\min} \leq \lambda_i \leq \lambda_{\max}$. À partir de

$$\|X\|^2 = \langle X, X \rangle = \sum_{i=1}^n \langle X, X_i \rangle^2,$$

on peut conclure :

$$\lambda_{\min} \|X\|^2 \leq {}^tXAX \leq \lambda_{\max} \|X\|^2.$$



Exercice 91.

Soit φ un endomorphisme symétrique de \mathbb{R}^n muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de φ ordonnées dans l'ordre décroissant et e_1, e_2 deux vecteurs propres unitaires (de norme 1) associés respectivement à λ_1 et λ_2 .

1. Justifier que pour tout vecteur x unitaire

$$\langle x, \varphi(x) \rangle \leq \lambda_1.$$

Que dire de x dans le cas d'égalité?

2. On note S_1 , l'ensemble des vecteurs unitaires de \mathbb{R}^n de la forme $(0, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Justifier qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha e_1 + \beta e_2 \in S_1$. En déduire

$$\max_{x \in S_1} \langle x, \varphi(x) \rangle \geq \lambda_2.$$

On pourra admettre l'existence du maximum.

» Solution p.495

(••)

1. Notons (e_1, e_2, \dots, e_n) une base orthonormée constituée de vecteurs propres de φ telle que pour tout indice i , $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$ (théorème spectral).

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ unitaire. Il existe $(x_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Comme le vecteur est unitaire

$$1 = \langle x, x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

De plus, par linéarité de φ et bilinéarité du produit scalaire

$$\langle x, \varphi(x) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j \varphi(e_j) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j e_j \right\rangle$$

D'où

$$\langle x, \varphi(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \lambda_j \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

Comme chaque réel λ_i est majoré par λ_1 , on a

$$\langle x, \varphi(x) \rangle \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \lambda_1.$$

Commentaires. Cette première question est la traduction avec les endomorphismes de l'encadrement de Rayleigh (exercice 80).

- Le cas d'égalité $\langle x, \varphi(x) \rangle = \lambda_1$ n'est possible que si pour tout indice j tel que $\lambda_j < \lambda_1$, alors $x_j = 0$. Dit autrement $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ où pour tout $i \in I$, e_i est un vecteur propre pour la valeur propre λ_1 . Comme les vecteurs e_i pour $i \in I$ appartiennent à l'espace propre $E_{\lambda_1}(\varphi)$ et que ce dernier est stable par combinaison linéaire, $x \in E_{\lambda_1}(\varphi)$. Finalement, il y a égalité si et seulement si x est un vecteur propre pour la valeur propre λ_1 .
2. Posons $e_1 = (e_1^1, e_1^2, e_1^3, \dots, e_1^n)$ et $e_2 = (e_2^1, e_2^2, e_2^3, \dots, e_2^n)$ de sorte que la première coordonnée de $\alpha e_1 + \beta e_2$ est nulle si et seulement si

$$\alpha e_1^1 + \beta e_2^1 = 0.$$

De plus, le vecteur $\alpha e_1 + \beta e_2$ est unitaire si et seulement si

$$1 = \|\alpha e_1 + \beta e_2\|^2 = \alpha^2 \|e_1\|^2 + \beta^2 \|e_2\|^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

puisque, par construction, e_1 et e_2 sont unitaires et orthogonaux.

Dès lors $\alpha e_1 + \beta e_2 \in S_1$ si et seulement si

$$\begin{cases} \alpha e_1^1 + \beta e_2^1 &= 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 &= 1. \end{cases}$$

→ Si $e_1^1 = 0$, alors $\alpha = 1$, $\beta = 0$ est solution.

→ Si $e_1^1 \neq 0$, alors le système devient

$$\begin{cases} \alpha &= -\beta e_2^1 / e_1^1 \\ \beta^2 \left((e_2^1 / e_1^1)^2 + 1 \right) &= 1. \end{cases}$$

On en déduit β puis α . Il y a bien au moins une solution.



Exercice 92.

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vérifiant

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), x \rangle \geq 0.$$

Montrer que si $\langle u(x), x \rangle = 0$ alors $u(x) = 0_E$.

» Solution p.497

D'après le théorème spectral, il existe (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée composée de vecteurs propres de u . Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les réels tels que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad u(e_i) = \lambda_i e_i.$$

La condition de l'énoncé impose que pour tout indice i , $\lambda_i \geq 0$.

→ Rédaction 1.

Soit s l'endomorphisme de E défini par

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad s(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$$

de sorte que $s^2 = u$. Précisons que s est aussi un endomorphisme symétrique. Ainsi pour $x \in E$

$$\langle u(x), x \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \|s(x)\|^2 = \langle s(x), s(x) \rangle = \langle s^2(x), x \rangle = 0.$$

D'où $s(x) = 0_E$ et $u(x) = s(s(x)) = 0_E$. Ce qui conclut.

→ Rédaction 2.

Soit $x \in E$. Notons $(x_i) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$\begin{aligned} \langle u(x), x \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i (e_i), \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \langle u(e_i), e_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle. \end{aligned}$$

Comme la famille $(e_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est orthonormée, on obtient

$$\langle u(x), x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

Quitte à réordonner, il existe $r \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que e_1, \dots, e_r soient tous les vecteurs propres de la base associés à la valeur propre 0. Ainsi

$$\langle u(x), x \rangle = \sum_{i=r+1}^n \lambda_i x_i^2 \quad \text{avec} \quad \lambda_i > 0.$$

Dès lors, $\langle u(x), x \rangle = 0$ si et seulement si $x_{r+1} = \dots = x_n = 0$ (somme à termes positifs). Dans ce cas

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^r x_i \underbrace{e_i}_{\in \text{Ker } u} \in \text{Ker } u.$$

Ce qui conclut.



Exercice 96.

Soit A une matrice symétrique non nulle. Montrer que

$$\frac{\text{Tr}(A)^2}{\text{Tr}(A^2)} \leq \text{rg}(A).$$

Préciser le cas d'égalité.

» Solution p.501

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique.
Notons que un calcul classique donne :

$$\operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [A]_{ij}^2 \neq 0$$

car A n'est pas la matrice nulle.

D'après le théorème spectral, il existe deux matrices : P inversible (même orthogonale) et $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

En distinguant la valeur propre 0, on peut supposer l'existence de $r \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket, \quad d_i \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket r+1; n \rrbracket, \quad d_i = 0.$$

Par invariance par similitude de la trace et le fait que $A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A) &= \operatorname{tr}(D) = \sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^r d_i \\ \operatorname{tr}(A^2) &= \operatorname{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^r d_i^2. \end{aligned}$$

Notons que $r = \operatorname{rg}(A)$ car par la formule du rang

$$n - r = \dim \operatorname{Ker} A = n - \operatorname{rg} A.$$

De plus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne dans le cadre d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

$$\forall x, y \in E, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

avec égalité si et seulement si la famille (x, y) est liée.

Dans notre cas, $E = \mathbb{R}^r$ muni du produit scalaire canonique et $x = (d_1, \dots, d_r)$, $y = (1, \dots, 1)$, on obtient

$$\left| \sum_{i=1}^r d_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n d_i^2 \right)^{1/2} \cdot r^{1/2}.$$

D'où $|\operatorname{tr}(A)| \leq \operatorname{tr}(A^2)^{1/2} \operatorname{rg}(A)^{1/2}$.

On obtient le résultat par passage au carré (les quantités sont positives).

Noter que le résultat vaut pour toute matrice A diagonalisable.

Le cas d'égalité est vérifié si et seulement si

$$\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket, \quad d_i = \lambda \quad \text{c'est-à-dire} \quad d_1 = d_2 = \dots = d_r.$$

Dans ce cas $D = \lambda \operatorname{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.

$$A = \lambda P_{\operatorname{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)} P^{-1}.$$

Comme $\lambda \neq 0$, A/λ est la matrice d'un projecteur (orthogonal car A symétrique).

Remarque. On retrouve le fait que pour un projecteur de matrice p dans une base

$$\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p).$$



Exercice 97.

Oral ESCP 2025
Félicie

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E un espace euclidien. Et soit u un endomorphisme. On note A la matrice associée à u dans la base \mathcal{B} . Donnez une condition nécessaire et suffisante sur A afin que pour tout x appartenant à E ,

$$\langle u(x), x \rangle = 0.$$

» Solution p.502

Soit $x \in E$. Notons $X = \text{mat}_{\mathcal{B}}(x)$. On a $AX = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u(x))$ et comme \mathcal{B} est une base orthonormée, on sait que

$$\langle u(x), x \rangle = {}^tXAX.$$

On décompose ensuite A sous la forme

$$A = S + T,$$

où S et T sont respectivement symétrique et antisymétrique. Alors

$${}^tXAX = {}^tXSX + {}^tXTX = {}^tXSX,$$

car

$${}^tXTX = {}^t({}^tXTX) = {}^tXT^tX = -{}^tXTX,$$

et donc ${}^tXTX = 0$. De plus, pour X vecteur propre de S associé à une valeur propre λ , on a $SX = \lambda X$, puis

$$0 = {}^tXSX = {}^tX(\lambda X) = \lambda \|X\|^2.$$

Ainsi $\lambda = 0$. Résumons : S est symétrique réelle donc diagonalisable, avec 0 comme unique valeur propre. La matrice S est donc nulle et $A = T$ est antisymétrique.



Exercice 98.

Oral ESCP 2025
Mathilde

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si $\text{rg}(A) = r$ alors $\text{rg}({}^tAA) = r$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Est-il possible que tAA soit inversible sans que $A{}^tA$ le soit ?

» Solution p.503

1. Justifions que

$$\text{Ker}(A) = \text{Ker}({}^tAA).$$

On a déjà l'inclusion

$$\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}({}^tAA).$$

Réciproquement, si $X \in \text{Ker}({}^tAA)$, alors, en considérant la norme canonique,

$$\|AX\|^2 = {}^t(AX)AX = {}^tX({}^tAA)X = {}^tX0_{p,1} = 0.$$

D'où $AX = 0_{n,1}$, puis $X \in \text{Ker}(A)$. L'égalité est prouvée. Ensuite, la formule du rang donne, avec ${}^tAA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$,

$$\text{rg}({}^tAA) = p - \dim \text{Ker}({}^tAA) = p - \dim \text{Ker}(A) = \text{rg}(A).$$

Pour rappel, dans le cas matriciel, si $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors

$$\text{rg}(B) + \dim \text{Ker}(B) = p,$$

où p est le nombre de colonnes de B . La réciproque est donc vraie.

2. Posons

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors

$${}^tAA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A{}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, il est bien possible que tAA soit inversible sans que $A{}^tA$ le soit.



Exercice 108.

Oral HEC
2025 Emeric

Montrer l'existence et calculer :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \left[\int_{-1}^1 (e^t - (a + bt))^2 dt \right].$$

» Solution p.511

Sur $E = \mathcal{C}^0([-1, 1])$, on considère le produit scalaire

$$(f, g) \in E^2 \mapsto \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt.$$

Par la caractérisation du projeté orthogonal par minimisation de la norme, la borne inférieure est un minimum atteint pour le projeté $p : t \mapsto at + b$ de $f : t \mapsto e^t$ sur $\mathbb{R}_1[x]$. Dans ce cas

$$\langle f - p, t \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle f - p, 1 \rangle = 0.$$

Par calcul, on trouve

$$a = \frac{e - e^{-1}}{2} \quad \text{et} \quad b = 3e^{-1}.$$

Puis

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 (e^t - (a + bt))^2 dt = 1 - 7e^{-2}.$$



————— Exercice 115. —————

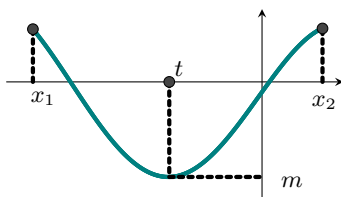
Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une application continue. Montrer que si tout réel possède un ou deux antécédents par f , alors f est une bijection.

» Solution p.520

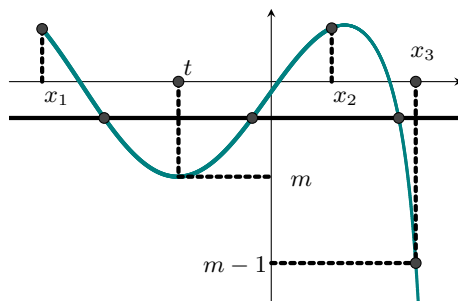
Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un réel avec deux antécédents. On suppose donc l'existence de x_1 et x_2 tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$. Par continuité de f sur le segment $[x_1, x_2]$, on peut définir

$$m = \min_{[x_1, x_2]} f \quad \text{et} \quad M = \max_{[x_1, x_2]} f.$$

Notons que $m \leq f(x_1) = f(x_2) \leq M$. Il n'est pas possible d'avoir $m = M$ sans contredire l'hypothèse sur le nombre d'antécédents. Traitons le cas $m < f(x_1)$, le cas $M > f(x_1)$ étant symétrique. Par définition du minimum, il existe $t \in]x_1, x_2[$ tel que $m = f(t)$.



Le réel $m - 1$ admet au moins un antécédent par f , notons x_3 un antécédent. Par symétrie, on peut supposer, comme dans la figure ci-après, que $x_2 < x_3$. On constate alors que tout réel strictement compris entre $]f(x_1), m[$ admet au moins trois antécédents : un dans $]x_1, t[$, un dans $]t, x_2[$ et un troisième dans $]x_2, x_3[$. C'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires. On a donc une contradiction, le réel ne peut avoir qu'au plus deux antécédents. Finalement, tout réel admet un unique antécédent par f , c'est la définition de la bijection de f .



« Le jury attend des candidats qu'ils sachent tracer rapidement l'allure du graphe d'une fonction ou soient capables d'illustrer un raisonnement par un petit schéma. » (Rapport de jury HEC 2023).



Exercice 120.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$F(x) = \int_0^x |\sin(t)| dt.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$F(x + n\pi) = nF(\pi) + F(x).$$

2. En déduire un équivalent de $F(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

» Solution p.525

1. Soient $x \in \mathbb{R}_*^+$, $n \in \mathbb{N}$. Par la relation de Chasles,

$$F(x + n\pi) = \int_0^{x+n\pi} |\sin(t)| dt = \int_0^{n\pi} |\sin(t)| dt + \int_{n\pi}^{x+n\pi} |\sin(t)| dt$$

Comme la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto |\sin(x)|$ est π -périodique

$$\int_{n\pi}^{x+n\pi} |\sin(t)| dt = \int_0^x |\sin(t)| dt = F(x)$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| dt = \int_0^\pi |\sin(t)| dt = F(\pi).$$

Par la relation de Chasles une nouvelle fois

$$\int_0^{n\pi} |\sin(t)| dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| dt = \sum_{k=0}^{n-1} F(\pi) = nF(\pi)$$

Ce qui conclut.

Remarque. On peut faire le calcul de $F(\pi)$.

$$F(\pi) = \int_0^\pi |\sin(t)| dt = \int_0^\pi \sin(t) dt = [-\cos(x)]_0^\pi = 2.$$

2. En particulier, pour $x = 0$, on a pour tout entier naturel n ,

$$F(n\pi) = nF(\pi) \quad (\bullet)$$

Notons aussi que, l'intégrande étant positive, F est une fonction croissante. Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$, on a

$$\left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor \leq \frac{x}{\pi} \leq \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor + 1$$

puis

$$\pi \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor \leq x \leq \pi \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor + \pi$$

et par croissance de F

$$F\left(\pi \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor\right) \leq F(x) \leq F\left(\pi \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor + \pi\right)$$

Avec (\bullet) ,

$$F(\pi) \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor \leq F(x) \leq F(\pi) \left(\left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor + 1 \right)$$

En multipliant par $\pi/x > 0$, il vient

$$\frac{\pi}{x} F(\pi) \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor \leq \frac{\pi F(x)}{x} \leq \frac{\pi}{x} F(\pi) \left(\left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor + 1 \right)$$

par encadrement

$$\frac{\pi F(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} F(\pi) \neq 0.$$

D'où

$$F(x) \underset{+\infty}{\sim} x \frac{F(\pi)}{\pi} = \frac{2}{\pi} x.$$



Exercice 140.

Transformation
d'Abel

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle et que la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est bornée.

1. a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n u_k v_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_n v_n - S_0 v_1.$$

b) En déduire la convergence de la série $\sum u_n v_n$.

2. Étudier la nature de la série $\sum (-1)^n / n$.

» Solution p.544

1.a) On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = S_k - S_{k-1}$. D'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k v_k &= \sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1}) v_k \\ &= \sum_{k=1}^n S_k v_k - \sum_{k=1}^n S_{k-1} v_k \\ &= \sum_{k=1}^n S_k v_k - \sum_{k=0}^{n-1} S_k v_{k+1} \quad (k-1 \leftarrow k) \\ \sum_{k=1}^n u_k v_k &= \sum_{k=1}^{n-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_n v_n - S_0 v_1. \end{aligned}$$

1.b) Notons dans la suite M un majorant de la suite (S_n) .

→ On a $|S_n v_n| \leq M v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ par hypothèse.

→ Comme (v_n) est décroissante $v_k - v_{k+1} \geq 0$ donc :

$$\sum_{k=1}^{n-1} |S_k (v_k - v_{k+1})| \leq \sum_{k=1}^{n-1} M (v_k - v_{k+1}) = M (v_0 - v_n) \leq M v_0.$$

La suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=1}^n |S_k (v_k - v_{k+1})| \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc majorée. Comme les termes de la sommes sont positifs, elle est aussi croissante. D'après le théorème de convergence monotone, la suite des sommes partielles converge. Dit autrement, la série $\sum |S_k (v_k - v_{k+1})|$ converge. Cette convergence absolue entraîne la convergence de $\sum S_k (v_k - v_{k+1})$.

Ces deux points permettent d'affirmer que la suite de terme général

$$\sum_{k=1}^n u_k v_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_n v_n - S_0 v_1$$

admet une limite finie. Finalement, $\sum u_k v_k$ converge.

2. On applique le résultat précédent avec les suites u, v définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n \quad \text{et} \quad v_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Il reste à vérifier que ces suites satisfont aux hypothèses de la 1.

→ $v_n = 1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $v_{n+1} - v_n = 1/(n+1) - 1/n > 0$.

→ À l'aide des résultats sur les sommes géométriques

$$\left| \sum_{k=1}^n u_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| = \left| \frac{1 - (-1)^n}{1 - (-1)} \right| \leq 1.$$


Concluons : la série $\sum (-1)^n/n$ converge donc bien.

Commentaires. La réécriture de la question 1 s'appelle une transformation d'Abel. Elle est l'analogie discret d'une intégration par parties. En effet la « dérivée » d'une suite $(v_n)_n$ est la suite de terme général $(v_{n+1} - v_n)/(n+1 - n) = v_{n+1} - v_n$ et la « primitive » d'une suite $(u_n)_n$ est la suite $\left(\sum_{k=1}^n u_k \right)_n$.



On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{n+1} e^{-u_n}.$$

1.  Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.
2. Justifier qu'à partir d'un certain rang, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

» Solution p.549

1. Par récurrence immédiate, on montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive. De plus, pour tout entier n avec $n \geq 2$

$$0 \leq u_n = \frac{1}{n} e^{-u_{n-1}} \leq \frac{1}{n}.$$

Par encadrement

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

et par continuité de la fonction exponentielle en 0

$$e^{-u_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-0} = 1.$$

D'où

$$\frac{u_n}{1/n} = e^{-u_{n-1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

C'est-à-dire

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs et le critère de Riemann, la série $\sum u_n$ diverge.

2. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

de sorte que la relation de récurrence sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ devient

$$v_{n+1} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} e^{-(v_n + \frac{1}{n})} = \frac{1}{n+1} e^{-v_n} \cdot e^{-1/n}$$

Comme $u_n \sim \frac{1}{n}$, $v_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et avec le développement limité de la fonction exponentielle en 0 ($1/n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$),

$$\begin{aligned} v_{n+1} + \frac{1}{n+1} &= \frac{1}{n+1} \left(1 - o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Il vient

$$v_{n+1} = -\frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

D'où

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n-1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ensuite

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= v_{n+1} + \frac{1}{n+1} - v_n - \frac{1}{n} \\ &= v_{n+1} - v_n - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ u_{n+1} - u_n &\sim -\frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Or $-1/n^2 < 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on sait alors qu'à partir d'un certain rang N

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N, \quad u_{n+1} - u_n \leq 0.$$

Ce qui conclut.



Exercice 147.

Oral ESCP
2025 (Pérette/Alexis)

Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où c_n désigne le nombre de chiffres de l'entier n .

1. Justifier la convergence de $\sum \frac{c_n}{n(n+1)}$
2. Calculer la somme de cette série.

» Solution p.554

1. Le plus petit nombre contenant c chiffres est 10^{c-1} . D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 10^{c_n-1} \leq n$$

puis
$$\ln(10^{c_n-1}) = (c_n - 1) \ln(10) \leq \ln(n)$$

et
$$c_n \leq 1 + \frac{\ln(n)}{\ln(10)}$$

On en déduit l'encadrement du terme général

$$0 \leq \frac{c_n}{n(n+1)} \leq \frac{1 + \ln(n)/\ln(10)}{n(n+1)}.$$

Par les croissances comparées (et par encadrement), on obtient

$$\frac{c_n}{n(n+1)} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

La série de Riemann $\sum 1/n^{3/2}$ est à termes positifs et convergente. Par le critère de négligeabilité, la série $\sum c_n/(n(n+1))$ converge.

2. Posons pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p = 10^p - 1$ de sorte que tous les entiers entre $a_p + 1$ et a_{p+1} contiennent exactement $p + 1$ chiffres. Posons aussi

$$S_p = \sum_{n=1}^{a_p} \frac{c_n}{n(n+1)}.$$

Comme la série est convergente, on a une suite extraite convergent vers la même limite

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} S_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n(n+1)}.$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} S_{k+1} - S_k &= \sum_{n=a_k+1}^{a_{k+1}} \frac{c_n}{n(n+1)} = \sum_{n=a_k+1}^{a_{k+1}} \frac{(k+1)}{n(n+1)} \\ &= (k+1) \sum_{n=a_k+1}^{a_{k+1}} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= (k+1) \sum_{n=a_k+1}^{a_{k+1}} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= (k+1) \left(\frac{1}{a_k+1} - \frac{1}{a_{k+1}+1} \right) \quad \text{télescopage} \\ &= (k+1) \left(\frac{1}{10^k} - \frac{1}{10^{k+1}} \right) \\ S_{k+1} - S_k &= \frac{9(k+1)}{10^{k+1}} \end{aligned}$$

puis pour $p \in \mathbb{N}$, par télescopage une nouvelle fois et à l'aide des résultats sur les séries géométriques dérivées

$$\begin{aligned} S_p &= S_0 + \sum_{k=0}^{p-1} S_{k+1} - S_k = S_0 + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{9(k+1)}{10^{k+1}} \\ &= 0 + \frac{9}{10} \sum_{i=1}^p i q^{i-1} \quad \text{où } q = 1/10 \\ &\xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \frac{9}{10} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{10}\right)^2} = \frac{10}{9}. \end{aligned}$$



Exercice 171.

Oral 2023

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe \mathcal{C}^1 avec $f(0) = 0$.

Montrer de deux manières différentes que l'intégrale $\int_0^1 f(x)/(x^{3/2}) dx$ est convergente.

» Solution p.581

- *Méthode 1. Le théorème des accroissements finis.*

Soit M un majorant de $|f'|$ sur $[0; 1]$. M est bien défini par continuité de $|f'|$ sur le segment $[0; 1]$. Pour tout $x \in [0; 1]$

$$|f(x) - f(0)| \leq M|x - 0|$$

Ainsi $|f(x)| \leq M|x|$, puis

$$\left| \frac{f(x)}{x^{3/2}} \right| \leq \frac{M}{x^{1/2}}$$

Par le critère de Riemann $\int_0^1 M/x^{1/2} dx$ est convergente, on en déduit ensuite par le critère de majoration que $\int_0^1 f(x)/x^{3/2} dx$ est absolument convergente, donc convergente.

- *Méthode 2. Intégration par parties.*

Soit $\varepsilon \in]0; 1]$. Les fonctions considérées sont \mathcal{C}^1 sur $[\varepsilon; 1]$ et

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{f(x)}{x^{3/2}} dx = \left[-2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \right]_{\varepsilon}^1 + 2 \int_{\varepsilon}^1 \frac{f'(x)}{\sqrt{x}} dx.$$

Comme f est de classe \mathcal{C}^1 , le développement à l'ordre 1 en 0 existe et

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + o_0(x)$$

avec $f(0) = 0$, il vient

$$\frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}f'(0) + o_0(\sqrt{x}) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.$$

on en déduit la convergence du crochet. De plus, en reprenant la définition de M , on a

$$\frac{|f'(x)|}{\sqrt{x}} \leq \frac{M}{\sqrt{x}}.$$

Comme précédemment, on a prouvé la convergence absolue de $\int_0^1 f'(x)/\sqrt{x} dx$ et finalement la convergence de $\int_0^1 f(x)/x^{3/2} dx$.



Exercice 187.

Soient $a \in \mathbb{R}_*^+$ et f définie sur $(\mathbb{R}_*^+)^2$ par $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{a}{xy}$.

1. Déterminer les extrema locaux de f .
2. Justifier que f admet un minimum global et préciser sa valeur.

On pourra utiliser l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}.$$

» Solution p.600

1. La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 en tant que fonction rationnelle

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x, y) &= 2x - \frac{a}{x^2 y} & \partial_2 f(x, y) &= 2y - \frac{a}{y^2 x} \quad (\text{symétrie}) \\ \partial_1^2 f(x, y) &= 2 + \frac{2a}{x^3 y} & \partial_2^2 f(x, y) &= 2 + \frac{2a}{y^3 x} \\ \partial_{12}^2 f(x, y) &= \partial_{21}^2 f(x, y) & &= 2 + \frac{a}{x^2 y^2}.\end{aligned}$$

- Étude du ou des points critiques.

(x, y) est point critique si et seulement si

$$\begin{aligned}\begin{cases} 2x - a/x^2 y = 0 \\ 2y - a/y^2 x = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2x^3 y = a \\ 2y^3 x = a \end{cases} \\ \iff \begin{cases} 2x^3 y = a \\ 4y^4 x^4 = a^2 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2x^3 y = a \\ 2x^2 y^2 = a \end{cases} \\ \iff \begin{cases} 2x^3 y = a \\ 2x^2 y^2 = 2x^3 y \end{cases} &\iff \begin{cases} 2x^3 y = a \\ y = x \end{cases} \\ \iff \begin{cases} 2x^4 = a \\ y = x \end{cases} &\end{aligned}$$

on obtient un unique point critique avec

$$\left((a/2)^{1/4}, (a/2)^{1/4} \right).$$

La matrice hessienne est

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 + 2a/(x^3 y) & 2 + 2a/(x^3 y) \\ 2 + a/(x^2 y^2) & 2 + a/(x^2 y^2) \end{bmatrix}.$$

Au niveau de point critique

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

On vérifie que que $\nabla^2 g$ est symétrique avec deux valeurs propres positives, on a un minimum local (et pas de maximum).

2. On a



$$\frac{f(x, y)}{4} = \frac{x^2 + y^2 + \frac{a}{2xy} + \frac{a}{2xy}}{4} \geq \sqrt[4]{x^2 y^2 \cdot \frac{a}{2xy} \cdot \frac{a}{2xy}} = \frac{a}{2}$$



Exercice 205.

Soient A et B deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes avec A de loi de Poisson de paramètre λ et B de loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$. On définit de plus la matrice aléatoire

$$M(A, B) = \begin{bmatrix} 1 & A \\ 1 & B \end{bmatrix}.$$

1.  Calculer la probabilité de l'évènement « M(A, B) est inversible ».
2.  Calculer la probabilité de « M(A, B) est diagonalisable ».

» Solution p.618

1. La matrice $M(A, B)$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul si et seulement si $A \neq B$. Or par passage à l'événement contraire

$$\mathbf{P}(A \neq B) = 1 - \mathbf{P}(A = B).$$

D'après la formule des probabilités totales avec $([A = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ comme système complet d'événements, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A = B) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([A = B] \cap [A = k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([B = k] \cap [A = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(A = k) \mathbf{P}(B = k) \quad \text{indépendance} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\ &= \frac{p}{q} e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(q\lambda)^k}{k!} \\ \mathbf{P}(A = B) &= \frac{p}{q} e^{-\lambda} (e^{q\lambda} - 1) = \frac{p}{q} (e^{-\lambda(1-q)} - e^{-\lambda}). \end{aligned}$$

Finalement

$$\mathbf{P}(A \neq B) = 1 - \frac{p}{q} (e^{-\lambda p} - e^{-\lambda}).$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \in \text{Sp}(M(a, b)) \iff \det(M(a, b) - \lambda I_2) = 0 \iff \lambda^2 - (1+b)\lambda + b - a = 0.$$

Ce trinôme en λ a pour discriminant $(1+b)^2 - 4(b-a) = (b-1)^2 + 4a$.

Comme $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, deux cas se produisent.

→ Ce discriminant est nul si et seulement si $b = 1$ et $a = 0$. Dans ce cas, $M(0, 1)$ possède une unique valeur propre. Elle n'est donc pas diagonalisable car $M(0, 1)$ n'est pas scalaire.

→ Sinon, ce discriminant est strictement positif, donc $M(a, b)$ possède deux valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable.

Finalement, par indépendance de A et B

$$\mathbf{P}(M(A, B) \text{ diagonalisable}) = 1 - \mathbf{P}([B = 1] \cap [A = 0]) = 1 - pe^{-\lambda}.$$



Exercice 215.

Soient X_1, X_2, \dots, X_n , n variables aléatoires mutuellement indépendantes toutes de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On définit la matrice aléatoire $M = (M_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad M_{i,j} = X_i X_j.$$

1. Donner la loi de $\text{rg}(M)$ et $\text{Tr}(M)$.
2. Quelle est la probabilité que M soit la matrice d'un projecteur ?

» Solution p.628

1. • Si on note C la colonne $\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$ alors :

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad C_j = X_j C.$$

où C_j désigne la j -ème colonne de M . Donc $\text{Im}M = \text{Vect}(C)$.

→ Si $C \neq 0_{n,1}$, alors M est de rang 1.

→ Si $C = 0_{n,1}$, M est de rang 0.

Dès lors $\text{rg}(M)$ est à valeurs dans $\{0; 1\}$ et

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\text{rg}(M) = 0) &= \mathbf{P}(C = 0) = \mathbf{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] \cap \dots \cap [X_n = 0]) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i = 0) \quad \text{indépendance} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(\text{rg}(M) = 0) = (1 - p)^n \quad \text{égalité en loi}$$

puis $\mathbf{P}(\text{rg}(M) = 1) = 1 - \mathbf{P}(\text{rg}(M) = 0) = 1 - (1 - p)^n$.

Le rang suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1 - p)^n$.

• Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, X_i est à valeurs dans $\{0; 1\}$, on a $X_i^2 = X_i$. Ainsi

$$\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Les variables $(X_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ sont indépendantes, on sait alors que $\text{Tr}(M)$ suit une loi binomiale de paramètres n, p .

2. Un exercice classique permet de montrer que si M est la matrice d'un projecteur alors

$$\text{Tr}(M) = \text{rg}(M).$$

Comme le rang de M n'excède pas 1, dès que $\text{Tr}(M) \geq 2$, M ne peut être la matrice d'un projecteur.

→ Si $\text{Tr}(M) = 1$, une seule des variables X_i prend la valeur 1 et M est alors diagonale avec un unique « 1 » sur la diagonale. La matrice M est une matrice de projecteur.

→ Si $\text{Tr}(M) = 0$, M est la matrice nulle, c'est la matrice d'un projecteur.

Finalement la probabilité recherchée est :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\text{Tr}(M) \leq 1) &= \mathbf{P}(\text{Tr}(M) = 0) + \mathbf{P}(\text{Tr}(M) = 1) \\ &= (1 - p)^n + np(1 - p)^{n-1}. \end{aligned}$$



Exercice 227.

Oral HEC 2025
Pérette

Montrer que, pour tous événements A et B, on a

$$|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

» Solution p.640

On pose $X = \mathbf{1}_A$ et $Y = \mathbf{1}_B$, de sorte que

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{E}(X), \quad \mathbf{P}(B) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_B) = \mathbf{E}(Y)$$

et

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{A \cap B}) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) = \mathbf{E}(XY).$$

On cherche donc à majorer

$$|\mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)| = |\text{Cov}(X, Y)|.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\mathbf{V}(X)}\sqrt{\mathbf{V}(Y)}.$$

De plus, pour $X \leftrightarrow \mathcal{B}(p)$,

$$\mathbf{V}(X) = p(1-p) \leq \frac{1}{4}.$$

De même pour Y , et donc

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$



Exercice 228.

Oral ESCP 2025
Félicie

Soit la suite des (A_n) des évènements 2 à 2 disjoints, montrer que

$$\mathbf{P}(A_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Donner un exemple de suite d'évènements 2 à 2 disjoints qui ne soient pas un système complet d'évènements.

» Solution p.641

Dans ce cas, on sait par la propriété de σ -additivité qu'on a convergence de la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ avec :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

La convergence de la série suffit pour avoir $\mathbf{P}(A_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Notons que Ω est nécessairement un ensemble infini sinon on ne pourrait construire une suite d'événements 2 à 2 disjoints. Soit $\tilde{\omega} \in \Omega$ fixé et $(\omega_n)_n$ une suite d'éléments de $\Omega \setminus \{\tilde{\omega}\}$ tels que $\omega_n \neq \omega_m$ dès que $n \neq m$. Dans ce cas, on peut choisir

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n = \{\omega_n\}.$$



Exercice 237.

Soient U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$ et $q \in]0, 1[$. Reconnaitre la loi de la variable aléatoire définie par

$$X = 1 + \left\lfloor \frac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor.$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

» Solution p.650

On a $U(\Omega) =]0, 1[$ donc $(\ln U / \ln q)(\Omega) =]0, +\infty[$. D'où

$$\left\lfloor \frac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor (\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad X(\Omega) = \mathbb{N}^*.$$

La variable X est donc une variable discrète. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = n) &= \mathbf{P}\left(1 + \left\lfloor \frac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor = n\right) \\ &= \mathbf{P}\left(n - 1 \leq \frac{\ln U}{\ln q} \leq n\right) \quad \text{définition de la partie entière} \\ &= \mathbf{P}(n \ln q \leq \ln U \leq (n - 1) \ln q) \quad \text{car } \ln q < 0 \\ &= \mathbf{P}(q^n \leq U \leq q^{n-1}) \quad \text{par stricte croissance de exp.} \\ &= F_U(q^{n-1}) - F_U(\leq q^n) \\ &= q^{n-1} - q^n \quad \text{car } U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, 1]) \text{ et } q^{n-1}, q^n \in [0; 1] \\ \mathbf{P}(X = n) &= q^{n-1}(1 - q). \end{aligned}$$

On reconnaît finalement que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - q)$.



Exercice 267.

Oral HEC
2025 (Sylvain)

Soit X une variable aléatoire à densité dont une densité f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et vérifie

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2.$$

Montrer que X suit une loi normale, dont on précisera les paramètres.

» Solution p.674

En prenant $y = 0$ dans la relation, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)^2 = f(x)^2 f(0)^2.$$

Comme f est une densité, elle n'est pas identiquement nulle, donc $f(0)^2 = 1$, puis $f(0) = 1$ car f est positive (à densité). Vérifions que f est strictement positive. En prenant ensuite $y = x$, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x)^4 \quad \text{puis} \quad f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)^4.$$

S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$, on a par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 0.$$

Puis par passage à la limite avec f continue, $f(0) = 0$. Absurde.

On peut donc poser

$$g = \ln f.$$

Alors g est de classe \mathcal{C}^2 car f l'est par hypothèse et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, \quad g(x+y) + g(x-y) = 2g(x) + 2g(y).$$

En dérivant deux fois par rapport à y , on obtient

$$g''(x+y) + g''(x-y) = 2g''(y).$$

En prenant $y = 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2g''(x) = 2g''(0),$$

donc g'' est constante. Ainsi $g \in \mathbb{R}_2[x]$, il existe a, b et c , trois réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = ax^2 + bx + c$. Comme $f(0) = 1$, on a $g(0) = 0$, donc $c = 0$.

En prenant $x = 0$ dans l'équation initiale :

$$f(y)f(-y) = f(y)^2,$$

et comme $f(y) > 0$, on obtient

$$f(-y) = f(y).$$

Donc g est paire, d'où $b = 0$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{ax^2}.$$

Comme f est une densité sur \mathbb{R} , on doit avoir $a < 0$. On pose alors $a = -\frac{1}{2\sigma^2}$ avec $\sigma > 0$. Ainsi $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. Comme f est une densité,

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma\sqrt{2\pi}.$$

Donc $\sigma\sqrt{2\pi} = 1$, d'où $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-\pi x^2}.$$

Donc X suit une loi normale :

$$X \leftrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2\pi}\right).$$



Exercice 271.

Soient X_1, X_2, \dots, X_n , n variables aléatoires admettant une même variance σ^2 . On définit la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad M_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j).$$

1. Justifier que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t X M X \geq 0$.
2. On suppose que pour tous $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ avec $i \neq j$, $\text{Cov}(X_i, X_j) = \alpha$. En déduire que

$$\alpha \geq -\frac{\sigma^2}{n-1}.$$

» Solution p.680

1. Posons ${}^tX = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ de sorte que

$$\begin{aligned} {}^tXMX &= \sum_{i,j \in [1;n]} x_i M_{ij} x_j = \sum_{i,j \in [1;n]} x_i x_j \operatorname{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \operatorname{Cov} \left(\sum_{i=1}^n x_i X_i, \sum_{j=1}^n x_j X_j \right) \end{aligned}$$

par bilinéarité de la covariance. Si on pose $Z = \sum_{i=1}^n x_i X_i$, on a donc

$${}^tXMX = \operatorname{Var}(Z) \geq 0.$$

2. Dans le cas particulier où $X = {}^t[1, 1, \dots, 1]$, on a

$$\begin{aligned} {}^tXMX &= \sum_{i,j \in [1;n]} M_{ij} = \sum_{i,j \in [1;n]} \operatorname{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \operatorname{Cov}(X_i, X_i) + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \operatorname{Cov}(X_i, X_j) \\ &= n\sigma^2 + (n^2 - n)\alpha. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède ${}^tXMX \geq 0$ et $n\sigma^2 + n(n-1)\alpha \geq 0$. On en déduit le résultat.

Commentaires. La matrice M s'appelle la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_n) . Cette notion n'est plus au programme depuis 2014. Il est intéressant de savoir refaire la question 1.



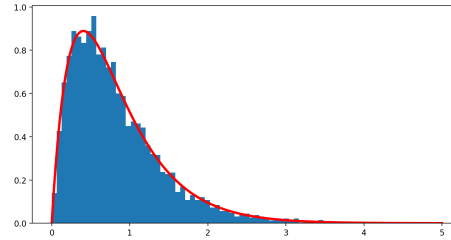
Exercice 286.

Proposer une expression de la fonction dont la courbe représentative est tracée en rouge.

On rappelle que la commande `np.sort()` prend en argument une matrice ligne et renvoie la même matrice ligne mais avec les coefficients dans l'ordre croissant.

```
m=10000
Ech=np.zeros(m)
for i in range(m):
    A=np.sort(rd.exponential(1,3))
    Ech[i]=A[1]

classe=np.linspace(0,5,80)
plt.hist(Ech,classe,density=True)
plt.show()
```



» Solution p.699

Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et de lois exponentielle de paramètre 1. Notons Y_1, Y_2, Y_3 les trois variables définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ par : pour tout $\omega \in \Omega$

$$\{X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega)\} = \{Y_1(\omega), Y_2(\omega), Y_3(\omega)\}$$

et $Y_1(\omega) \leq Y_2(\omega) \leq Y_3(\omega)$.

La courbe en rouge serait une densité continue sur \mathbb{R}_+^* de Y_2 . Justifions donc que Y_2 est une variable à densité et déterminons une densité.

Notons F , la fonction de répartition de $\varepsilon(1)$ et f , une densité continue sur \mathbb{R}^* .

Soit $x \in \mathbb{R}$. Avec le système complet d'événements

$$\begin{aligned} [X_2 \leq x] \cap [X_3 \leq x], & \quad [X_2 \leq x] \cap [X_3 > x] \\ [X_2 > x] \cap [X_3 \leq x], & \quad [X_2 > x] \cap [X_3 > x]. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_2 \leq x) &= \mathbf{P}(Y_2 \leq x, X_2 \leq x, X_3 \leq x) \\ &+ \mathbf{P}(Y_2 \leq x, X_2 \leq x, X_3 > x) \\ &+ \mathbf{P}(Y_2 \leq x, X_2 > x, X_3 \leq x) \\ &+ \mathbf{P}(Y_2 \leq x, X_2 > x, X_3 > x). \end{aligned}$$

L'événement $[Y_2 \leq x]$ correspond à l'événement : "au moins deux variables X_i sur les trois prennent une valeur inférieure à x ". D'où

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_2 \leq x) &= \mathbf{P}(X_2 \leq x, X_3 \leq x) \\ &+ \mathbf{P}(X_1 \leq x, X_2 \leq x, X_3 > x) \\ &+ \mathbf{P}(X_1 \leq x, X_2 > x, X_3 \leq x) \\ &+ \mathbf{P}(\emptyset). \end{aligned}$$

Par indépendance des variables

$$\mathbf{P}(Y_2 \leq x) = F(x)^2 + 2F(x)^2(1 - F(x)) = F(x)^2(3 - 2F(x)).$$

Par produit, la fonction de répartition de Y_2 est continue sur \mathbb{R} et \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* , Y_2 est une variable à densité et une densité est

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 2f(x)F(x)(3 - 2F(x)) + F(x)^2(-2f(x)) \\ &= 2f(x)F(x)(3 - 3F(x)) = 6f(x)F(x)(1 - F(x)). \end{aligned}$$

Si on explicite : $f_2(x) = 0$ pour $x < 0$ et pour $x \geq 0$

$$f_2(x) = 6e^{-2x}(1 - e^{-x}).$$



Exercice 289.

Oral ESCP
2025 (Emeric)

Les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On dit qu'une variable aléatoire X est symétrique si X est discrète et si X et $-X$ sont égales en loi.

1. Soit X symétrique. Montrer que $\mathbf{E}(\cos(X))$ et $\mathbf{E}(\sin(X))$ existent et calculer $\mathbf{E}(\sin(X))$.
2. Soient X et Y symétriques et indépendantes. Montrer que $X+Y$ est symétrique et que

$$\mathbf{E}(\cos(X + Y)) = \mathbf{E}(\cos(X))\mathbf{E}(\cos(Y)).$$

» Solution p.701

1. On a $|\cos(X)| \leq 1$ et $|\sin(X)| \leq 1$. Par le théorème de domination, les espérances $\mathbf{E}(\cos(X))$ et $\mathbf{E}(\sin(X))$ existent. Comme la fonction sinus est continue et $X, -X$ ont même loi, les variables $\sin(-X)$ et $\sin(X)$ ont même loi. En particulier, elles ont même espérance. Il vient ensuite par imparité de la fonction sinus et linéarité de l'espérance

$$\mathbf{E}(\sin(X)) = \mathbf{E}(\sin(-X)) = \mathbf{E}(-\sin(X)) = -\mathbf{E}(\sin(X)).$$

D'où

$$\mathbf{E}(\sin(X)) = 0.$$

2. Justifions que les couples (X, Y) et $(-X, -Y)$ ont même loi. Pour $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, on a par indépendance des variables X, Y et les égalités en loi entre $X, -X$ et $Y, -Y$

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(t_1, t_2) &= \mathbf{P}([X \leq t_1] \cap [Y \leq t_2]) \\ &= \mathbf{P}(X \leq t_1) \mathbf{P}(Y \leq t_2) \\ &= \mathbf{P}(-X \leq t_1) \mathbf{P}(-Y \leq t_2) \\ &= \mathbf{P}([-X \leq t_1] \cap [-Y \leq t_2]) \\ F_{(X,Y)}(t_1, t_2) &= F_{(-X,-Y)}(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Ensuite, la fonction $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + y$ est continue sur \mathbb{R}^2 donc les variables $g(X, Y)$ et $g(-X, -Y)$ ont même loi. On en déduit que $X + Y$ est symétrique. Ensuite

$$\mathbf{E}(\cos(X + Y)) = \mathbf{E}(\cos(X) \cos(Y)) + \mathbf{E}(\sin(X) \sin(Y)).$$

Par le lemme des coalitions, $\cos(X)$ et $\cos(Y)$ sont indépendantes et $\sin(X), \sin(Y)$ aussi. D'où

$$\mathbf{E}(\cos(X) \cos(Y)) = \mathbf{E}(\cos(X)) \mathbf{E}(\cos(Y)) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(\sin(X) \sin(Y)) = \mathbf{E}(\sin(X)) \mathbf{E}(\sin(Y)) = 0.$$

Le résultat s'en déduit.



Exercice 290.

Oral ESCP
2025 (Clémence)

On se place dans \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique.

Soient $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire constitué de variables mutuellement indépendantes et de même loi. On pose aussi $u = (1, \dots, 1)$.

1. a) Donner la probabilité que X soit orthogonal à u dans le cas où $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
b) Même question mais avec $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
2. Soit H un hyperplan de \mathbb{R}^n . On suppose maintenant que les X_i suivent des lois normales. Quelle est la probabilité que X appartienne à H ?

» Solution p.702

1.a) On a

$$\mathbf{P}(X \perp u) = \mathbf{P}(\langle X, u \rangle = 0) = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i = 0\right).$$

Or les X_i étant mutuellement indépendantes et de loi $\mathcal{B}(p)$, on sait que

$$\sum_{i=1}^n X_i \leftrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

Puis

$$\mathbf{P}(X \perp u) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} = (1-p)^n.$$

1.b) Dans ce cas, on sait que la variable $\sum_{i=1}^n X_i$ est à densité. En particulier, la variable somme est à densité et

$$\mathbf{P}(X \perp u) = 0.$$

2. Soit $u \in \mathbb{H}^\perp$. Ainsi, pour u non nul,

$$\mathbf{P}(X \in \mathbb{H}) = \mathbf{P}(X \perp u) = \mathbf{P}(\langle X, u \rangle = 0).$$

Si on note $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\langle X, u \rangle = \sum_{i=1}^n u_i X_i.$$

Comme u est non nul, les X_i mutuellement indépendantes et de loi normale, la variable $\sum_{i=1}^n u_i X_i$ suit une loi normale. Elle est donc à densité, et on retrouve

$$\mathbf{P}(X \in \mathbb{H}) = 0.$$



Exercice 291.

Oral HEC
2025 (Raphaël)

Soient $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables mutuellement indépendantes telles que

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X_i = 1) &= \mathbf{P}(X_i = -1) \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n &= \sum_{i=1}^n X_i. \end{aligned}$$

Soient $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer que $\sin(tS_n)$ et $\cos(tS_n)$ admettent des espérances.
2. Les calculer.

» Solution p.703

1. Les variables sont bornées. Elles admettent donc une espérance.

2. On raisonne par récurrence sur n .

→ *Initialisation.* Pour $n = 1$, on a par la formule de transfert

$$\mathbf{E}(\cos(tX_1)) = \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{2} \cos(-t) = \cos(t),$$

et
$$\mathbf{E}(\sin(tX_1)) = \frac{1}{2} \sin(t) + \frac{1}{2} \sin(-t) = 0.$$

→ *Hérédité.* Supposons que

$$\mathbf{E}(\cos(tS_n)) = (\cos t)^n \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(\sin(tS_n)) = 0.$$

Comme $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, on a

$$\cos(tS_{n+1}) = \cos(tS_n + tX_{n+1}) \quad \text{puis} \quad \cos(tS_{n+1}) = \cos(tS_n) \cos(tX_{n+1}) - \sin(tS_n) \sin(tX_{n+1}).$$

Par indépendance de S_n et X_{n+1} (lemme des coalitions), on obtient

$$\mathbf{E}(\cos(tS_{n+1})) = \mathbf{E}(\cos(tS_n))\mathbf{E}(\cos(tX_{n+1})) - \mathbf{E}(\sin(tS_n))\mathbf{E}(\sin(tX_{n+1})).$$

Or
$$\mathbf{E}(\cos(tX_{n+1})) = \cos t \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(\sin(tX_{n+1})) = 0.$$

Ainsi
$$\mathbf{E}(\cos(tS_{n+1})) = (\cos t)^n \cos t = (\cos t)^{n+1}.$$

De même, $\sin(tS_{n+1}) = \sin(tS_n + tX_{n+1})$ donc

$$\sin(tS_{n+1}) = \sin(tS_n) \cos(tX_{n+1}) + \cos(tS_n) \sin(tX_{n+1}).$$

Par indépendance,

$$\mathbf{E}(\sin(tS_{n+1})) = \mathbf{E}(\sin(tS_n))\mathbf{E}(\cos(tX_{n+1})) + \mathbf{E}(\cos(tS_n))\mathbf{E}(\sin(tX_{n+1})).$$

Donc $\mathbf{E}(\sin(tS_{n+1})) = 0$.

→ *Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{E}(\cos(tS_n)) = (\cos t)^n \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(\sin(tS_n)) = 0.$$



Exercice 292.

Oral ESCP
2025 (Noah)

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ indépendantes et de même loi avec X_1 admettant un moment d'ordre 2. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^k X_i \quad \text{et} \quad p = \mathbf{E}(|X_1|).$$

On suppose que $p < 1$.

1. Écrire un programme python qui simule S_n dans le cas particulier où $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(]0; 1[)$.
2. Justifier que

$$\forall t \in \mathbb{R}_*^+, \quad \mathbf{P}(S_n \geq t) \leq \frac{p}{t(1-p)}.$$

3. Pour aller plus loin. Donner la loi de S_n si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Justifier que si X_1 admet un moment d'ordre 2, la suite de terme général $\mathbf{V}(S_n)$ est bornée.

» Solution p.675

- 1.
2. Par inégalité triangulaire

$$|S_n| \leq \sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^k |X_i|.$$

Ensuite par croissance de l'espérance

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(|S_n|) &\leq \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^k |X_i|\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^k |X_i|\right) && \text{(linéarité de l'espérance)} \\ &= \sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^k \mathbf{E}(X_i) && \text{(indépendance)} \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(X_1)^k = \sum_{k=1}^n p^k && \text{(égalité en loi)} \\ \mathbf{E}(|S_n|) &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} p^k = \frac{p}{1-p} && \text{(somme géométrique)}. \end{aligned}$$

Ensuite, avec l'inégalité de Markov appliquée à la variable positive $|S_n|$

$$\mathbf{P}(S_n \geq t) \leq \mathbf{P}(|S_n| \geq t) \leq \frac{\mathbf{E}(|S_n|)}{t} \leq \frac{p}{t(1-p)}.$$



Exercice 293.

Oral ESCP
2025 (Sylvain)

Soient $(X_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre 1. On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

1. Montrer que e^{-X_i} admet une espérance et la calculer.
2. Montrer que $\mathbf{P}(S_n \leq \ln(n)) \leq \frac{n}{2^n}$.

» Solution p.676

1. Comme X_i est à valeurs dans \mathbb{R}_+ , e^{-X_i} est à valeurs dans $[0, 1]$. La variable est bornée, elle admet une espérance. La formule de transfert, qui aurait aussi pu prouver l'existence de l'espérance, donne

$$\mathbf{E}(e^{-X_i}) = \int_0^{+\infty} e^{-t} f_{X_i}(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}.$$

2. Notons que l'indépendance des X_i impose

$$\mathbf{E}(e^{-S_n}) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}(e^{-X_i}) = \frac{1}{2^n}.$$

Appliquons maintenant l'inégalité de Markov à la variable positive $\exp(-S_n)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_n \leq \ln(n)) &= \mathbf{P}(\exp(-S_n) \geq \exp(-\ln(n))) \quad (\text{exp. est strict. croissante}) \\ &\leq \frac{\mathbf{E}(e^{-S_n})}{\exp(-\ln(n))} = \frac{n}{2^n}. \end{aligned}$$



————— Exercice 297. —————

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$m_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

1. Donner la loi de m_n .
2. Justifier que les suites de variables $(m_n/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(M_n/n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent en probabilité vers la variable constante égale à 0.

» Solution p.707

1. En passant par la fonction de répartition, on vérifie que m_n suit une loi exponentielle de paramètre $n\lambda$. Voir exercice 251, p.280 pour les détails.

2. • *Rédaction 1.*

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$\mathbf{P}\left(\frac{m_n}{n} < \varepsilon\right) = \mathbf{P}(m_n \leq \varepsilon n) = 1 - e^{-(\varepsilon n) \cdot (\lambda n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

D'où
$$\mathbf{P}\left(\frac{m_n}{n} \geq \varepsilon\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\frac{m_n}{n} < \varepsilon\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

• *Rédaction 2.* La variable m_n/n est positive, l'inégalité de Markov s'applique

$$\mathbf{P}\left(\frac{m_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbf{E}(m_n/n)}{\varepsilon} = \frac{\mathbf{E}(m_n)}{n\varepsilon} = \frac{1}{n^2\lambda\varepsilon} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Par encadrement
$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{m_n}{n} - 0\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

La suite de variables $(m_n/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable constante égale à 0. On a aussi $M_n \leq X_1 + X_2 + \dots + X_n$ puis

$$\mathbf{E}\left(\frac{M_n}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i) = \frac{\lambda}{n}.$$

On conclut de nouveau par l'inégalité de Markov.



Exercice 310.

ESCP oral 2025
(Maxime)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^+$. Justifier la convergence de

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-2x} dx.$$

2. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \int_{\frac{n+\sqrt{n}}{2}}^{+\infty} t^{n-1} e^{-2t} dt.$$

» Solution p.720

1. L'intégrande est continue sur \mathbb{R}_*^+ donc on a une intégrale généralisée en $+\infty$. De plus, par les croissances comparées

$$x^{n-1}e^{-2x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Comme l'intégrale de Riemann (dont l'intégrande est positive) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est convergente, on obtient la convergence de I_n par le critère de négligeabilité.

2. On effectue dans un premier temps le changement de variable affine $u = 2t$

$$\int_{\frac{n+\sqrt{n}}{2}}^{+\infty} t^{n-1}e^{-2t} dt = \int_{n+\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{u^{n-1}e^{-u}}{2^n} du.$$

Sachant que $\Gamma(n) = (n-1)!$, on a

$$\frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \int_{\frac{n+\sqrt{n}}{2}}^{+\infty} t^{n-1}e^{-2t} dt = \frac{1}{2} \int_{n+\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(n)} u^{n-1}e^{-u} du = \frac{1}{2} \int_{n+\sqrt{n}}^{+\infty} f_n(u) du$$

où f_n désigne la densité usuelle de la loi $\gamma(n)$. On en déduit que si $X_n \hookrightarrow \gamma(n)$

$$\begin{aligned} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \int_{\frac{n+\sqrt{n}}{2}}^{+\infty} t^{n-1}e^{-2t} dt &= \frac{1}{2} \mathbf{P}(X_n > n + \sqrt{n}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{P}\left(\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} > 1\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \mathbf{P}\left(\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \leq 1\right)\right). \end{aligned}$$

Or on sait que si $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ désigne une suite de variables aléatoires toutes de loi $\mathcal{E}(1) = \gamma(1)$ et indépendantes, $\sum_{i=1}^n Y_i$ et X_n ont même loi. De plus, Y_i admet un moment d'ordre 2, le théorème central limite s'applique et

$$\frac{\sum_{i=1}^n Y_i - \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)}{\sqrt{\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Z \quad \text{où } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1).$$

D'où $\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Z$.

Comme 1 est un point de continuité de la fonction de répartition de Z , la définition de la convergence en loi donne

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \leq 1\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{P}(Z \leq 1) = \Phi(1).$$

Finalement la limite recherchée vaut $(1 - \Phi(1))/2$.



Exercice 322.

Étant donnée une matrice composée de 0 et de 1, Écrire un programme qui permet de déterminer l'indice d'une ligne comportant le plus de 0.

» Solution p.732

Proposons un code qui n'utilise pas de fonction préprogrammée comme `np.sum` :

```
import numpy as np

def plus_de_un(A):
    # on calcule la somme sur les lignes et on stocke le tout dans une matrice ligne B
    n,p=np.shape(A)
    B=np.zeros(n)
    for i in range(n):
        B[i]=0
        for j in range(p):
            B[i]+=1-A[i,j]
    M=max(B)
    j=0
    while B[j]!=M:
        j+=1
    print('La ligne '+str(j+1)+' contient le plus de 0 ')
    # on prend en compte le décalage d'indice en python

A=np.array([[0,0,1,1,0],[1,0,0,0,1],[0,1,1,1,0],[0,0,1,0,0]])

>>> A
array([[0, 0, 1, 1, 0],
       [1, 0, 0, 0, 1],
       [0, 1, 1, 1, 0],
       [0, 0, 1, 0, 0]])

>>> plus_de_un(A)
La ligne 4 contient le plus de 0
```



Exercice 324.

Les coordonnées de n points du plan $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ sont contenues dans une matrice de $\mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{R})$

$$M = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ y_0 & y_1 & \cdots & y_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Construire une fonction d'argument M permettant de déterminer la distance euclidienne maximale entre deux de ces points.

» Solution p.734

On calcule toutes les distances au carrée

$$d_{i,j} = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$

et on stocke les résultats dans une matrice D dont on prend la racine carrée du maximum. Notons que la fonction racine carrée étant strictement croissante, il est préférable de ne pas rajouter des calculs inutiles de racines carrées et de n'appliquer la fonction racine carrée qu'une seule fois : à la fin. Précisons aussi que la matrice D est symétrique de diagonale nulle. On limite là encore les calculs.

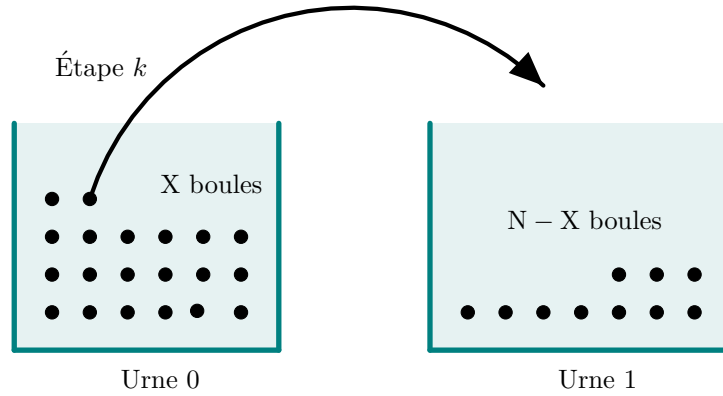
```
import numpy as np

def max_distance(M):
    p,n=np.shape(M)
    D=np.zeros([n,n])
    # la matrice des distances
    for i in range(n):
        for j in range(i+1,n):
            D[i,j]=(M[0,i]-M[0,j])**2+(M[1,i]-M[1,j])**2
            D[j,i]=D[i,j]
    return np.sqrt(np.max(D))
```



Exercice 344.

Soient $N, n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une urne numérotée 0 contenant N boules indiscernables et d'une autre urne vide numérotée 1. À chaque étape de l'expérience on sélectionne de manière aléatoire uniformément une boule (située dans l'une ou l'autre des deux urnes) et on la change d'urne. Proposer une fonction Python prenant en argument deux entiers N et n et renvoyant une simulation empirique de la proportion de boules appartenant à l'urne numéro 1 après n étapes.



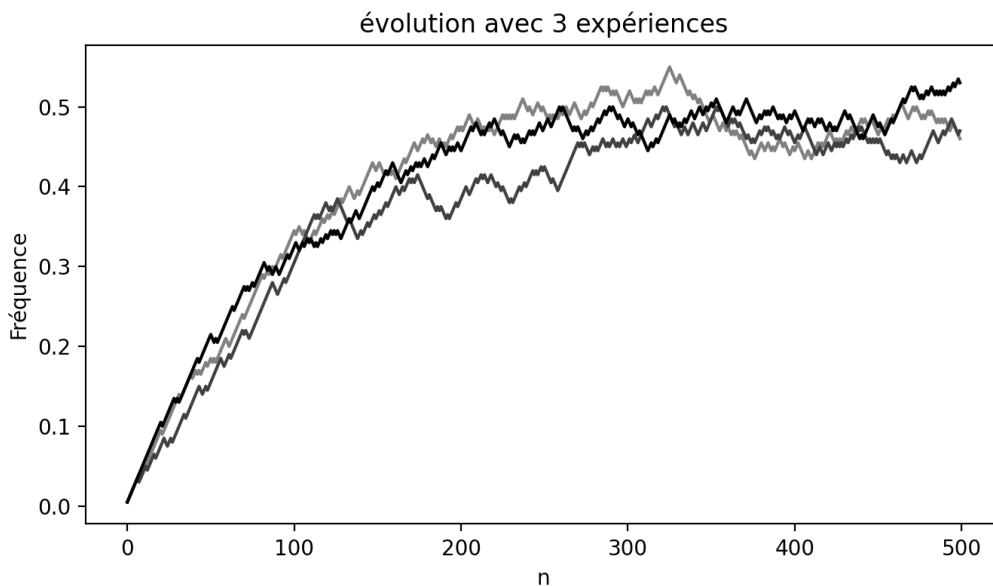
» Solution p.754

(••)

On numérote les boules de 0 à N . On crée ensuite une matrice ligne `boules` avec N colonnes dont les coefficients valent 0 ou 1. Le i -ème coefficient vaut 1 si la boule i est dans l'urne 1 et 0 sinon.

```
(1) def simulation(N, n):
(2)     boules = np.zeros(N)
# au début toutes les boules sont dans l'urne 1
(3)     for k in range(n):
(4)         i = rd.randint(0, N)
# on choisit une boule au hasard
(5)         boules[i] = 1 - boules[i]
# on change la boule d'urne
(6) return np.sum(boules)/N
# on renvoie la proportion de boules dans l'urne 1
```

On peut rajouter `Nb=np.zeros(n)` à la ligne 2 et `Nb[k]=np.sum(boules)/N` à la ligne 5 pour obtenir une matrice ligne `Nb` dont le i -ème coefficient renvoie la fréquence à la i -ème étape. On peut tracer alors l'évolution pour se rendre compte que la fréquence semble converger vers $1/2$.



Commentaires. Les urnes d'Ehrenfest permettent de modéliser la diffusion du gaz entre deux compartiments. Au bout de quelques étapes, les molécules de gaz se répartissent uniformément entre les deux compartiments.