



Exercice principal



Sujets à dominante algèbre

(FORMAT ESCP)

Sujet 1 Calcul de puissances via des projecteurs

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère \mathbb{R}^n muni de sa structure euclidienne canonique et rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. on considère le vecteur

$$v_1 = \sum_{i=1}^n e_i$$

et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n dont la matrice dans la base \mathcal{B} est

$$M = \frac{1}{n-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- La matrice $M - I$ est-elle diagonalisable ?
 - Montrer que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f - \text{id}) \oplus \text{Im}(f - \text{id})$.
- Soit p le projecteur sur $\text{Ker}(f - \text{id})$ parallèlement à $\text{Im}(f - \text{id})$.
 - Déterminer $p(v_1)$ puis $p(e_1), \dots, p(e_n)$.
 - Expliciter la matrice P de p dans la base \mathcal{B} .
- Soit q le projecteur sur $\text{Im}(f - \text{id})$ parallèlement à $\text{Ker}(f - \text{id})$.
Expliciter la matrice Q de q dans la base \mathcal{B} .
- Exprimer M comme combinaison linéaire de P et Q . En déduire M^k pour tout entier naturel k non nul. Déterminer $\lim_{k \rightarrow +\infty} M^k$ (la limite s'entendant coefficient par coefficient).
- Justifier que M est inversible et exprimer M^{-1} ainsi que M^{-k} , pour tout entier naturel non nul k , en fonction de P et de Q .

1.a) $M - I$ est symétrique réelle, donc diagonalisable.

1.b) Plusieurs rédactions possibles.

→ C'est une propriété générale des endomorphismes φ diagonalisables :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(\varphi)} E_\lambda(\varphi) = E_0(\varphi) \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(\varphi) \setminus \{0\}} E_\lambda(\varphi) \right).$$

$\text{Ker } \varphi$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 (si 0 est valeur propre) et les éventuels autres sous-espaces propres (qui sont en somme directe) sont contenus dans l'image de φ , car pour $\lambda \neq 0$,

$$f(x) = \lambda x \quad \Rightarrow \quad x = f\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \in \text{Im } f.$$

On conclut grâce aux dimensions.

→ On peut aussi dire, en étant un peu moins général, que pour un endomorphisme φ symétrique, on a même $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$ supplémentaires orthogonaux, car pour x quelconque et y dans $\text{Ker } \varphi$:

$$\langle \varphi(x), y \rangle = \langle x, \varphi(y) \rangle = 0.$$

→ Enfin, on peut tout faire à la main et déterminer noyau (droite engendrée par v_1) et image (contient les vecteurs $e_1 - e_k$, pour $k \geq 2$ et on conclut grâce aux dimensions).

2.a) Comme $f(v_1) = v_1$, on a $v_1 \in \text{Ker}(f - \text{id})$ et

$$p(v_1) = v_1.$$

Pour tout entier $k \geq 2$, $f(e_1 - e_k) = -\frac{1}{n-1}(e_1 - e_k)$, donc $e_1 - e_k$ appartient à $\text{Im}(f - \text{id})$ et $p(e_1) = p(e_k)$. Ainsi

$$v_1 = p(v_1) = \sum_{k=1}^n p(e_k) = \sum_{k=1}^n p(e_i)$$

et
$$p(e_i) = \frac{1}{n}v_1.$$

2.b) Ainsi $P = \text{Mat}_B(p) = \frac{1}{n}J$, où J est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

3. L'application q est le projecteur associé à p et donc $Q = I_n - P$.

4. On a :

$$\alpha P + \beta Q = \frac{\alpha}{n}J + \beta \left(I_n - \frac{1}{n}J \right) = \beta I_n + \frac{\alpha - \beta}{n}J,$$

donc $M = \frac{1}{n-1}(J - I_n)$ est de la forme $\alpha P + \beta Q$ pour $\alpha = 1$ et $\beta = \frac{1}{1-n}$

$$M = P + \frac{1}{1-n}Q.$$

• Pour $k \geq 2$, on a

$$M^k = P^k + \frac{1}{(1-n)^k}Q^k = P + \frac{1}{(1-n)^k}Q,$$

car $P^2 = P, Q^2 = Q, PQ = QP = 0$. Pour s'en convaincre on peut procéder par récurrence ou utiliser la formule du binôme de Newton en isolant les termes pour $i = 0, i = k$:

$$\begin{aligned} M^k &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} P^i \left(\frac{1}{1-n} \right)^{k-i} Q^{k-i} \\ &= P^k + \frac{1}{(1-n)^k}Q^k + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \left(\frac{1}{1-n} \right)^{k-i} \underbrace{PQ}_{=0}^{k-i}. \end{aligned}$$

et le résultat vaut aussi pour $k = 0, k = 1$.

5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\left(P + \frac{1}{1-n}Q \right) (aP + bQ) = I = P + Q$$

est vérifié pour $a = 1$ et $\frac{b}{1-n} = 1$, ceci prouve que M est inversible avec $M^{-1} = P + (1-n)Q$. Et alors, pour $k \geq 2$:

$$M^{-k} = (M^{-1})^k = (P + (1-n)Q)^k = P + (1-n)^k Q.$$

À nouveau la formule est valide pour $k = 0, k = 1$.

Sujet 2
L'adjoint et contraction

• *Questions de cours.*

Donner la définition d'un projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E .

Soit n , un entier supérieur à 2. On considère l'espace euclidien \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique donné par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n), \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Si u est un endomorphisme de \mathbb{R}^n et A sa matrice dans la base canonique, on désigne par ${}^t u$ l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à ${}^t A$. On a donc

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, {}^t u(y) \rangle.$$

1. Soit u un endomorphisme de \mathbb{R}^n . Montrer que $\text{Ker}(u) = [\text{Im}({}^t u)]^\perp$.
2. Dans la suite, on considère un endomorphisme de \mathbb{R}^n qui vérifie $\|u(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On dit alors que u est une *contraction*.
 - a) Montrer que u^n est encore une contraction pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
 - b) Vérifier que ${}^t u$ est aussi une contraction.
On pourra commencer par majorer $\|{}^t u(x)\|^2$.
 - c) Montrer que $\text{Ker}(u - \text{id}) = \text{Ker}({}^t u - \text{id})$.
 - d) Prouver que les sous-espaces $\text{Ker}(u - \text{id})$ et $\text{Im}(u - \text{id})$ sont supplémentaires et orthogonaux.
 - e) Si $x \in \mathbb{R}^n$, on pose pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$s_m(x) = \frac{1}{m+1} (x + u(x) + \dots + u^m(x))$$

et on note P la projection orthogonale sur les points fixes de u (c.a.d. sur $\text{Ker}(u - \text{id})$). Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la suite $(s_m(x))_m$ converge vers $P(x)$, c'est-à-dire que :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|s_m(x) - P(x)\| = 0$$

3. On considère l'endomorphisme u de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\omega) & \sin(\omega) & 0 \\ -\sin(\omega) & \cos(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{où } \omega \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

- a) Vérifier que u est une contraction.
- b) Soit $x \in \mathbb{R}^3$. Quelle est la limite lorsque m tend vers l'infini de $\frac{x + u(x) + \dots + u^{m+1}(x)}{m+1}$?

1. Raisonnons par double inclusion.

→ Soit $x \in \text{Ker}(u)$, il vient pour tout $y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, {}^t u(y) \rangle = \langle u(x), y \rangle = 0.$$

Ainsi $x \in \text{Im}({}^t u)^\perp$.

→ Réciproquement, si $x \in \text{Im}({}^t u)^\perp$ on a $0 = \langle x, {}^t u(y) \rangle = \langle u(x), y \rangle$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$. En prenant $y = u(x)$, on a $\|u(x)\|^2 = 0$, d'où $u(x) = 0$ et par suite $x \in \text{Ker}(u)$.

→ Finalement, $\text{Ker}(u) = \text{Im}({}^t u)^\perp$.

2.a) On montre cette propriété par récurrence. Elle est évidemment vraie pour $n = 0$ et pour l'hérédité, on écrit

$$\|u^{n+1}(x)\| = \|u^n(u(x))\| \leq \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

2.b) Soient u une contraction et $x \in \mathbb{R}^n$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \|{}^t u(x)\|^2 &= \langle {}^t u(x), {}^t u(x) \rangle = \langle u({}^t u(x)), x \rangle \\ &\leq \|u({}^t u(x))\| \cdot \|x\| \leq \|{}^t u(x)\| \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

En distinguant ${}^t u(x) = 0$ et ${}^t u(x) \neq 0$, on a dans tous les cas $\|{}^t u(x)\| \leq \|x\|$.

Finalement, ${}^t u$ est aussi une contraction.

2.c) Soit $x \in \text{Ker}(u - \text{id}) \setminus \{0\}$. C'est-à-dire $u(x) = x$ et

$$\|x\|^2 = \langle u(x), x \rangle \leq \|u(x)\| \|x\| \leq \|x\|^2,$$

d'où $\langle {}^t u(x), x \rangle \leq \|x\|^2$.

Écrivons ${}^t u(x) = ax + y$ où y est orthogonal à x , on voit déjà que $\|x\|^2 = \langle {}^t u(x) | x \rangle = a\|x\|^2 + \langle x | y \rangle = a\|x\|^2$ et par suite $a = 1$.

On a donc $\|x\|^2 \geq \|{}^t u(x)\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ et par suite $y = 0$. Il en résulte que

$$\text{Ker}(u - \text{I}) \subseteq \text{Ker}({}^t u - \text{I}).$$

Comme ${}^t u$ est une contraction et ${}^t({}^t u) = u$, on peut échanger les rôles de u et ${}^t u$ et on obtient l'égalité souhaitée.

2.d) Compte tenu de l'égalité précédente et de la question 1., il vient

$$\begin{aligned} (\text{Ker}(u - \text{id}))^\perp &= (\text{Ker}({}^t u - \text{id}))^\perp \\ &= \text{Im}({}^t({}^t u - \text{id})) = \text{Im}(u - \text{id}). \end{aligned}$$

2.e) Si $x \in \mathbb{R}^n$, on décompose x suivant la somme orthogonale

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker}(u - \text{id}) \oplus \text{Im}(u - \text{id}),$$

en $x = a + b$ avec $b = c - u(c)$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} s_m(x) - a &= s_m(a) - a + s_m(b) = s_m(b) \\ &= \frac{1}{m+1} (c - u(c)) + \dots + \frac{(u^m(c) - u^{m+1}(c))}{m+1} (c) \\ &= \frac{1}{m+1} (c - u^{m+1}(c)). \end{aligned}$$

On a vu que u^{m+1} est encore une contraction, d'où :

$$\begin{aligned} \|s_m(x) - P(x)\| &= \|s_m(x) - a\| \leq \frac{1}{m+1} (\|c\| + \|u^{m+1}(c)\|) \\ &\leq \frac{2}{m+1} \|c\|. \end{aligned}$$

Il en résulte bien que $s_m(x)$ converge vers $P(x)$.

3.a) Si $x = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= (\cos(\omega)x_1 + \sin(\omega)x_2)^2 + (-\sin(\omega)x_1 + \cos(\omega)x_2)^2 + x_3^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|x\|^2. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que u est une isométrie, donc une contraction.

3.b) On montre que $\text{Ker}(u - \text{I}) = \{(0, 0, t); t \in \mathbb{R}\}$. Il résulte alors de la question 2.e) que les moyennes considérées convergent vers le point $(0, 0, x_3)$.

Sujet 3
Matrices admettant des racines p -ième

- *Questions de cours.*

Énoncer la formule de Taylor-Young.

Dans tout cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note :

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall p \in \mathbb{N}^*, \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } A = B^p\}.$$

1. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

- Montrer que A est diagonalisable.
 - Montrer que $A \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $N^n = 0_n$ et $N^{n-1} \neq 0_n$. Montrer que $N \notin \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.
3. Dans cette question N est une matrice non nulle, telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0_n$. On pose $A = I_n + N$.
- Déterminer les valeurs propres de A . La matrice A est-elle diagonalisable ?
 - Soit V un polynôme de $\mathbb{R}[x]$. On suppose qu'au voisinage de 0, on a :

$$V(t) = o(t^q) \quad \text{où } q \in \mathbb{N}.$$

Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $V(x) = x^q Q(x)$.

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de p réels, notés α_i , tels qu'au voisinage de 0

$$(1+t)^{1/p} = 1 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_p t^p + o(t^p).$$

En déduire que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $U_q \in \mathbb{R}[x]$ tel qu'au voisinage de 0 on a :

$$1+t = (U_q(t))^p + o(t^q).$$

- En déduire que $I_n + N \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Montrer que $A \notin \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

1.a) La matrice A est triangulaire supérieure : ses valeurs propres se lisent sur la diagonale. Ce sont : 1, 2, 4. La matrice A d'ordre 3 admet 3 valeurs propres réelles : elle est diagonalisable.

1.b) D'après ce qui précède, il existe une matrice P inversible telle que

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On vérifie que si on pose

$$D_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{1/p} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{1/p} \end{bmatrix}$$

et $B = PD_pP^{-1}$. On a bien $A = B^p$.

2. Raisonnons par l'absurde. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^n = N$. On en déduit que

$$B^{n^2} = N^n = 0_n \quad \text{et} \quad B^{n(n-1)} \neq 0_n$$

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à B . Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f^{n(n-1)}(x) \neq 0$. On montre par récurrence que la famille

$$(x, f(x), \dots, f^{n(n-1)}(x))$$

est une famille libre de \mathbb{R}^n . Or pour $n \geq 2$

$$n(n-1) > n.$$

On a exhibé une famille libre avec strictement plus de vecteurs que la dimension. Absurde, $N \notin \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

3.a) Le polynôme $(x-1)^k$ est annulateur donc 1 est la seule valeur propre possible. Comme $A - I_n$ est nilpotente, elle n'est pas inversible, 1 est bien l'unique valeur propre de A .

Si A est diagonalisable, A est semblable à la matrice

$$\text{Diag}(1, \dots, 1) = I_n.$$

Absurde, la seule matrice semblable à I_n est I_n et $A \neq I_n$. Dès lors, A n'est pas diagonalisable.

3.b) Par définition d'un polynôme, on a l'existence de réels (a_i) tels qu'au voisinage de 0

$$\begin{aligned} V(t) &= \sum_{k=0}^d a_k t^k = \sum_{k=0}^{q-1} a_k t^k + \sum_{k=q}^d a_k t^k \\ &= \sum_{k=0}^{q-1} a_k t^k + o(t^q). \end{aligned}$$

Or par hypothèse :

$$V(t) = o(t^q) = \sum_{k=0}^{q-1} 0 \cdot t^k + o(t^q).$$

Par unicité du développement limité, pour tout indice $k \in \llbracket 0; q-1 \rrbracket$, $a_k = 0$. On en déduit que

$$V(t) = \sum_{k=q}^d a_k t^k = t^q Q(t).$$

D'où le résultat.

3.c) La fonction $t \mapsto (1+t)^{1/p}$ est \mathcal{C}^p . La formule de Taylor-Young justifie l'existence de tels réels. En élevant à la puissance p , et en développant la puissance, il vient :

$$1+t = (U(t) + o(t^q))^p = U^p(t) + o(t^q).$$

Par les questions précédentes $1+x = U^p(x) + o(x^q) = U^p(x) + x^q Q(x)$.

3.d) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit q l'indice de nilpotence de N . D'après la question 3.c), il existe un polynôme $U_q \in \mathbb{R}[X]$ tel que, au voisinage de 0,

$$1+t = (U_q(t))^p + o(t^q).$$

Ainsi, le polynôme $V(t) = 1+t - (U_q(t))^p$ vérifie $V(t) = o(t^q)$. D'après la question 3.b), il existe donc un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $V(t) = t^q Q(t)$. Autrement dit,

$$1+t = (U_q(t))^p + t^q Q(t).$$

En remplaçant formellement t par la matrice N , on obtient

$$I_n + N = (U_q(N))^p + N^q Q(N) = (U_q(N))^p.$$

car $N^q = 0_n$. Ceci étant vrai pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n + N \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}).$$

4. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. On a alors $AB = BA = B^3$. La matrice A est diagonale avec deux éléments distincts. La commutation montre qu'alors B est également diagonale et

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}.$$

Ainsi $B^2 = A$ entraîne $b^2 = -2$ qui n'a pas de solutions réelles.

Sujet 4
Distance à un sous-espace vectoriel

Soit n un entier naturel, tel que $n \geq 2$.

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[x]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

1. Montrer que pour tout $0 \leq j \leq n$, il existe un unique polynôme $L_j \in E$ tel que

$$L_j(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j, \quad 0 \leq i \leq n \end{cases}$$

Montrer que l'on a :

$$L_j(x) = \frac{(-1)^{n-j}}{n!} \binom{n}{j} \prod_{k=0, k \neq j}^n (x - k).$$

2. Montrer que $\mathcal{B} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de E .

3. Calculer

a) $L_0 + L_1 + \dots + L_n$.

b) $L_1 + 2L_2 + \dots + nL_n$.

4. On définit, pour $(P, Q) \in E^2$, $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$.

- a) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E . On notera $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

- b) Que peut-on dire de \mathcal{B} pour ce produit scalaire ?

5. On pose $H = \mathbb{R}_{n-1}[x]$. Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. Déterminer un réel λ_k tel que $x^n + \lambda_k L_k \in H$.

6. Soit $P \in H$. Montrer que les coordonnées de P sur la base \mathcal{B} sont

$$\alpha_k = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \sum_{j=0}^n P(j)j^n, \quad k \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

7. Soit π la projection orthogonale sur H . On pose

$$d(x^n, H) = \|x^n - \pi(x^n)\|.$$

- a) Montrer que $\|x^n - \pi(x^n)\| = n! \times \|L_0 - \pi(L_0)\|$.

- b) Soit $Q = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} L_i$. Montrer que $Q \in H^\perp$.

- c) En déduire que $d(x^n, H) = n! \frac{|\langle L_0, Q \rangle|}{\|Q\|}$.

- d) Montrer que $d(x^n, H) = \frac{n!}{\sqrt{\binom{2n}{n}}}$.

1. • Existence

On vérifie que ce L_j convient car pour tout $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$ $L_j(\ell) = \delta_{j,\ell}$.

• **Unicité**

Supposons qu'il existe un polynôme $Q_j \in E$ tel que pour tout $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_j(\ell) = Q_j(\ell) = \delta_{j,\ell}$. Le polynôme $L_j - Q_j \in E$ admet $(n + 1)$ racines (les entiers de 0 à n , j compris) : c'est le polynôme nul et $Q_j = L_j$.

2. Le cardinal de la famille (L_0, \dots, L_n) est égal à $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$. Pour montrer que c'est une base il suffit de montrer qu'elle est libre ; si $\sum_{k=0}^n \alpha_k L_k = 0$, alors, pour $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$0 = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k(\ell) = \alpha_\ell.$$

3.a) Tout polynôme P de E s'écrit dans cette base sous la forme :

$$P(x) = \sum_{k=0}^n P(k) L_k(x).$$

D'après la remarque précédente, $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(k) = 1$, entraîne que $P = 1$.

3.b) De même pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(k) = k$ entraîne que $P(x) = x$.

4.a) On vérifie que l'application $\Phi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive. Seule la dernière propriété n'est pas immédiate. On a

$$\Phi(P, P) = \sum_{k=0}^n P(k)^2 \geq 0;$$

et si $\Phi(P, P) = 0$, alors pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(k) = 0$, et $P = 0$.

4.b) La famille $\mathcal{B} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, car pour tout $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_j(\ell) = \delta_{j,\ell}$, donc :

$$\langle L_i, L_j \rangle = \sum_{k=0}^n L_i(k)L_j(k) = \sum_{k=0}^n \delta_{i,k}\delta_{j,k} = \delta_{i,j}.$$

5. L_k est un polynôme de degré n ; on a $x^n + \lambda_k L_k \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ si et seulement si le coefficient de x^n de ce dernier polynôme est nul ; donc si et seulement si :

$$\lambda_k = \frac{(-1)^{n-k+1} n!}{\binom{n}{k}}$$

6. Si $P \in H^\perp$, alors pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\langle P, x^n + \lambda_k L_k \rangle = 0$, ou $\langle P, x^n \rangle = -\lambda_k \langle P, L_k \rangle$. Or on sait que dans la base orthonormée (L_0, \dots, L_n) , P s'écrit : $P = \sum_{k=0}^n \langle P, L_k \rangle L_k$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \langle P, L_k \rangle &= -\frac{1}{\lambda_k} \langle P, x^n \rangle = \frac{(-1)^{n-k} \binom{n}{k}}{n!} \sum_{j=0}^n \langle P, L_j \rangle j^n \\ &= \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \sum_{j=0}^n \langle P, L_j \rangle j^n. \end{aligned}$$

7.a) On sait que $x^n + (-1)^{n+1} L_0 \in H$; donc

$$\pi(x^n + (-1)^{n+1} L_0) = x^n + (-1)^{n+1} L_0$$

et $\pi(x^n) - x^n = (-1)^n n! (\pi(L_0) - L_0)$ donne

$$d(x^n, H) = n! d(L_0, H)$$

7.b) Le polynôme Q est colinéaire au polynôme P de la question 6. Donc $Q \in H^\perp$.

7.c) On a donc $d(L_0, H) = |\langle L_0, Q \rangle|$, d'où :

$$d(x^n, H) = n! \frac{|\langle L_0, Q \rangle|}{\|Q\|}$$

7.d) Or $\langle L_0, Q \rangle = \frac{1}{n!}$ et

$$\|Q\|^2 = \sum_{i=0}^n \frac{1}{(n!)^2} \binom{n}{i}^2 = \frac{1}{(n!)^2} \binom{2n}{n}.$$

Enfinement
$$d(x^n, H) = \frac{n!}{\sqrt{\binom{2n}{n}}}.$$

Sujet 5
Groupes sur les matrices triangulaires

- *Question de cours.* Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice soit diagonalisable.
- 1. Justifier que les seules applications dérivables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

sont les fonctions linéaires.

Soit \mathcal{E} l'ensemble des matrices

$$M(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{où } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

- 2. a) Vérifier que \mathcal{E} est stable par produit et passage à l'inverse, c'est-à-dire :
 - pour toutes matrices M et M' de \mathcal{E} , $MM' \in \mathcal{E}$;
 - toute matrice M de \mathcal{E} est inversible et son inverse appartient à \mathcal{E} .
- b) Deux matrices quelconques de \mathcal{E} commutent-elles ?
- c) Préciser la ou les matrices de \mathcal{E} diagonalisable(s).

Dans la suite, on dira que l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto M(a(t), b(t), c(t))$ est dérivable en t_0 si les trois fonctions a, b, c sont dérivables en t_0 .

- 3. a) Déterminer les applications φ définies sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathcal{E} par

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto M(a(t), b(t), c(t))$$

dérivables sur \mathbb{R} et telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall t' \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t + t') = \varphi(t) \cdot \varphi(t').$$

- b) Montrer que $\text{Im } \varphi$ est stable par produit et passage à l'inverse.
- c) Deux matrices quelconques de $\text{Im } \varphi$ commutent-elles ?

1. En prenant $y = 0$, on remarque que $f(0) = 0$. Puis, pour tout $y \in \mathbb{R}$ fixé, en dérivant par rapport à x on a $f'(x+y) = f'(x)$; d'où, pour $x = 0$, $f'(y) = f'(0)$ et f' est constante, donc f est linéaire, c'est-à-dire de la forme $x \mapsto ax$. La réciproque est immédiate.

2.a) On vérifie que

$$M(a, b, c) \cdot M(a', b', c') = M(a + a', b + b' + ac', c + c') \in \mathcal{E}.$$

• Notons que $I_3 = M(0, 0, 0) \in \mathcal{E}$.

On constate que

$$M(a, b, c) \cdot M(a', b', c') = I_3$$

si et seulement si

$$\begin{cases} a + a' = 0 \\ b + b' + ac' = 0 \\ c + c' = 0. \end{cases}$$

D'où $a' = -a$, $b' = ac - b$, $c' = -c$. En résumé

$$M(a, b, c)M(-a, ac - b, -c) = I_3,$$

la matrice est inversible à gauche, donc inversible et son inverse est

$$(M(a, b, c))^{-1} = M(-a, ac - b, -c) \in \mathcal{E}.$$

Notons que toute matrice de \mathcal{E} est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, donc est inversible.

2.b) La formule du produit montre encore que :

$$MM' = M'M \iff ac' = ca'.$$

Cette condition n'étant pas toujours vérifiée, toutes les matrices de \mathcal{E} ne commutent pas nécessairement.

2.c) La matrice $M(a, b, c)$ est triangulaire. On en déduit que 1 est la seule valeur propre. Si $M(a, b, c)$ est diagonalisable alors elle est semblable à I_3 . Or seule I_3 est semblable à I_3 . Nécessairement $a = b = c = 0$ et $M(a, b, c) = I_3$. Réciproquement, $M(0, 0, 0) = I_3$ est diagonalisable.

3.a) D'après la première question, il vient :

$$\forall t, t' \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t+t') = \varphi(t) \times \varphi(t')$$

$$\iff \forall t, t' \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} a(t+t') = a(t) + a(t') \\ b(t+t') = b(t) + b(t') + a(t)c(t') \\ c(t+t') = c(t) + c(t') \end{cases}$$

$$\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall t, t' \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} a(t) = \alpha t \\ c(t) = \gamma t \\ b(t+t') = b(t) + b(t') + \alpha\gamma tt' \end{cases}$$

(à l'aide de la question 1).

Pour $t = t' = 0$, on a nécessairement $b(0) = 0$; en dérivant par rapport à t , il vient $b'(t+t') = b'(t) + \alpha\gamma t'$, puis $t = 0$ donne $b'(t') = b'(0) + \alpha\gamma t'$ soit, en notant

$$\beta = b'(0), \quad b(t) = \alpha\gamma \frac{t^2}{2} + \beta t.$$

On montre enfin que cette condition est suffisante en vérifiant dans l'équation $b(t+t') = b(t) + b(t') + \alpha\gamma tt'$. En conclusion, il existe trois réels α , β et γ tels que pour tout réel t

$$a(t) = \alpha t; \quad b(t) = \frac{\alpha\gamma}{2}t^2 + \beta t; \quad c(t) = \gamma t.$$

3.b) On en déduit

$$\text{Im}(\varphi) = \left\{ M\left(\alpha t, \frac{\alpha\gamma}{2}t^2 + \beta t, \gamma t\right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

L'ensemble $\text{Im} \varphi$ est stable par produit par construction et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(-t) \times \varphi(t) = \varphi(0) = M(0, 0, 0) = I_3$$

d'où

$$(\varphi(t))^{-1} = \varphi(-t) \in \mathcal{E}.$$

En conclusion $\text{Im} \varphi$ stable par produit et passage à l'inverse.

3.c) On a

$$\varphi(t) \cdot \varphi(t') = \varphi(t+t') = \varphi(t'+t) = \varphi(t') \cdot \varphi(t).$$

La réponse est donc oui.

Sujet 6
Inégalité de Kantorovich

- *Question de cours.*

Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Préciser le cas d'égalité.

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Dans tout l'exercice, A désigne une matrice symétrique dont les valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité sont notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On suppose

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

1. a) Justifier que l'application

$$(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \mapsto \langle AX, Y \rangle = {}^tXAY$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- b) À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \|X\|^4 \leq \langle AX, X \rangle \langle A^{-1}X, X \rangle.$$

2. On désigne par P le polynôme de $\mathbb{R}[x]$ donné par

$$P(x) = x^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)x + \lambda_1\lambda_n.$$

- a) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(\lambda_k) \leq 0$.

- b) Justifier que la matrice $B = A^{-1}P(A)$ est diagonalisable et exprimer ses valeurs propres à l'aide des réels λ_i . Vérifier que le spectre de B est inclus dans \mathbb{R}^- .

- c) En déduire que $\langle BX, X \rangle \leq 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ fixé et non nul, on désigne par Q le polynôme de degré 2 défini sur \mathbb{R} par :

$$Q(\lambda) = \langle AX, X \rangle \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_n) \|X\|^2 \lambda + \lambda_1 \lambda_n \langle A^{-1}X, X \rangle.$$

- a) Vérifier que $Q(1) = \langle BX, X \rangle$, puis établir que :

$$(\lambda_1 + \lambda_n)^2 \|X\|^4 - 4 \langle AX, X \rangle \langle A^{-1}X, X \rangle \lambda_1 \lambda_n \geq 0.$$

- b) Déduire de ce qui précède l'inégalité de Kantorovich :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \|X\|^4 \leq \langle AX, X \rangle \langle A^{-1}X, X \rangle \leq \frac{1}{4} \left(\kappa(A) + \frac{1}{\kappa(A)} \right)^2 \|X\|^4$$

où on a posé

$$\kappa(A) = \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}.$$

1.a) Rédaction 1

La symétrie et la bilinéarité sont claires. D'après le théorème spectral, il existe (X_1, \dots, X_n) une b.o.n constituée de vecteurs propres de A . On peut convenir que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad AX_i = \lambda_i X_i.$$

Soit $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i$. Sachant que ${}^t X_i X_j = \delta_{ij}$, on montre que

$${}^t XAX = \sum_{i=1}^n x_i^2 \lambda_i \geq 0$$

avec égalité si et seulement si, pour tout indice i , $x_i^2 \lambda_i = 0$. Il vient $X = 0_{n,1}$. L'application est bien un produit scalaire.

Rédaction 2

On montre qu'il existe une matrice symétrique R inversible telle que $A = {}^t R R$. Ainsi

$$\langle AX, Y \rangle = {}^t XAY = {}^t R XRY = \langle RX, RY \rangle.$$

Sous cette nouvelle expression, la bilinéarité, la positivité sont claires. Le caractère défini s'appuie sur le fait que R soit inversible.

1.b) Précisons que A est inversible car $0 \notin \text{Sp}(A)$.

Notons φ le produit scalaire de la question précédente. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire :

$$\begin{aligned} \|X\|^4 &= \langle X, X \rangle^2 = \langle AA^{-1}X, X \rangle^2 \\ &= \varphi(A^{-1}X, X)^2 \\ &\leq \varphi(A^{-1}X, A^{-1}X) \cdot \varphi(X, X) \\ \|X\|^4 &\leq \langle X, A^{-1}X \rangle \cdot \langle AX, X \rangle. \end{aligned}$$

2.a) On a $P(\lambda_1) = P(\lambda_n) = 0$. Comme P est un polynôme de degré 2 à coefficient dominant positif, $P(x) \leq 0$ pour tout réel x compris entre les racines. Comme $\lambda_i \in [\lambda_1; \lambda_n]$, on a bien $P(\lambda_i) \leq 0$.

2.b) En reprenant les notations de la question 1.a), on a pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$A^{-1}X_i = \lambda_i^{-1}X_i \quad \text{et} \quad P(A)X_i = P(\lambda_i)X_i.$$

D'où

$$\begin{aligned} BX_i &= A^{-1}(P(\lambda_i)X_i) = P(\lambda_i)\lambda_i^{-1}X_i \\ &= \mu_i X_i \quad \text{où} \quad \mu_i = P(\lambda_i)\lambda_i^{-1}. \end{aligned}$$

Dès lors, la famille (X_1, \dots, X_n) est une base de vecteurs propres de B qui est donc diagonalisable (on pourrait aussi remarquer que B est symétrique). D'après la question précédente $\text{Sp}(B) \subset \mathbb{R}^-$.

2.c) En reprenant la démonstration de l'encadrement de Rayleigh

$$\forall X = \sum_{i=1}^n x_i X_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^t XBX = \sum_{i=1}^n x_i^2 \mu_i \leq 0.$$

3.a)

$$\begin{aligned} \langle BX, X \rangle &= \langle A^{-1}P(A)X, X \rangle \\ &= \langle AX - (\lambda_1 + \lambda_n)X + \lambda_1 \lambda_n A^{-1}X, X \rangle \\ &= \langle AX, X \rangle - (\lambda_1 + \lambda_n) \langle X, X \rangle + \lambda_1 \lambda_n \langle A^{-1}X, X \rangle \end{aligned}$$

On a vu que $\langle BX, X \rangle \leq 0$ donc $Q(1) \leq 0$. On en déduit que le polynôme Q , de degré 2 avec un coefficient dominant positif prend des valeurs négatives. Il y a des racines réelles et le discriminant de Q est donc positif. Le résultat s'en déduit.

3.b) On en déduit que

$$\langle AX, X \rangle \langle A^{-1}X, X \rangle \leq \frac{1}{4} \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{\lambda_1 \lambda_n} \|X\|^4.$$

Ce qui conclut car

$$\begin{aligned} \left(\kappa(A) + \frac{1}{\kappa(A)} \right)^2 &= \kappa(A)^2 + \frac{1}{\kappa(A)^2} + 2 \\ &= \frac{\lambda_n}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_n} + 2 = \frac{(\lambda_n + \lambda_1)^2}{\lambda_1 \lambda_n}. \end{aligned}$$

Sujet 7
Matrices de permutations

- *Question de cours.* Donner la définition de l'injectivité, la surjectivité et la bijection d'une application.

Soit n un entier supérieur à 2.

On considère le sous-ensemble \mathcal{S} des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices A vérifiant les deux propriétés suivantes :

i) Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors $a_{i,j} \geq 0$, pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$;

ii) Si on note $U = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $AU = U$.

Ces matrices sont dites stochastiques.

- ☞ Est-ce que \mathcal{S} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
 - Montrer que le produit de deux éléments de \mathcal{S} est un élément de \mathcal{S} .
 - ☞ Soit $A \in \mathcal{S}$ inversible. Son inverse A^{-1} est-il élément de \mathcal{S} ?
- Donner un programme Python qui prend en argument une matrice carrée et teste si elle appartient à \mathcal{S} .
- Soit E un espace vectoriel réel de dimension n . Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Pour σ une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ (on parle aussi de permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$), on définit l'endomorphisme f_σ de E par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}.$$

On note A_σ la matrice de f_σ dans la base \mathcal{B} .

- Montrer que A_σ appartient à \mathcal{S} .
 - Montrer que A_σ est inversible et que A_σ^{-1} est élément de \mathcal{S} .
- Dans cette question, soit A un élément de \mathcal{S} inversible tel que son inverse appartienne à \mathcal{S} . Montrer qu'il existe une permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telle que $A = A_\sigma$.

Indications

- 1.a) Non, à cause de la condition i).
 1.c) Non, trouver un contre-exemple pour $n = 2$ car on dispose d'une formule explicite de l'inverse.

1.a) \mathcal{S} n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puisqu'il ne contient pas la matrice nulle.

1.b) Soient $A, B \in \mathcal{S}$.

$$[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^n [A]_{i,k} [B]_{k,j} \geq 0,$$

et $AB(U) = AU = U$.

D'où la conclusion.

1.c) La réponse est en général négative. Par exemple, la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

est stochastique inversible et son inverse

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

n'est pas stochastique.

2.

```

1 def test(A):
2     [n,p]=np.shape(A)
3     if n!=p:
4         return "La matrice nest pas carrée"
5     for i in range(n):
6         for j in range(p):
7             if A[i,j]<0:
8                 return False
9     U=np.ones([n,1])
10    if np.sum(np.dot(A,U))==U==n:
11        # np.dot(A,U)==U teste sur chaque ligne
12        return True
13    return False
    
```

3.a) Chaque ligne et chaque colonne de A_σ ne contient qu'un seul 1, les autres éléments étant nuls et deux 1 ne peuvent se trouver sur une même colonne. On a alors $A_\sigma \in \mathcal{S}$.

3.b) On remarque que $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma \circ \sigma'}$, ce qui montre que le produit de deux matrices de permutation est une matrice de permutation. Ainsi $f_\sigma^{-1} = f_{\sigma^{-1}} \in \mathcal{S}$.

3.c) Soient A, B deux éléments de \mathcal{S} tels que $BA = I$. On note $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$. On a alors pour $i \neq j$,

$$\sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j} = 0, \text{ et } \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,i} = 1.$$

→ Les éléments de A et B étant positifs, la première relation donne pour tout $i \neq j$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $b_{i,k} a_{k,j} = 0$.

→ Soit k fixé. Il existe $i_k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $b_{i_k,k} \neq 0$ (autrement B ne serait pas inversible). Ainsi, pour tout $j \neq i_k$, on a : $a_{k,j} = 0$.

Comme $\sum_{j=1}^n a_{k,j} = 1$, il vient $a_{k,i_k} = 1$. Cet indice i_k est unique (autrement A posséderait deux 1 sur sa ligne k et ne serait pas stochastique).

On définit ainsi une application $i \rightarrow i_k$ injective de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même, donc bijective, c'est-à-dire une permutation. Ainsi, la matrice A est une matrice de permutation tout comme son inverse.

Sujet 8
Dimension maximale pour une matrice définie positive

- *Question de cours.* Donner la définition de la dimension d'un espace vectoriel.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On note $\pi(A)$ le cardinal de l'ensemble des valeurs propres strictement positives de A , comptées avec leurs multiplicités.
- On dit qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie la condition (\mathcal{C}_A) si

$$\forall X \in F \setminus \{0_{n,1}\}, \quad {}^tXAX > 0.$$

- On note $d(A)$ la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant la condition (\mathcal{C}_A) , c'est-à-dire :

$$d(A) = \max \{ \dim F \mid F \text{ s.e.v de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ vérifiant } (\mathcal{C}_A) \}.$$

1. Exemple

Dans cette question uniquement on suppose $n = 2$ et A diagonalisable.

- Exprimer le déterminant et la trace de A en fonction des valeurs propres de A .
 - Calculer $\pi(A)$ si $\det(A) < 0$.
 - Même question avec $\det(A) > 0$ et $\text{Tr}(A) \leq 0$.
- 2.** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles qu'il existe une matrice P inversible vérifiant $A = {}^tPBP$.
Montrer que $d(B) \geq d(A)$ puis que $d(B) = d(A)$.

3. Le cas diagonal

Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice diagonale.

Sans perte de généralité, on pourra supposer que les $\pi(D)$ premiers éléments diagonaux de D sont strictement positifs et les suivants négatifs.

- Construire un sous-espace vectoriel F_D de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension $\pi(D)$ vérifiant la condition (\mathcal{C}_D) .
En déduire que $d(D) \geq \pi(D)$.
 - On veut établir que $\pi(D) = d(D)$. On raisonne par l'absurde, en supposant l'existence d'un sous-espace vectoriel G de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension $\dim G > \pi(D)$ vérifiant la condition (\mathcal{C}_D) .
 - Montrer $\dim (F_D^\perp \cap G) \geq 1$ où F_D^\perp désigne l'orthogonal de F_D dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.
 - À l'aide d'un élément de $F_D^\perp \cap G$, déduire une contradiction et conclure.
- 4.** Justifier que pour toute matrice symétrique M ,

$$\pi(M) = d(M).$$

Exhiber un sous-espace vectoriel F de dimension $\pi(M)$ et vérifiant la condition (\mathcal{C}_M) .

1.a) En considérant la fonction polynomiale de degré 2

$$\lambda \in \mathbb{R} \mapsto \det(A - \lambda I_2)$$

et de coefficient dominant 1, on montre que les racines sont les valeurs propres λ_1, λ_2 et par les relations coefficients racines

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \quad \text{et} \quad \text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2.$$

1.b) Si le déterminant est strictement négatif, les deux valeurs propres de A sont de signes opposés et non nulles, donc

$$\pi(A) = 1.$$

1.c) Dans ce second cas, les valeurs propres sont de même signe. Le signe est donné alors par la trace. On obtient donc deux valeurs propres strictement négatives

$$\pi(A) = 0.$$

2.a) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension $d(A)$ vérifiant la condition (\mathcal{C}_A) . Posons F_P le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par :

$$F_P = \{PX : X \in F\}$$

Comme P est inversible, on dispose de l'isomorphisme

$$\begin{cases} F & \longrightarrow & F_P \\ X & \longmapsto & PX \end{cases}$$

En particulier, $\dim F_P = \dim F = d(A)$. De plus, pour tout $Y = PX \in F_P \setminus \{0_{n,1}\}$

$$\begin{aligned} {}^tYBY &= {}^t(PX)BPX = {}^tX{}^tPBPX \\ &= {}^tXAX > 0 \quad \text{car } X = P^{-1}Y \in F \setminus \{0_{n,1}\}. \end{aligned}$$

Dès lors, F_P vérifie la condition (\mathcal{C}_B) . Par définition de $d(B)$ comme maximum

$$\dim F_P \leq d(B).$$

D'où $d(A) \leq d(B)$.

Par symétrie du problème, on considérant P^{-1} au lieu de P et en échangeant le rôle de A et B, on trouve $d(B) \leq d(A)$ puis

$$d(A) = d(B).$$

3.a) En reprenant l'indication de l'énoncé, on peut convenir que

$$D = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_{\pi(D)}, d_{\pi(D)+1}, \dots, d_n)$$

avec

$$\forall i \in [1; \pi(D)] \quad d_i > 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\pi(D) + 1; n] \quad d_i \leq 0.$$

On pose alors $F_D = \text{Vect}(E_1, \dots, E_{\pi(D)})$

où (E_1, \dots, E_n) désigne la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Avec ce choix, F_D est un sous-espace de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension

$\pi(D)$ tel que pour tout $X = \sum_{i=1}^{\pi(D)} x_i E_i \in F_D$ avec $X \neq 0_{n,1}$

on ait

$$\begin{aligned} {}^tXDX &= \left(\sum_{i=1}^{\pi(D)} x_i {}^tE_i \right) D \left(\sum_{j=1}^{\pi(D)} x_j E_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\pi(D)} \sum_{j=1}^{\pi(D)} x_i x_j {}^tE_i D E_j \\ &= \sum_{i=1}^{\pi(D)} \sum_{j=1}^{\pi(D)} x_i x_j {}^tE_i \cdot (d_j E_j) \\ {}^tXDX &= \sum_{i=1}^{\pi(D)} d_i x_i^2 > 0 \end{aligned}$$

car ${}^tE_i E_j = \delta_{ij}$, $d_i > 0$ pour tout $i \in [1; \pi(D)]$ et tous les x_i ne font pas simultanément nuls ($X \neq 0_{n,1}$).

3.b) Par construction $\dim F_D = \pi(D)$ et

$$\dim F_D^\perp = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \dim F_D = n - \pi(D)$$

De plus, supposons qu'il existe un sous-espace vectoriel G de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension strictement supérieure à $\pi(D)$ vérifiant la condition (\mathcal{C}_D) . On a $F_D^\perp + G \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\dim(F_D^\perp + G) \leq n$ et d'après la formule de Grassmann

$$\underbrace{\dim(F_D^\perp + G)}_{\leq n} = \underbrace{\dim F_D^\perp}_{=n-\pi(D)} + \underbrace{\dim G}_{\geq \pi(D)} - \dim(F_D^\perp \cap G).$$

Nécessairement $\dim(F_D^\perp \cap G) \geq 1$.

Il existe donc une matrice $X_0 \in F_D^\perp \cap G$ non nulle.

→ Comme $X_0 \in G$ et G vérifie la condition (\mathcal{C}_D) , on a

$${}^tX_0 D X_0 \geq 0.$$

→ On a aussi $X_0 \in F_D^\perp \setminus \{0_{n,1}\}$. Or, en reprenant les questions précédentes, on a

$$F_D^\perp = \text{Vect}(E_{\pi(D)+1}, \dots, E_n).$$

Précisons que le cas $\pi(D) = n$ est exclu puisqu'on aurait

$$d(D) \geq \dim G > \pi(D) = n.$$

En particulier, il existe des réels $x_{0,\pi(D)+1}, \dots, x_{0,n}$ non tous nuls tels que

$$X_0 = \sum_{i=\pi(D)+1}^n x_{0,i} E_i.$$

En reprenant le calcul de la question précédente, on obtient

$${}^tX_0 D X_0 = \sum_{i=\pi(D)+1}^n \underbrace{d_i}_{< 0} x_{0,i}^2 < 0.$$

Il y a une contradiction, il n'existe pas de tel sous-espace vectoriel G. En conclusion, $\pi(D) = d(D)$.

4. D'après le théorème spectral, la matrice symétrique réelle M est diagonalisable dans une base orthonormée. Il existe donc P orthogonale, D diagonale telles que

$$D = {}^tPMP = P^{-1}MP$$

les matrices M et D ont même spectre. En reprenant les questions précédentes

$$\pi(M) = \pi(D) = d(D) = d(M).$$



Et on peut poser $F_M = \text{Vect}(PE_1, \dots, PE_{\pi(M)})$.

Sujet 9 Exemple de matrice symétrique et recherche d'extrema

Dans tout l'exercice, on associe à tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la matrice-colonne $U = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

On considère des réels a, b et c strictement positifs et la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -b & b & a \\ b & -c & c \\ a & c & -a \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que l'application φ définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, à valeurs réelles, telle que $\varphi(u, v) = {}^tUAV$ est une forme bilinéaire symétrique.
2.
 - a) Soit $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Déterminer les signes de $\varphi(u, u)$ et $\varphi(v, v)$ respectivement. L'application φ est-elle un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 ?
 - b)  Montrer que A admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative. (on ne cherchera pas à les calculer).
3. Soit f la fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} définie par : $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$.
 - a) Montrer qu'un point critique $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de f vérifie les conditions : $\bar{x}\bar{y}\bar{z} = -1, \bar{x} < 0, \bar{y} < 0$ et $\bar{z} < 0$. Donner un point critique de f .
 - b)  La fonction f admet-elle un extremum local ?

Indications

2.b) Prouver et utiliser l'encadrement de Rayleigh

$$\|X\|^2 \min \text{Sp}(A) \leq {}^tXAX \leq \|X\|^2 \max \text{Sp}(A).$$

3.b) Justifier que $\nabla^2 f(\hat{x}) = A$ avec les choix

$$a = e^x > 0, \quad b = e^y > 0, \quad c = e^z > 0.$$

1. Pas de difficultés.

2.a) Calculons

$${}^tUA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b & b & a \\ b & -c & c \\ a & c & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & b & a \end{bmatrix}$$

puis ${}^tUAU = -b < 0$

On calcule de même

$${}^tVA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b & b & a \\ b & -c & c \\ a & c & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$$

puis ${}^tVAV = a + b + c > 0.$

Le fait que $\varphi(u, u) < 0$ contredit la condition de positivité d'un produit scalaire. L'application φ n'est pas un produit scalaire.

2.b) Vérifier l'encadrement de Rayleigh :

$$\forall U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \quad \min \text{Sp}(A) {}^tUU \leq {}^tUAU \leq \max \text{Sp}(A) {}^tUU.$$

On en déduit que si le spectre de A est inclus dans \mathbb{R}^+ ou \mathbb{R}^- alors

$$u \mapsto \varphi(u, u) = {}^tUAU$$

est de signe constant. Par contraposé, la fait que le signe ne soit pas constant implique l'existence d'une valeur propre strictement positive et une autre strictement négative.

3.a) Vérifier que f est de classe \mathcal{C}^2 .

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x, y, z) &= e^y + ze^x, & \partial_2 f(x, y, z) &= e^z + xe^y \\ \partial_3 f(x, y, z) &= e^x + ye^z. \end{aligned}$$

Ainsi $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est point critique si et seulement si

$$\begin{cases} e^y + e^x z = 0 \\ e^z + e^y x = 0 \\ e^x + e^z y = 0 \end{cases}$$

Comme l'exponentielle est une fonction strictement positive, on a nécessairement $x < 0, y < 0, z < 0$. On effectue $L_1 \leftarrow xyL_1$

$$\begin{cases} 0 = xye^y + e^x xyz \\ xe^y = -e^z \\ ye^z = -e^x. \end{cases}$$

La première ligne devient :

$$0 = -ye^z + e^x xyz = e^x + e^x xyz = e^x(1 + xyz).$$

En particulier $xyz = -1$. Une solution est

$$(x, y, z) = (-1; -1; -1).$$

3.b) On a

$$\begin{aligned} \partial_{11}^2 f(x, y, z) &= ze^x, & \partial_{12}^2 f(x, y, z) &= e^y & \partial_{13}^2 f(x, y, z) &= e^x \\ \partial_{22}^2 f(x, y, z) &= xe^y, & \partial_{23}^2 f(x, y, z) &= e^z & \partial_{33}^2 f(x, y, z) &= ye^z. \end{aligned}$$

Les autres dérivées partielles s'obtiennent par le théorème de Schwarz. Ainsi

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{bmatrix} ze^x & e^y & e^x \\ e^y & xe^y & e^z \\ e^x & e^z & ye^z \end{bmatrix}.$$

Si (x, y, z) est point critique, on simplifie par

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{bmatrix} -e^y & e^y & e^x \\ e^y & -e^z & e^z \\ e^x & e^z & -e^x \end{bmatrix}.$$

On retrouve l'expression de A avec

$$a = e^x > 0, \quad b = e^y > 0 \quad \text{et} \quad c = e^z > 0.$$

On en déduit que le spectre de $\nabla^2 f(x, y, z)$ contient une valeur propre strictement négative et une valeur propre strictement positive. les points critiques sont donc des points selles. Il n'y a pas d'extremum local.

Sujet 10
Fonctions absolument croissantes

• *Questions de cours.*

Énoncer le théorème de convergence monotone pour les suites.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Une fonction $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est dite *absolument croissante* (en abrégé A.C.) sur $]a; b[$ si elle est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]a; b[$ et vérifie la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]a; b[, \quad f^{(n)}(x) \geq 0.$$

1. a) Vérifier que la fonction $h : x \mapsto -\ln(1-x)$ est A.C. sur $]0; 1[$.
- b) Donner des exemples de fonctions A.C. sur tout intervalle de \mathbb{R} .

Soient b un réel strictement positif, f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0; b[$ et A.C. sur $]0; b[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose R_n la fonction définie par :

$$\forall x \in [0, b[, \quad R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

2. Exprimer $R_n(x)$ sous forme d'une intégrale.
3. Justifier que la série de terme général $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ converge pour tout $x \in [0; b[$.
On note $S(x)$ sa somme. Montrer que, pour tout $x \in [0; b[$, on a $S(x) \leq f(x)$.
4. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{R_n(x)}{x^n}$ est croissante sur $]0; b[$. Quelle est sa limite quand x tend vers 0 par valeurs supérieures ?
- b) Montrer que, si $0 < x < y < b$, alors $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y)$.
- c) En déduire que $S = f$ sur $[0, b[$.
5. Pour $x \in]0, 1[$, écrire $\ln(1-x)$ comme la somme d'une série de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1.a) Par récurrence, on trouve : $h^{(n)}(x) = (n-1)/(1-x)^n \geq 0$ sur $]0; 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc h est absolument croissante sur $]0; 1[$.

1.b) Par exemple, la fonction exponentielle, ou toute fonction constante positive.

2. Utilisons la formule de Taylor avec reste intégral. La fonction f étant A.C., en particulier, elle est de classe \mathcal{C}^{n+1} et :

$$\forall x \in [0; b[, \quad R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

3. Pour x fixé. En utilisant la question précédente, on constate que la somme partielle $S_n(x)$ vérifie $f(x) - S_n(x) = R_n(x) \geq 0$. D'où $S_n(x) \leq f(x)$. La série converge car la suite des sommes partielles est croissante et majorée. Par passage à la limite, on obtient : $S(x) \leq f(x)$.

4.a) Pour tous x et y tels que $0 < x < y$:

$$\begin{aligned} \frac{R_n(x)}{x^n} &= \frac{1}{x^n} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^n dt \\ &\leq \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \left(1 - \frac{t}{y}\right)^n dt \leq \int_0^y \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \left(1 - \frac{t}{y}\right)^n dt \leq \frac{R_n(y)}{y}. \end{aligned}$$

Autre méthode. Le changement de variable affine $t \mapsto u = \frac{t}{x}$ donne :

$$\frac{R_n(x)}{x^n} = \frac{x}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(xu)(1-u)^n du$$

qui est une fonction croissante de x comme produit de fonctions positives et croissantes. Ainsi φ est croissante sur $]0; b[$.

- D'autre part, on sait (formule de Taylor-Young) que : $R_n(x) = o(x^n)$ au voisinage de 0, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 0$.

4.b) Par croissance de $x \mapsto \frac{R_n(x)}{x^n}$ et la majoration $R_n \leq f$, on a, pour $0 < x < y$:

$$0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^n R_n(y) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y)$$

4.c) On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y) = 0$, car $0 < \frac{x}{y} < 1$. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) - S_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0,$$

donc $f = S$ sur $]0; b[$, et $S(0) = f(0)$.

5. La fonction h est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0; 1[$, A.C., avec $h(0) = 0$ et pour $n \geq 1$, $h^{(n)}(0) = (n-1)!$ et la question précédente donne

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{sur } [0; 1[.$$

Sujet 11
Longueur d'une courbe

- *Questions de cours.* Rappeler le principe de la méthode des rectangles pour approximer une intégrale.

On définit les fonctions sinus et cosinus hyperboliques sur \mathbb{R} par :

$$\operatorname{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

- Étudier rapidement ces deux fonctions et esquisser leur représentation graphique, dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
 - Montrer que l'on a : pour tout réel t , $\operatorname{ch}(t)^2 - \operatorname{sh}(t)^2 = 1$.
- Pour toute fonction f de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle $[a; b]$, on admet que la longueur $L(f)$ de la courbe représentative de f , dans le plan rapporté à un repère orthonormé, est donnée par :

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

- Calculer la longueur de la courbe de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$, sur un intervalle $[a, b]$ donné de \mathbb{R} .
- Montrer que la fonction $\psi : t \rightarrow \sqrt{1 + t^2}$ est convexe sur \mathbb{R} . En déduire :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \psi(t) \geq \psi(s) + (t - s)\psi'(s)$$

- On suppose désormais que f est une fonction convexe de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle $[a, b]$ et que g est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$ telle que $g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ et qui vérifie : $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$. En utilisant l'inégalité précédente, prouver que

$$L(f) \leq L(g).$$

3. Python

- Écrire une fonction qui prend en argument deux points A (x_A, y_A) et B (x_B, y_B) de \mathbb{R}^2 et renvoie la distance entre A et B.
- Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$.
Afin d'approximer la longueur de la courbe représentative de f , on découpe l'intervalle $[a; b]$ régulièrement

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Puis, on somme les distances entre les points $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ pour tout indice i .

Compléter le programme suivant qui prend en entrée une fonction f , un entier n et renvoie une approximation de $L(f)$.

```

1 import numpy as np
2
3 def L(f, n, a, b) :
4     x = np.linspace(a, b, n) # abscisses des points
5     y = f(x)                 # ordonnées
6
7     d = 0
8     for i in range( ... ) :
9
10        d = ...
11
12    return d

```

Éléments de correction

1.a) Les fonctions sont dérivables avec pour tout $t \in \mathbb{R}$,

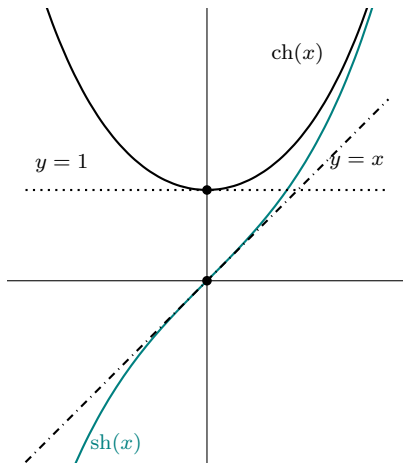
$$\operatorname{sh}'(t) = \operatorname{ch}(t) \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}'(t) = \operatorname{sh}(t).$$

La fonction $t \mapsto \operatorname{sh}(t)$ est donc croissante sur \mathbb{R} , admet un point d'inflexion en $t = 0$. Elle est concave sur \mathbb{R}^- et convexe sur \mathbb{R}^+ . Enfin

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{sh}(t) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \operatorname{sh}(t) = -\infty.$$

Notons d'ailleurs que sh est impaire et que l'équation de la tangente en 0 est $y = x$.

La fonction $t \mapsto \operatorname{ch}(t)$ est paire. Sa dérivée est positive sur \mathbb{R}^+ ; elle y est donc croissante vers $+\infty$. Enfin elle est convexe sur \mathbb{R} et l'équation de la tangente en 0 est $y = 1$.



1.b) On a $\operatorname{ch}(t) + \operatorname{sh}(t) = e^t$, $\operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(t) = e^{-t}$ et l'identité remarquable

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t) &= \\ (\operatorname{ch}(t) + \operatorname{sh}(t))(\operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(t)) &= e^t e^{-t} = 1. \end{aligned}$$

2.a) La longueur de la courbe $t \mapsto \operatorname{ch}(t)$ (appelée chaînette) sur l'intervalle $[a; b]$ est donnée par :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \operatorname{sh}(t)^2} dt = \int_a^b \underbrace{\operatorname{ch}(t)}_{\geq 0} dt = \operatorname{sh}(b) - \operatorname{sh}(a).$$

2.b) La fonction ψ est deux fois dérivable avec

$$\psi'(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{et} \quad \psi''(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} > 0.$$

Donc ψ est convexe sur l'intervalle \mathbb{R} .

Sa courbe représentative reste au-dessus de sa tangente en tout point s , ce qui donne l'inégalité demandée.

2.c) On utilise l'inégalité précédente avec $t = g'(x)$ et $s = f'(x)$. Il vient :

$$\begin{aligned} L(g) &= \int_a^b \psi(g'(x)) dx \\ &\geq \int_a^b (\psi(f'(x)) + (g'(x) - f'(x)) \psi'(f'(x))) dx \\ &\geq L(f) + \int_a^b (g'(x) - f'(x)) \psi'(f'(x)) dx \\ &\geq L(f) + [(g(x) - f(x)) \psi'(f'(x))]_a^b \\ &\quad - \int_a^b (g(x) - f(x)) \psi''(f'(x)) f''(x) dx \\ &\geq L(f) + \int_a^b (f(x) - g(x)) \psi''(f'(x)) f''(x) dx \geq L(f). \end{aligned}$$

La dernière intégrale étant positive puisque $f \geq g$ et ψ et f sont convexes.

3.a) Pour rappel, $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.

```
def distance(xA, yA, xB, yB) :
    return ((yB-yA)**2 + (xB-xA)**2)**(1/2)
```

3.b)

```
import numpy as np

def L(f,n,a,b) :
    x = np.linspace(a,b,n)
    # abscisses des points
    y = f(x)
    # ordonnées
    d=0
    for i in range(len(x)-1) :
        d += distance(x[i], f_x[i], x[i+1], f_x[i+1])
    # On somme les distances
    # entre chaque point créé
    return d
```

Sujet 12
Estimation de l'erreur après interpolation polynomiale

Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on définit le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ par $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon. Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et (a_1, \dots, a_n) une famille de nombres réels distincts deux à deux.

1. a) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$L_i(a_j) = \delta_{i,j}.$$

- b) Montrer que la famille $(L_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

2. Soit $\pi : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[x], \quad \pi(P) = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i.$$

- a) Montrer que π est un projecteur de $\mathbb{R}[x]$.
 b) Déterminer le noyau et l'image de π .
 c) On note

$$F = \left\{ Q \prod_{i=1}^n (x - a_i) : Q \in \mathbb{R}[x] \right\}.$$

Montrer que $F \oplus \mathbb{R}_{n-1}[x] = \mathbb{R}[x]$.

- d) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

3. Soit $\varepsilon : \mathbb{R}_{n-1}[x] \rightarrow \mathbb{R}^n$, définie par

$$\varepsilon(P) = (P(a_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}.$$

- a) Montrer que ε est un isomorphisme.
 b) Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (une application de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$). Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que $P(a_i) = f(a_i)$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Ce polynôme s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction f aux points (a_1, \dots, a_n) .

4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$. Soient $f \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R})$, a_1, a_2, \dots, a_n tels que $a \leq a_1 < \dots < a_n \leq b$ et P le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f et aux points (a_1, \dots, a_n) .

- a) Soit $x \in [a, b] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ et K réel. On définit la fonction $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$t \mapsto f(t) - P(t) - K \prod_{i=1}^n (t - a_i).$$

Montrer qu'il existe K tel que $\varphi(x) = 0$.

- b) Montrer que pour cette valeur de K , il existe $\zeta \in [a, b]$ tel que $\varphi^{(n)}(\zeta) = 0$

- c) Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, on a :

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\prod_{i=1}^n |x - a_i|}{n!} \sup_{[a,b]} |f^{(n)}|.$$

Les polynômes $(L_i)_i$ sont les polynômes interpolateurs de Lagrange.

1.a) \rightarrow Existence

Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on pose

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{(x - a_j)}{(a_i - a_j)}$$

de sorte que tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a bien $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ et L_i de degré $n - 1$.

\rightarrow Unicité

Soit $N_i \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $N_i(a_j) = \delta_{i,j}$. Si on pose $Q_i = N_i - L_i$, on constate que Q_i est de degré au plus n avec pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$Q_i(a_j) = (N_i - L_i)(a_j) = \delta_{i,j} - \delta_{i,j} = 0.$$

Le polynôme Q a au moins n racines et degré inférieur à $n - 1$. C'est donc le polynôme nul et $N_i = L_i$. L'unicité est établie.

Remarque. Une autre possibilité est d'établir l'isomorphisme

$$f : \mathbb{Q} \in \mathbb{R}_{n-1}[x] \mapsto (Q(a_1), Q(a_2), \dots, Q(a_n)).$$

On a alors $L_i = f^{-1}(e_i)$ où e_i est le i -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n .

1.b) Soit $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0_{\mathbb{R}[x]}$.

Alors, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(a_j) = 0$, soit $\lambda_j = 0$.

Ainsi, la famille $(L_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est libre et de cardinal n : c'est donc une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

2.a) L'application π est linéaire. Pour montrer que c'est un projecteur, il suffit d'établir que

$$\pi \circ \pi(P) = \pi(P).$$

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. Comme $\pi(P) = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i$, on obtient pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\pi(P)(a_j) = P(a_j)$. Ainsi

$$\pi(\pi(P)) = \sum_{i=1}^n \pi(P)(a_i) L_i = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i = \pi(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[x].$$

Ce qui conclut.

2.b) En anticipant sur la notation de la question suivante, montrons que

$$\text{Ker } \pi = F \quad \text{où} \quad F = \left\{ \prod_{i=1}^n (x - a_i) Q \mid Q \in \mathbb{R}[x] \right\}.$$

L'inclusion $F \subset \text{Ker } \pi$ est claire. Réciproquement, si $P \in \text{Ker } \pi$, alors

$$\sum_{i=1}^n P(a_i) L_i = 0_{\mathbb{R}[x]}.$$

Comme la famille $(L_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est libre, on a nécessairement pour tout indice i , $P(a_i) = 0$. Les réels a_i sont donc racines de P qui est donc factorisable par le polynôme $\prod_{i=1}^n (x - a_i)$.

L'inclusion réciproque est ainsi établie.

• Justifions maintenant que $\text{Im } \pi = \mathbb{R}_{n-1}[x]$.

Comme les polynômes $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, on a directement l'inclusion $\text{Im } \pi \subset \mathbb{R}_{n-1}[x]$. Pour l'inclusion réciproque, on choisit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ et on constate que

$$\pi(P) = P.$$

En effet, la différence $\pi(P) - P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ et les n réels $(a_i)_i$ sont racines. La différence est donc le polynôme nul. Ce qui conclut par double inclusion.

2.c) On sait que pour un projecteur, image et noyau sont supplémentaires.

2.d) D'après la question 2.a), les coordonnées de P dans la base $(L_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$

$$\text{sont } (P(a_i))_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}.$$

3.a) ON vérifie que ε est linéaire.

Montrons que ε est injective. Soit $P \in \text{Ker } \varepsilon$. Ainsi pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $P(a_i) = 0$. Ainsi, P est de degré au plus $n - 1$ et possède n racines, soit $P = 0_{\mathbb{R}[x]}$. Comme $\dim \mathbb{R}_{n-1}[x] = \dim \mathbb{R}^n = n$ et que ε est une application linéaire injective, ε est bijectif.

3.b) Soit f une fonction à valeurs réelles. Comme $(f(a_i))_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \in \mathbb{R}^n$ et que ε est bijective, d'après la question précédente, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ et un seul tel que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $P(a_i) = f(a_i)$.

4.a) Comme x n'est pas l'un des a_i , on peut choisir

$$K = \frac{f(x) - P(x)}{(x - a_1) \dots (x - a_n)}.$$

4.b) La fonction φ possède au moins $n + 1$ zéros, donc, comme f est de classe \mathcal{C}^n , en appliquant plusieurs fois le théorème de Rolle, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $\varphi^{(n)}(\xi) = 0$.

4.c) Ainsi, $f^{(n)}(\xi) - n! \times K = 0$.

Comme $|f^{(n)}|$ est continue sur le segment $[a, b]$, elle admet une borne supérieure (qui est même un maximum). D'où, pour $x \notin \{a_1, \dots, a_n\}$:

$$|f(x) - P(x)| \leq \sup_{[a; b]} |f^{(n)}| \frac{\prod_{i=1}^n |x - a_i|}{n!}.$$

Le résultat est encore vrai si x est l'un des a_i , d'où la conclusion.

Sujet 13
Irrationalité de π

- *Question de cours.* Rappeler la définition et la convergence des sommes de Riemann.

On cherche à démontrer par l'absurde que π est irrationnel, c'est-à-dire qu'il ne peut s'exprimer comme le quotient de deux entiers.

On pose $\pi = p/q$ où p et q sont deux entiers. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme P_n et l'intégrale I_n par

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (p - qx)^n \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^\pi P_n(t) \sin(t) dt.$$

1. Expliciter les coefficients de P_n .
2. Écrire un programme python qui prend en argument n et renvoie une approximation de I_n .
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ (où $P_n^{(k)}$ désigne le $k^{\text{ème}}$ polynôme dérivé de P_n).
4. Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}$.
5. Établir la convergence de la suite I_n .
6. Conclure.

Éléments de correction

Sujets à dominante probabilité

(FORMAT ESCP)

Sujet 14 Estimation du nombre d'éléments d'une urne

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On sait que N est au moins égal à deux, mais on ne connaît pas sa valeur exacte et on cherche à l'estimer. Pour cela, on effectue n tirages avec remise ($n \in \mathbb{N}^*$) et on note Z_k le numéro de la boule obtenue au k -ième tirage ($1 \leq k \leq n$). On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k$.

Donner l'expression d'un estimateur sans biais et convergent de N , fonction de M_n .

2. On note $S_n = \text{Max}(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de S_n .

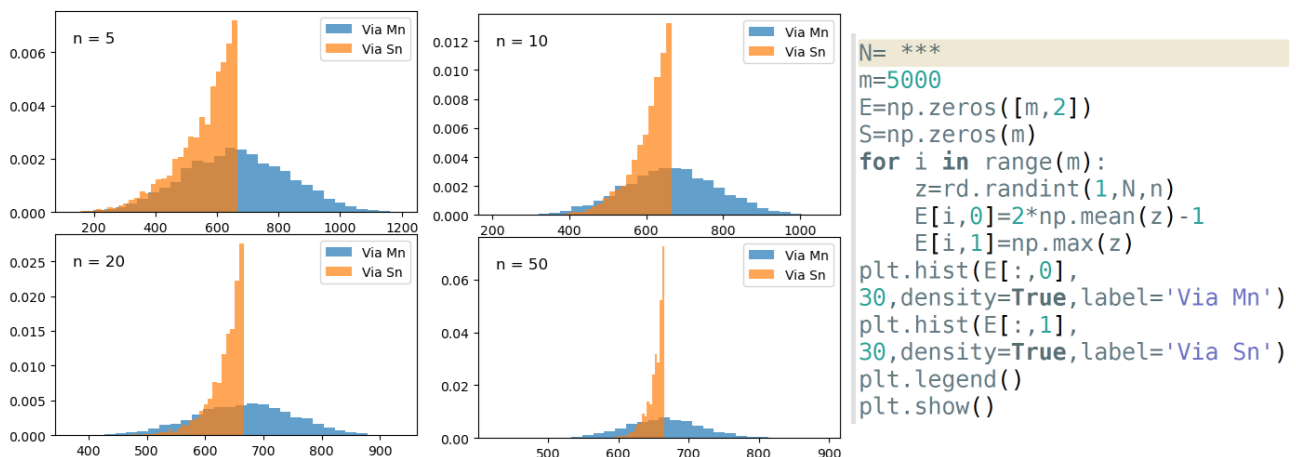
b) Montrer que pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\llbracket 1, N \rrbracket$, on a la relation :

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=1}^N \mathbf{P}([Y \geq k]).$$

c) En déduire que : $\mathbf{E}(S_n) \geq N - \frac{N}{n+1}$.

d) En déduire que S_n est un estimateur de N , dont l'espérance converge vers N lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Discuter de la qualité de ces deux estimateurs à l'aide des résultats suivants.



1. Notons que par linéarité de l'espérance

$$\mathbf{E}(M_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(Z_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{N+1}{2} = \frac{N+1}{2}$$

car Z_k suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, N \rrbracket$. Notons aussi par indépendance des variables Z_k

$$\mathbf{V}(M_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(Z_k) = \frac{1}{n} \left(\frac{N^2 - 1}{12} \right)$$

On convient alors de poser $T_n = 2M_n - 1$ de sorte que

$$\mathbf{E}(T_n) = N \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(T_n) = \frac{\text{cste}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On sait alors que T_n est un estimateur convergent de N sans biais.

2.a) Un calcul classique donne par indépendance des Z_k : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_{S_n}(x) = F_{Z_1}(x)^n$. Pour une loi uniforme sur $\llbracket 1; N \rrbracket$, on peut exprimer la fonction de répartition à l'aide d'une partie entière

$$\forall x \in [1; N], \quad F_{Z_1}(x) = \left\lfloor \frac{x}{N} \right\rfloor.$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$F_{S_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \left\lfloor \frac{x}{N} \right\rfloor^n & \text{si } x \in [1; N]. \\ 1 & \text{si } x \geq N \end{cases}$$

2.b) La variable Y étant finie, elle admet une espérance et

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y) &= \sum_{k=1}^N k \mathbf{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^N k (\mathbf{P}(Y \geq k) - \mathbf{P}(Y \geq k+1)) \\ &= \sum_{k=1}^N k \mathbf{P}(Y \geq k) - \sum_{k=1}^N k \mathbf{P}(Y \geq k+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^N k \mathbf{P}(Y \geq k) - \sum_{k'=2}^{N+1} (k' - 1) \mathbf{P}(Y \geq k') \\ &= \sum_{k=1}^N k \mathbf{P}(Y \geq k) - \sum_{k=1}^N (k - 1) \mathbf{P}(Y \geq k) \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=1}^N \mathbf{P}(Y \geq k) \quad \text{car} \quad \mathbf{P}(Y \geq N+1) = 0.$$

2.c) On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(S_n) &= \sum_{k=1}^N \mathbf{P}(S_n \geq k) = \sum_{k=1}^N 1 - \mathbf{P}(S_n < k) \\ &= \sum_{k=1}^N (1 - F_{S_n}(k-1)) = N - \sum_{k=0}^{N-1} F_{S_n}(k). \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $\sum_{k=0}^{N-1} F_{S_n}(k) \leq \frac{N}{n+1}$:

Pour cela, on procède par comparaison somme/intégrale

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} F_{S_n}(k) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left\lfloor \frac{k}{N} \right\rfloor^n \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k^n}{N^n} \leq \frac{1}{N^n} \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} t^n dt \\ \sum_{k=0}^{N-1} F_{S_n}(k) &\leq \frac{1}{N^n} \int_0^N t^n dt = \frac{N}{n+1} \end{aligned}$$

Ce qui conclut.

2.d) Pour chaque indice i , $Z_i \leq N$. D'où $S_n \leq N$. On en déduit l'encadrement

$$N - \frac{N}{n+1} \leq \mathbf{E}(S_n) \leq N \quad \text{puis} \quad \mathbf{E}(S_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N.$$

3. L'estimateur S_n semble meilleur car son histogramme (en orange) est moins étalé que celui construit à partir de M_n . C'est le signe d'une variance plus faible et d'une probabilité plus importante d'avoir une valeur plus proche de la vraie valeur de N (ici $N = 666$ pour ce test).

Sujet 15
Autour du théorème de Pythagore

- *Question de cours.* Énoncer le théorème de Pythagore.

Soient E un espace vectoriel et $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ un produit scalaire sur E et $x \mapsto \|x\|$ la norme euclidienne sur E qui lui est associée. On considère :

- Un entier $n \geq 2$ et une famille $(v_j)_{1 \leq j \leq n}$ de vecteurs unitaires (c'est-à-dire de norme 1) de E .
- Une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ mutuellement indépendantes de même loi

$$X_i(\Omega) = \{-1; 1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = -1) = \frac{1}{2}.$$

- La variable aléatoire $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$U(\omega) = \|X_1(\omega)v_1 + X_2(\omega)v_2 + \cdots + X_n(\omega)v_n\|^2.$$

1. Exemples

- a) On suppose dans cette question que les vecteurs v_1, v_2, \dots, v_n sont deux à deux orthogonaux. Montrer que pour tout n -uplet $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1; 1\}^n$, on a

$$\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}.$$

- b) Proposer deux programmes Python. Le premier simule la variable X_1 et le second simule la variable U avec les deux vecteurs $v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (1/2, \sqrt{3}/2)$ dans \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire canonique. En déduire un programme donnant une approximation de $\mathbf{E}(U)$.

2. On revient au cas général de n vecteurs v_1, v_2, \dots, v_n .

- a) Déterminer la valeur exacte de $\mathbf{E}(U)$. En déduire qu'il existe un n -uplet $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1; 1\}^n$ tel que

$$\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| \leq \sqrt{n}.$$

- b) Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) Pour tout n -uplet $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, $\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}$;
ii) La famille $(v_j)_{1 \leq j \leq n}$ est orthonormée.

On commencera par prouver que, pour tout couple de vecteurs $(a, b) \in E^2$, on a

$$\|a + b\|^2 = \|a - b\|^2$$

si, et seulement si, a et b sont orthogonaux.

- c) En déduire que si les vecteurs v_1, v_2, \dots, v_n ne sont pas deux à deux orthogonaux, il existe un n -uplet $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1; 1\}^n$ tel que

$$\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| > \sqrt{n}.$$

1.a) En généralisant le sens direct dans le théorème de Pythagore à n vecteurs par récurrence, on a

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i|^2 \cdot \|v_i\|^2 = \sum_{i=1}^n 1 = n.$$

D'où le résultat.

1.b)

```
def norme_carre(V):
    return V[0]**2+V[1]**2

def simu_X():
    return (-1)**(rd.rand()<1/2)

def simu_U():
    v1=np.array([0,1])
    v2=np.array([1/2,3**(1/2)/2])
    V=simu_X()*v1+simu_X()*v2
    return norme_carre(V)

def approx_esp(m):
    s=0
    for i in range(m):
        s+= simu_U()
    return s/m
>>> approx_esp(2000000)
2.0020680686642685
```

2.a) Notons que

$$\mathbf{E}(X_i) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X_i) = \mathbf{E}(X_i^2) = \mathbf{E}(1) = 1.$$

Les variables X_i sont centrées et réduites. De plus, les variables X_i et X_j sont indépendantes pour $i \neq j$ avec dans ce cas

$$\mathbf{E}(X_i X_j) = \mathbf{E}(X_i) \mathbf{E}(X_j) = 0.$$

Ensuite par bilinéarité du produit scalaire et linéarité de \mathbf{E}

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(U) &= \mathbf{E} \left(\left\langle \sum_{j=1}^n X_j v_j, \sum_{i=1}^n X_i v_i \right\rangle \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_j X_i) \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^n \langle v_i, v_i \rangle = n. \end{aligned}$$

Si un tel n -uplet n'existait pas, on aurait $U > n$ et par croissance de l'espérance $\mathbf{E}(U) \geq n$. On en déduirait que U

est presque sûrement constante à U . Absurde.

2.b) On a

$$\begin{aligned} \|a + b\|^2 &= \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b \rangle \\ \|a - b\|^2 &= \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b \rangle \end{aligned}$$

Ainsi $\|a + b\|^2 = \|a - b\|^2$ si et seulement si $\langle a, b \rangle = 0$, si et seulement si a et b sont orthogonaux.

Supposons **i**). Soient $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ avec $i \neq j$. Posons

$$v = \sum_{k=1}^n v_k - v_i - v_j.$$

Avec les hypothèses de l'énoncé

$$\begin{cases} \|v + v_i - v_j\|^2 = n = \|v + v_i - v_j\|^2 \\ \|v - v_i + v_j\|^2 = n = \|v - v_i - v_j\|^2. \end{cases}$$

Le premier résultat avec les choix

$$(a, b) = (v + v_i, v_j) \quad \text{et} \quad (a, b) = (v - v_i, v_j)$$

donne
$$\begin{cases} \langle v + v_i, v_j \rangle = 0 & L_1 \\ \langle v - v_i, v_j \rangle = 0 & L_2 \end{cases}$$

Avec $(L_1 - L_2)/2$, on a $\langle v_i, v_j \rangle = 0$. Ceci prouve **ii**). La réciproque est une conséquence de la question 1.a).

2.c) Dans ce cas, la variable U n'est pas constante à \sqrt{n} . Comme il existe un n -uplet tel que

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i \right\| \leq \sqrt{n}.$$

et que, en moyenne, $\mathbf{E}(U) = \sqrt{n}$, nécessairement un n -uplet $(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)$ existe pour avoir

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i \right\| > \sqrt{n}.$$

Bonus Écrire un programme python qui détermine un n -uplet de $(\varepsilon_i)_i$.

Sujet 16
Loi de Rayleigh, loi du χ^2 et loi normale

- *Question de cours.* Que peut-on dire des sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle ?

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} n-1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i \neq j \end{cases} .$$

Soit B le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

- Justifier que la matrice A est diagonalisable.
- Vérifier que A admet deux valeurs propres dont une non-nulle.
- Justifier l'existence d'une matrice P orthogonale dont la dernière colonne est proportionnelle à B et telle que ${}^tPAP = D$, où D est une matrice diagonale à déterminer (on ne demande pas la matrice P).
- On note ${}^tP = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Montrer que pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n p_{i,j}^2 = 1$ et pour tout i de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n p_{i,j} = 0$.

2. On note q l'application de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad q(X) = \frac{1}{n} {}^tXAX.$$

On pose
$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j.$$

Montrer que $q(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$, puis $q(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} x_j \right)^2$.

On considère n variables aléatoires mutuellement indépendantes X_1, \dots, X_n , qui suivent une loi normale d'espérance m et de variance σ^2 . On pose

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad U_n = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

- Écrire un programme python qui prend en arguments n , m et σ et simule la variable U_n uniquement en utilisant la commande `rd.normal(0, 1, r)` qui renvoie sous forme de matrice ligne, r réalisations indépendantes d'une loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$.
- Pour tout i de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on pose $Y_i = \sum_{j=1}^n p_{i,j} X_j$.
 - Justifier que $\mathbf{E}(Y_i) = 0$ et $\mathbf{V}(Y_i) = \sigma^2$. Quelle est la loi de Y_i ?
 - On suppose que les Y_i sont mutuellement indépendantes. Montrer que U_n suit la loi gamma de paramètre $\frac{n-1}{2}$.

1.a) La matrice A est symétrique réelle : elle est diagonalisable dans une base orthonormée.

1.b) Si l'on note J la matrice Atila (tous les coefficients valent 1), on a $A = nI - J$. On constate alors que le rang $A - nJ$ est égal au rang de J , soit 1. Par la formule du rang, on en déduit que n est valeur propre et le sous-espace propre associé à cette valeur propre est $n - 1$. De plus, on constate que $AB = 0_{n,1}$ avec $B \neq 0_{n,1}$. Ainsi B est vecteur propre pour la valeur propre 1. L'espace propre associé est de dimension au moins 1. Par un compte des dimension, on retrouve le fait que la matrice symétrique A est diagonalisable et que le spectre est $\{0; n\}$.

1.c) C'est une conséquence du théorème spectral. Si on impose que la dernière colonne soit un vecteur propre (normé) pour la valeur propre 1, la matrice D demandée est la matrice diagonale $\text{diag}(n, \dots, n, 0)$.

1.d) La matrice P étant orthogonale, la relation ${}^tPP = I_n$ se traduit en disant que la famille des matrices colonnes de P forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Le fait que les colonnes soient normées donne :

$$\forall i \in [1; n], \quad \sum_{j=1}^n p_{i,j}^2 = {}^tC_i C_i = 1.$$

En suite les C_1, \dots, C_{n-1} , premières colonnes de la matrice P sont orthogonales à la dernière colonne et donc à B . Ce qui donne les relations :

$${}^tC_i B = \sum_{j=1}^n p_{i,j} = 0.$$

2. À partir de $A = nI_n - J$, on a

$$q(X) = {}^tXX - \frac{1}{n}{}^tXJX.$$

On explicite :

$$q(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n x_j \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right)^2$$

De plus, l'écriture de q dans la base orthonormée de diagonalisation donne

$$q(X) = {}^t(PX)D(PX).$$

En explicitant, on obtient bien la relation

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} x_j \right)^2.$$

3.

```
def simu_Un(sigma,m,n):
    x=sigma*rd.normal(0,1,n)+m
    # règle de transformation affine loi normale
    u=0
    m=np.mean(x)
    for i in range(n):
        u+=(x[i]-m)**2
    return u/(2*sigma**2)
```

4.a) On a $\mathbf{E}(Y_i) = 0$ par linéarité de l'espérance et la relation $\sum_{j=1}^n p_{i,j} = 0$. Par indépendance des variables aléatoires (X_i) , il vient :

$$\mathbf{V}(Y_i) = \sum_{j=1}^n p_{i,j}^2 \mathbf{V}(X_j) = \sum_{j=1}^n p_{i,j}^2 \sigma^2 = \sigma^2.$$

Enfin, on sait (encore l'indépendance des X_i) que les Y_i suivent encore des lois normales. Elles suivent donc la loi normale centrée de variance σ^2 .

4.b) Grâce aux questions précédentes, on peut écrire :

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} X_j \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} \left(\frac{Y_i}{\sigma} \right)^2. \end{aligned}$$

En revenant à la fonction de répartition, on vérifie que $\frac{1}{2} \left(\frac{Y_i}{\sigma} \right)^2$ suit une loi gamma de paramètre 1/2. Par somme de variables de loi de gamma indépendantes, on déduit que bien que U_n suit une loi gamma de paramètre $(n-1) \cdot (1/2)$. Ce qui conclut.

Sujet 17
Une nouvelle histoire d'urnes

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $p \in]0, 1[$.

On considère une urne U_0 contenant des boules blanches et des boules noires, la proportion de boules blanches étant égale à p . On effectue n tirages avec remise dans l'urne U_0 .

Si le nombre de boules blanches tirées dans U_0 est égal à i , on fabrique une urne U_1 contenant i boules blanches et $n - i$ boules noires. On effectue alors n tirages avec remise dans l'urne U_1 . On fabrique de même une urne U_2 contenant n boules avec un nombre de boules blanches égal à celui obtenu lors des n tirages dans U_1 , les autres boules étant noires. On procède de la même façon pour fabriquer une urne U_3 à partir de l'urne U_2 , une urne U_4 à partir de l'urne U_3 , etc... On note T_k le nombre de boules blanches tirées dans l'urne U_k .

1. a) Expliquer et compléter les codes suivants qui permettent de simuler la variable T_k .

<pre> 1 import numpy.random as rd 2 3 def tirage(n,q) : 4 C=0 5 for i in range(n): 6 if rd.random()<q : 7 C+=1 8 return C </pre>	<pre> 1 def simulationT(k,n,p): 2 i=1 3 T=tirage(n,p) 4 while i<=k: 5 i+=1 6 T=tirage(... , ...) 7 return T 8 </pre>
---	---

- b) Que fait le programme suivant ?

```

1 def Bidule(k,n,p):
2     m=5000
3     S=0
4     for i in range(m):
5         S+=simulationT(k,n,p)
6     return S/m

```

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer la valeur de $\mathbf{E}(T_k)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $Z_k = T_k(n - T_k)$.

3. Calculer $\mathbf{E}(Z_0)$.
4. Justifier que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}(Z_{k+1}) = \frac{n-1}{n} \mathbf{E}(Z_k).$$

5. Exprimer $\mathbf{E}(Z_k)$ en fonction de n, p, k et montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(Z_k) = 0$.

6. Montrer que $\mathbf{E}(Z_k) \geq \sum_{i=1}^{n-1} i \mathbf{P}(T_k = i)$. En déduire que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} i \mathbf{P}(T_k = i) = 0$.

7. Montrer alors que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(T_k = n) = p$.

8. Conclure en montrant qu'en répétant le procédé un grand nombre de fois, la probabilité qu'à partir d'un certain rang, les urnes U_k ne soient constituées que de boules blanches est égale à p .




Sujet 18

Estimation

Soit μ un réel supérieur ou égal à 1 que l'on cherche à estimer. Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que les suites de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ sont mutuellement indépendantes, que chaque X_n suit la loi uniforme sur $[0, \mu]$ et que chaque Y_n suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Z_n = \min(X_n, Y_n)$. On pose alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k.$$

On note aussi Φ , la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

1. Montrer que Z_1 est une variable aléatoire à densité; déterminer sa loi et calculer son espérance.
2. Écrire une fonction d'entête `simulation(n,mu)` qui, pour un entier $n \geq 1$ et un réel μ donnés, renvoie une simulation de la variable aléatoire T_n .
3. a)  Montrer que la suite de variables aléatoires $(T_n)_n$ converge en probabilité vers un réel que l'on déterminera.
b)  Déterminer un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour lequel $\widetilde{T}_n = aT_n + b$ est un estimateur sans biais de $\frac{1}{\mu}$. Est-il convergent ?
4. a)  Montrer que $\mathbf{V}(Z_1) \leq \frac{1}{12}$.
b) Soit α un réel de $]0, 1[$. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, construire, pour n assez grand, à l'aide de \widetilde{T}_n , un intervalle de confiance pour $\frac{1}{\mu}$ au niveau de confiance $1 - \alpha$ de la forme $[U_n, V_n]$.
c) Construire alors, pour n assez grand, un intervalle de confiance pour μ au niveau de confiance $1 - \alpha$ à l'aide de U_n et V_n .
5. a) Justifier que $(T_n)_n$ converge en loi. Préciser la loi limite.
b) En déduire un intervalle de confiance asymptotique de $1/\mu$ de niveau de confiance α en fonction de n , T_n et $t_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$.
6. À l'aide des codes suivants, quel intervalle de confiance parmi les deux construits aux questions 4.b) et 5.b) vous semble le meilleur ?

```

1 def test(n,mu):
2     alpha=0.05
3     e=np.sqrt(3/(n*alpha))
4     Ttilde=3-6*simu_Tn(n,mu)
5     u=max(0,Ttilde-e)
6     v=min(1,Ttilde+e)
7     return u,v

```

```

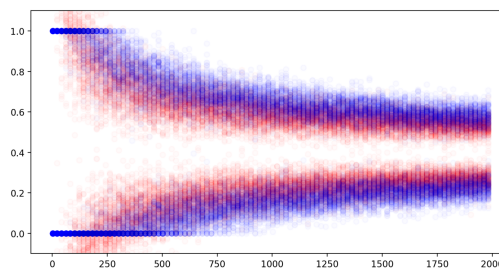
1 def test_asymp(n,mu):
2     ta=1.95 #pour le choixalpha=0.05
3     e=3*ta/(np.sqrt(n))
4     Ttilde=3-6*simu_Tn(n,mu)
5     u=Ttilde-e
6     v=Ttilde+e
7     return u,v

```

```

1 mu=2.5
2 N=np.arange(2,2000,20)
3 for n in N:
4     for i in range(120):
5         u,v=test_asymp(n,mu)
6         plt.plot([n,n],[u,v], 'ro')
7         # r pour rouge
8 for n in N:
9     for i in range(120):
10        u,v=test(n,mu)
11        plt.plot([n,n],[u,v], 'bo')
12        # b pour bleu
13 plt.ylim(-0.1,1.1)
14 plt.show()

```

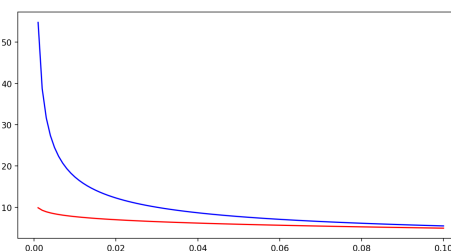


- La commande `ss.norm.ppf(x,0,1)` de la librairie `scipy.stats` (alias `ss`) renvoie la valeur de $\Phi^{-1}(x)$.

```

1 import scipy.stats as ss
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 alpha=np.linspace(0.001,0.1,100)
6 A=np.zeros(100)
7 B=np.zeros(100)
8 for i in range(100):
9     A[i]=3*ss.norm.ppf(1-alpha[i]/2,0,1)
10    B[i]=np.sqrt(3/alpha[i])
11
12 plt.plot(alpha,A,'r')
13 plt.plot(alpha,B,'b')
14 plt.show()

```



Indications

3.a) Penser à la loi faible des grands nombres.

3.b) La réponse est dans la question 6!

4.a) Partir de $\mathbf{V}(Z_1) \leq \mathbf{E}(Z_1^2)$.

1. Comme $\mu \geq 1$, le support de Z_1 est $[0, 1]$. Pour $x \in [0, 1]$ et par indépendance

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_1 > x) &= \mathbf{P}([X_1 > x] \cap [Y_1 > x]) \\ &= \mathbf{P}(X_1 > x)\mathbf{P}(Y_1 > x) = \left(1 - \frac{x}{\mu}\right)(1 - x). \end{aligned}$$

Donc

$$F_{Z_1}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{\mu}\right)(1 - x) & x \in [0, 1], \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

La fonction de répartition est continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$. Ainsi Z_1 est à densité dont une densité est définie sur \mathbb{R} par

$$f_{Z_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}(\mu + 1 - 2x) & x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme Z_1 est à support borné, il y a une espérance qui vaut

$$\mathbf{E}(Z_1) = \int_0^1 x f_{Z_1}(x) dx = \frac{1}{\mu} \int_0^1 x(\mu + 1 - 2x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{6\mu}.$$

2. Un code possible :

```
def simulation(n, mu):
    s = 0
    for k in range(n):
        x = mu * rd.random()
        y = rd.random()
        s += min(x, y)
    return s / n
```

3.a) Les variables Z_1, Z_2, \dots, Z_n sont indépendantes et de même loi avec un moment d'ordre 2. Par la loi faible des grands nombres,

$$T_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \mathbf{E}(Z_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6\mu}.$$

3.b) Sachant que $\mathbf{E}(T_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6\mu}$, on cherche a, b tels que

$$a \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6\mu} \right) + b = \mathbf{E}(\tilde{T}_n) = \frac{1}{\mu}.$$

Par identification,

$$-\frac{a}{6} = 1, \quad \frac{a}{2} + b = 0,$$

d'où $a = -6$, puis $b = 3$. Ainsi

$$\tilde{T}_n = 3 - 6T_n$$

est un estimateur sans biais de $\frac{1}{\mu}$. Par les propriétés de la convergence en probabilité

$$\tilde{T}_n = 3 - 6T_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \frac{1}{\mu}.$$

L'estimateur est convergent.

4.a) Un calcul direct donne

$$\mathbf{E}(Z_1^2) = \int_0^1 x^2 f_{Z_1}(x) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{6\mu}.$$

Donc $\mathbf{V}(Z_1) = \mathbf{E}(Z_1^2) - \mathbf{E}(Z_1)^2 = \frac{1}{12} - \frac{1}{36\mu^2} \leq \frac{1}{12}$.

4.b) Comme

$$\tilde{T}_n = 3 - 6T_n, \quad \mathbf{E}(\tilde{T}_n) = \frac{1}{\mu},$$

on a $\mathbf{V}(\tilde{T}_n) = 36 \mathbf{V}(T_n) = \frac{36 \mathbf{V}(Z_1)}{n} \leq \frac{3}{n}$.

À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$

$$\mathbf{P} \left(\left| \tilde{T}_n - \frac{1}{\mu} \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{\mathbf{V}(\tilde{T}_n)}{\varepsilon^2} \leq \frac{3}{n\varepsilon^2}.$$

Avec le choix $\varepsilon = \sqrt{\frac{3}{n\alpha}}$, on obtient

$$\mathbf{P} \left(\left| \tilde{T}_n - \frac{1}{\mu} \right| \leq \sqrt{\frac{3}{n\alpha}} \right) \geq 1 - \alpha.$$

Donc un intervalle de confiance de $\frac{1}{\mu}$ au niveau $1 - \alpha$ est

$$[U_n, V_n]$$

avec

$$U_n = \max \left(0, \tilde{T}_n - \sqrt{\frac{3}{n\alpha}} \right), \quad V_n = \min \left(1, \tilde{T}_n + \sqrt{\frac{3}{n\alpha}} \right).$$

4.c) Avec une probabilité au moins égale à $1 - \alpha$,

$$U_n \leq \frac{1}{\mu} \leq V_n.$$

Comme $\mu \geq 1$, donc $\frac{1}{\mu} \in]0, 1[$, on en déduit un intervalle de confiance pour μ :

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{V_n}, \frac{1}{U_n} \right] & \text{si } 0 < U_n < V_n < 1, \\ [1, +\infty[& \text{si } U_n = 0, V_n = 1, \\ \left[\frac{1}{V_n}, +\infty[& \text{si } U_n = 0, V_n < 1, \\ \left[1, \frac{1}{U_n} \right] & \text{si } 0 < U_n < 1, V_n = 1. \end{cases}$$

5.a) Par le théorème central limite,

$$\sqrt{n} \frac{T_n - \mathbf{E}(Z_1)}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1), \quad \sigma^2 = \text{Var}(Z_1).$$

En particulier, T_n converge en loi vers la constante

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6\mu}.$$

5.b) Comme

$$\tilde{T}_n = 3 - 6T_n, \quad \mathbf{E}(\tilde{T}_n) = \frac{1}{\mu},$$

et

$$\text{Var}(\tilde{T}_n) = \frac{36 \text{Var}(Z_1)}{n} \leq \frac{3}{n},$$

un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1 - \alpha$ pour $\frac{1}{\mu}$ est

$$\left[\tilde{T}_n - t_\alpha \sqrt{\frac{3}{n}}, \tilde{T}_n + t_\alpha \sqrt{\frac{3}{n}} \right], \quad t_\alpha = \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right).$$

Soit

$$\left[3 - 6T_n - t_\alpha \sqrt{\frac{3}{n}}, 3 - 6T_n + t_\alpha \sqrt{\frac{3}{n}} \right].$$

6. L'intervalle de la question 5.b) est en général meilleur : il est plus resserré. En effet, sa demi-longueur vaut

$$t_\alpha \sqrt{\frac{3}{n}},$$

alors que celle de la question 4.b) vaut

$$\sqrt{\frac{3}{n\alpha}},$$

plus grande. L'intervalle de Tchebychev est toujours valable mais très grossier ; l'intervalle asymptotique est plus précis pour n grand.