Sujet de révisions

21 MAI 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1
Calculs (8pts)

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère la matrice

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & \iddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

On note χ_n, le polynôme caractéristique de A_n.

a) Vérifier que :

$$\chi_{n+1}(X) = X\chi_n(X) - n^2X^{n-1}.$$

En déduire χ_n.

b) Est-ce que A_n est diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

2. Soit f, 2π-périodique définie par $f(x) = x$ sur $]-\pi;\pi]$.

a) Représenter f sur $[-3\pi;3\pi]$.

b) Exprimer $a_n(f)$, $b_n(f)$, les coefficients trigonométriques de f.

c) En déduire que :

$$\forall x \in]-\pi;\pi[, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sin(nx)}{n} = \frac{x}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. Déterminer les fonctions solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y''(t) + y'(t) + y(t) = e^t + t.$$

Exercice 2
Le cas nilpotent (4pts)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On considère le système différentiel

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad X'(t) = AX(t) \qquad (\mathscr{E})$$

L'objectif est d'établir l'équivalence entre :

i) La matrice A est nilpotente ;

ii) Toutes les solutions de $(\mathscr{E})$ sont des fonctions polynomiales.

1. a) Établir l'implication **i)**⇒**ii)**.

b) En remarquant que $\chi_A = X^n$, vérifier en plus que les fonctions polynomiales sont de degré au plus $n-1$.

2. On suppose **ii)**. Soit $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$, la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Soient $i \in [\![1;n]\!]$ et X_i, l'unique solution de $(\mathscr{E})$ vérifiant $X_i(0) = e_i$. Expliciter $X_i(t)$ en fonction de t, A et e_i. En déduire qu'il existe un entier p_i tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad k \geqslant p_i \quad \Rightarrow \quad A^k e_i = 0_{n,1}.$$

b) En déduire que A est nilpotente.

Problème

Matrice fondamentale, théorème de Floquet (8pts)

Soit $A : t \in \mathbb{R} \mapsto A(t) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ une application continue et T-périodique, c'est-à-dire telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad A(t+T) = A(t).$$

On considère le système

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad X'(t) = A(t)X(t) \qquad (\bullet)$$

d'inconnue $X : t \in \mathbb{R} \mapsto X(t) \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Soient $U, V : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ les solutions des problèmes de Cauchy :

$$\begin{cases} U'(t) = A(t)U(t), \\ U(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} V'(t) = A(t)V(t), \\ V(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

1. Justifier que l'application $E : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{bmatrix} U(t) & V(t) \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ est solution du système

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad M'(t) = A(t)M(t) \qquad (\bullet\bullet)$$

d'inconnue $M : t \mapsto M(t) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Préciser $E(t_0)$.

2. Soit M solution de $(\bullet\bullet)$. Notons C_1 et C_2 les colonnes de M. Justifier que, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, l'application suivante est solution de $(\bullet)$.

$$Y : t \in \mathbb{R} \mapsto M(t) \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \lambda C_1(t) + \mu C_2(t).$$

3. Soient $t_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On pose $Y : t \in \mathbb{R} \mapsto E(t) \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$.

a) Justifier que si $E(t_1) \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = 0_{2,1}$, alors Y est l'application nulle.

b) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(t)$ est inversible.

4. **a)** Soit $M : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, une application dérivable solution de $(\bullet\bullet)$. Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M(t) = E(t)M(t_0)$.

b) En déduire l'existence d'une matrice $B \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad E(t+T) = E(t)B.$$

5. **a)** Soit Z un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ.
Justifier que $Y : t \in \mathbb{R} \mapsto E(t)Z$ est une solution de $(\bullet)$ vérifiant en plus

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad Y(t+T) = \lambda Y(t).$$

b) Justifier l'existence de $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $e^{\mu T} = \lambda$.

c) Vérifier qu'il existe une application $S : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$, T-périodique, telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad Y(t) = e^{\mu t} S(t).$$

6. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le spectre de B pour que le système différentiel $(\bullet)$ admette une solution non nulle T-périodique.

7. On suppose que la matrice B est diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le spectre de B pour que le système différentiel $(\bullet)$ admette une solution non bornée sur $\mathbb{R}$.

8. **Le wronskien**
On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $W(t) = \det\big(E(t)\big)$ et on note ρ_1 et ρ_2 deux valeurs propres de B éventuellement confondues.

a) Montrer que pour tout réel t, $W'(t) = \operatorname{Tr}\big(A(t)\big)W(t)$.

b) En déduire que

$$\rho_1 \rho_2 = \exp\left(\int_0^T \operatorname{Tr}\big(A(s)\big)\,\mathrm{d}s\right).$$

– FIN –

Solution

Exercice 1

1.a) Par définition du polynôme caractéristique, on a

$$\chi_n(X) = \det(XI_n - A_n).$$

Pour la matrice A_{n+1}, la première ligne de $XI_{n+1} - A_{n+1}$ est

$$\begin{bmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -n \end{bmatrix}.$$

On développe donc χ_{n+1} suivant cette première ligne.
Le premier terme donne

$$(-1)^{1+1} X\chi_n = X\chi_n,$$

car le mineur obtenu en supprimant la première ligne et la première colonne est exactement $XI_n - A_n$.
Les termes intermédiaires sont nuls car les coefficients de la matrice le sont.
Le dernier terme vaut : $\quad (-n)(-1)^{n+2}D,$
où D est le déterminant obtenu en supprimant la première ligne et la dernière colonne. Dans ce déterminant D, la première colonne est nulle sauf son dernier coefficient, qui vaut $-n$. En développant alors D suivant cette première colonne, on obtient

$$D = (-n)(-1)^{n+1}X^{n-1}.$$

Ainsi,

$$(-n)(-1)^{n+2}D = (-n)(-1)^{n+2}(-n)(-1)^{n+1}X^{n-1} = -n^2X^{n-1}.$$

Donc $\qquad \chi_{n+1}(X) = X\chi_n(X) - n^2X^{n-1}.$

- Justifions par récurrence que l'énoncé

$$\chi_n(X) = X^{n-2}\left(X^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2\right)$$

est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.

→ Pour $n = 2$, $\qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$

donc $\qquad \chi_2(X) = X^2 - 1,$

Ce qui initialise la récurrence.
Supposons que pour un entier $n \geqslant 2$, on a

$$\chi_n(X) = X^{n-2}\left(X^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2\right),$$

alors

$$\begin{aligned} \chi_{n+1} &= X\chi_n(X) - n^2X^{n-1} \\ &= X^{n-1}\left(X^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2\right) - n^2X^{n-1} \\ \chi_{n+1} &= X^{n-1}\left(X^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2\right). \end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vraie au rang suivant.
Finalement, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\chi_n(X) = X^{n-2}\left(X^2 - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right).$$

1.b) • *Rédaction 1*
La matrice A_n est symétrique réelle. Donc, d'après le théorème spectral, A_n est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$A_n \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R}.$$

• *Rédaction 2*
D'après la question précédente, on a

$$\chi_n(X) = X^{n-2}\left(X^2 - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right).$$

On pose $\qquad \alpha_n = \sqrt{\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}}.$

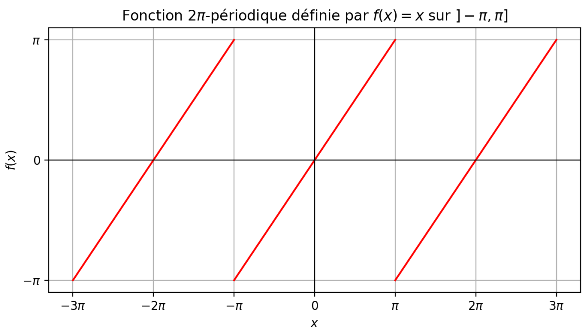
de sorte que $\qquad \chi_n(X) = X^{n-2}(X - \alpha_n)(X + \alpha_n).$

Les valeurs propres de A_n sont donc 0, α_n, $-\alpha_n$.
De plus, on constate $\operatorname{rg}(A_n) = 2$. On en déduit par la formule du rang

$$\dim\ker(A_n) = n - \operatorname{rg}(A_n) = n - 2.$$

Par ailleurs, les dimensions des sous-espaces propres associés aux valeurs propres α_n et $-\alpha_n$ sont plus grande que 1. Par cun compte des dimensions, on constate que ces sous-espaces propres sont donc de dimension exactement 1. La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut donc $(n-2)+1+1 = n$. On en déduit que A_n est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

2.a)



2.b) La fonction f est impaire. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n(f) = 0.$$

Calculons $b_n(f)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a par définition

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

Comme $f(x) = x$ sur $]-\pi,\pi]$ avec f impaire

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

Par intégration par parties :

$$\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x.$$

Or $$\int_0^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = 0.$$

Donc $$\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi\cos(n\pi)}{n} = -\frac{\pi(-1)^n}{n}.$$

Ainsi

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi(-1)^n}{n}\right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Si on résume : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_0(f) = 0, \qquad a_n(f) = 0, \qquad b_n(f) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

2.c) D'après la question précédente, la série de Fourier de f est

$$S(x) = \sum \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, le théorème de Dirichlet s'applique sa série de Fourier en x converge vers $f(x)$ en tout point de continuité x de f. Donc, pour tout $x \in]-\pi;\pi[$,

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

D'où $$\forall x \in]-\pi,\pi[, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin(nx)}{n} = \frac{x}{2}.$$

- Pour obtenir la deuxième somme, on applique l'égalité de Parseval sachant que f est continue par morceaux, 2π-périodique.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{a_0(f)^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right).$$

Or on a montré que

$$a_0(f) = 0, \qquad a_n(f) = 0, \qquad b_n(f) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Donc $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2}.$$

Or $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Ainsi $$\frac{2\pi^2}{3} = 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

On peut retrouver l'égalité classique :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. L'équation homogène associée est

$$y'' + y' + y = 0.$$

Son équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$ avec un discriminant $\Delta = -3$. Les racines sont donc

$$r_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi les solutions de l'équation homogène sont

$$y_h : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2}\left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right),$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- Cherchons une solution particulière du « même type » que le second membre. On fixe donc trois réels α, a, b et on pose

$$y_p : t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha e^t + at + b.$$

Dans ce cas, pour tout réel t

$$y_p'(t) = \alpha e^t + a \quad \text{et} \quad y_p''(t) = \alpha e^t.$$

Donc $$y_p''(t) + y_p'(t) + y_p(t) = 3\alpha e^t + at + (a+b).$$

On cherche alors α, a, b tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad 3\alpha e^t + at + (a+b) = e^t + t.$$

Par identification,

$$3\alpha = 1, \quad a = 1, \quad a + b = 0.$$

D'où $$\alpha = \frac{1}{3}, \qquad a = 1, \qquad b = -1.$$

On vient de montrer qu'une solution particulière est

$$y_p : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{3}e^t + t - 1.$$

Finalement, toutes les solutions s'écrivent sous la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2}\left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) + \frac{1}{3}e^t + t - 1,$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

1.a) On suppose que A est nilpotente. Il existe donc un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Soit X une solution de $(\mathscr{E})$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, si $X(0) = X_0$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad X(t) = \exp(tA)X_0.$$

Or $$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}A^k = \sum_{k=0}^{p-1}\frac{t^k}{k!}A^k.$$

On en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad X(t) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} A^k X_0.$$

Ainsi X est une fonction polynomiale.

1.b) Si A est nilpotente, alors sa seule valeur propre complexe est 0. Ainsi son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(X) = X^n.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$\chi_A(A) = A^n = 0_n.$$

On peut donc prendre $p = n-1$ dans le calcul de la question précédente avec pour tout réel t

$$X(t) = \exp(tA)X_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} A^k X_0.$$

Ainsi les solutions sont des fonctions polynomiales de degré au plus $n-1$.

2.a) Soit $i \in [\![1;n]\!]$. Pour tout réel t

$$X_i(t) = \exp(tA)e_i = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k e_i.$$

Par hypothèse, X_i est une fonction polynomiale. Donc il existe un entier p_i tel que les coefficients de t^k soient nuls pour tout $k \geqslant p_i$. Ainsi

$$\forall k \geqslant p_i, \qquad \frac{1}{k!} A^k e_i = 0_{n,1}.$$

Donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad k \geqslant p_i \quad \Rightarrow \quad A^k e_i = 0_{n,1}.$$

2.b) Pour chaque $i \in [\![1;n]\!]$, il existe un entier p_i tel que

$$\forall k \geqslant p_i, \qquad A^k e_i = 0_{n,1}.$$

On pose $\qquad p = \max(p_1, \ldots, p_n).$

Alors, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$,

$$A^p e_i = 0_{n,1}.$$

Comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on en déduit

$$A^p = 0.$$

Ainsi, la matrice A est nilpotente.

Problème

1. Par définition,

$$E(t) = \begin{bmatrix} U(t) & V(t) \end{bmatrix}.$$

Les colonnes de E sont donc U et V. Or U et V vérifient

$$U'(t) = A(t)U(t) \quad \text{et} \quad V'(t) = A(t)V(t).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E'(t) &= \begin{bmatrix} U'(t) & V'(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A(t)U(t) & A(t)V(t) \end{bmatrix} = A(t) \begin{bmatrix} U(t) & V(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $\qquad E'(t) = A(t)E(t).$

De plus, $\qquad E(t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$

2. La relation

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad M'(t) = A(t)M(t)$$

équivaut à pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$C_1'(t) = A(t)C_1(t) \quad \text{et} \quad C_2'(t) = A(t)C_2(t).$$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et

$$Y\colon t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda C_1(t) + \mu C_2(t).$$

Alors la fonction Y est dérivable et pour tout réel t

$$Y'(t) = \lambda C_1'(t) + \mu C_2'(t) = \lambda A(t)C_1(t) + \mu A(t)C_2(t) = A(t)Y(t).$$

On constate que Y est solution de $(\bullet)$.

3.a) D'après la question précédente, Y est solution de $(\bullet)$. La condition

$$E(t_1) \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = 0_{2,1},$$

devient $Y(t_1) = 0_{2,1}$. Or Z, la fonction nulle vérifie aussi $(\bullet)$ et $Z(t_1) = 0_{2,1}$. Par unicité du problème de Cauchy, Y est la solution nulle.

3.b) Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tel que $E(t_1)$ ne soit pas inversible. Le noyau de l'application n'est pas trivial : il existe

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \neq 0$$

tel que $\qquad E(t_1) \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = 0_{2,1}.$

D'après la question précédente,

$$E(t) \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = 0_{2,1}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, pour $t = t_0$,

$$E(t_0) \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = 0_{2,1}.$$

Or $E(t_0) = I_2$, donc

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = 0_{2,1},$$

contradiction. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad E(t) \in GL_2(\mathbb{C}).$$

4.a) On pose pour tout réel t

$$N(t) = E(t)M(t_0).$$

L'application N est dérivable car E l'est. On a alors

$$N'(t) = E'(t)M(t_0) = A(t)E(t)M(t_0) = A(t)N(t).$$

De plus,

$$N(t_0) = E(t_0)M(t_0) = M(t_0).$$

Les matrices M et N sont donc deux solutions du même problème de Cauchy matriciel. Par unicité,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad M(t) = E(t)M(t_0).$$

4.b) On considère l'application

$$M : t \mapsto E(t+T).$$

Elle est dérivable avec pour tout réel t

$$M'(t) = E'(t+T) = A(t+T)E(t+T).$$

Comme A est T-périodique,

$$A(t+T) = A(t),$$

donc

$$M'(t) = A(t)M(t).$$

Ainsi M est solution de (••). D'après la question précédente,

$$M(t) = E(t)M(t_0).$$

Donc

$$E(t+T) = E(t)E(t_0+T).$$

En posant

$$B = E(t_0+T),$$

on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad E(t+T) = E(t)B.$$

Comme $E(t_0+T)$ est inversible (question 3.b)), on a bien

$$B \in GL_2(\mathbb{C}).$$

5.a) Soit Z un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ. Ainsi

$$Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad BZ = \lambda Z.$$

On pose pour tout réel t

$$Y(t) = E(t)Z.$$

D'après la question 2, Y est solution de (•).
De plus,

$$Y(t+T) = E(t+T)Z = E(t)BZ = E(t)\lambda Z = \lambda E(t)Z.$$

Donc $\qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t+T) = \lambda Y(t).$

5.b) Comme $B \in GL_2(\mathbb{C})$, ses valeurs propres sont non nulles. Donc

$$\lambda \neq 0.$$

On peut expliciter λ sous forme exponentielle : il existe $r \in \mathbb{R}_*^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda = re^{i\theta} = e^{\ln(r)}e^{i\theta} = e^{\ln(r)+i\theta}.$$

Il suffit alors de poser

$$\mu = \frac{\ln(r)+i\theta}{T} \in \mathbb{C}$$

de sorte que

$$e^{\mu T} = \lambda.$$

5.c) On pose pour tout réel t

$$S(t) = e^{-\mu t}Y(t)$$

de sorte que $\qquad Y(t) = e^{\mu t}S(t).$

Montrons que S est T-périodique. Soit $t \in \mathbb{R}$

$$S(t+T) = e^{-\mu(t+T)}Y(t+T).$$

D'après la question 5.a),

$$Y(t+T) = \lambda Y(t).$$

Donc

$$S(t+T) = e^{-\mu t}e^{-\mu T}\lambda Y(t).$$

Or $e^{\mu T} = \lambda$, donc $e^{-\mu T}\lambda = 1$. Ainsi

$$S(t+T) = e^{-\mu t}Y(t) = S(t).$$

Ce qui conclut.

6. Une solution quelconque de (•) s'écrit

$$X : t \in \mathbb{R} \mapsto E(t)Z$$

avec $Z \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$. La solution est T-périodique si et seulement si pour tout réel t

$$X(t+T) = X(t).$$

Or $\qquad X(t+T) = E(t+T)Z = E(t)BZ.$

Ainsi X est T-périodique si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad E(t)BZ = E(t)Z.$$

Comme $E(t)$ est inversible, cela équivaut à $BZ = Z$. Il existe donc une solution non nulle T-périodique si et seulement s'il existe $Z \neq 0$ tel que $BZ = Z$. Autrement dit, le système admet une solution non nulle T-périodique si et seulement si $1 \in \mathrm{Sp}(B)$.

7) Toute solution s'écrit

$$X : t \in \mathbb{R} \mapsto E(t)Z$$

avec $Z \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$. Pour étudier son comportement sur $\mathbb{R}$, on écrit tout réel t sous la forme

$$t = t_0 + s + kT,$$

où $s \in [0;T]$ et $k \in \mathbb{Z}$. Comme

$$E(t+T) = E(t)B,$$

on obtient par récurrence

$$E(t_0+s+kT) = E(t_0+s)B^k.$$

Donc $\qquad X(t_0+s+kT) = E(t_0+s)B^kZ.$

Sur le segment $[t_0, t_0+\mathrm{T}]$, l'application continue E est bornée. Le comportement borné ou non des solutions dépend donc des puissances B^k. Comme B est diagonalisable, les puissances B^k sont bornées pour $k \in \mathbb{Z}$ si et seulement si toutes les valeurs propres de B sont de module 1. Ainsi, il existe une solution non bornée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si B possède une valeur propre de module différent de 1.

8.a) *Rédaction 1*
Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $h \in \mathbb{R}^*$. On a par multilinéarité du déterminant

$$\begin{aligned} \mathrm{W}(t+h) &= \det\big(\mathrm{C}_1(t+h), \mathrm{C}_2(t+h)\big) \\ &= \det\big(\mathrm{C}_1(t) + h\mathrm{C}_1'(t) + o(h),\ \mathrm{C}_2(t) + h\mathrm{C}_2'(t) + o(h)\big) \\ &= \det\big(\mathrm{C}_1(t), \mathrm{C}_2(t)\big) \\ &\quad + h\Big(\det\big(\mathrm{C}_1'(t), \mathrm{C}_2(t)\big) + \det\big(\mathrm{C}_1(t), \mathrm{C}_2'(t)\big)\Big) + o(h). \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\mathrm{W}(t+h) - \mathrm{W}(t)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \det\big(\mathrm{C}_1'(t), \mathrm{C}_2(t)\big) + \det\big(\mathrm{C}_1(t), \mathrm{C}_2'(t)\big).$$

Ce qui justifie la dérivabilité en t et la valeur du nombre dérivé.

Rédaction 2.
On pose

$$\mathrm{W}(t) = \det\begin{bmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{bmatrix} = \alpha(t)\delta(t) - \beta(t)\gamma(t).$$

Par produit et différence, W est dérivable et

$$\begin{aligned} \mathrm{W}'(t) &= \alpha(t)\delta'(t) + \alpha'(t)\delta(t) - \beta(t)\gamma'(t) - \beta'(t)\gamma(t) \\ &= \det\begin{bmatrix} \alpha'(t) & \beta(t) \\ \gamma'(t) & \delta(t) \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} \alpha(t) & \beta'(t) \\ \gamma(t) & \delta'(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On retrouve

$$\mathrm{W}'(t) = \det\big(\mathrm{C}_1'(t), \mathrm{C}_2(t)\big) + \det\big(\mathrm{C}_1(t), \mathrm{C}_2'(t)\big).$$

Précisons $\det\big(\mathrm{C}_1'(t), \mathrm{C}_2(t)\big)$, le deuxième déterminant ce calculant de la même manière.
Comme C_1 est solution de $(\bullet)$: *on ne note pas la dépendance en t pour alléger la notation,*

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{C}_1', \mathrm{C}_2) = \det(\mathrm{AC}_1, \mathrm{C}_2) &= \det\left(\mathrm{AE}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \mathrm{E}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) \\ &= \det(\mathrm{E}) \cdot \det\left(\widetilde{\mathrm{A}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right), \end{aligned}$$

où on a posé

$$\widetilde{\mathrm{A}} = \mathrm{E}^{-1}\mathrm{AE}.$$

Si on note

$$\widetilde{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{\mathrm{A}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\\\gamma\end{bmatrix},$$

puis

$$\det\left(\widetilde{\mathrm{A}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & 1 \end{bmatrix} = \alpha.$$

On calcule $\det(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2')$ de la même manière pour obtenir

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{C}_1', \mathrm{C}_2) + \det(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2') &= \det(\mathrm{E})(\alpha + \delta) \\ &= \det(\mathrm{E})\,\mathrm{Tr}\big(\widetilde{\mathrm{A}}\big) \\ \mathrm{W}'(t) &= \det(\mathrm{E})\,\mathrm{Tr}(\mathrm{A}), \end{aligned}$$

car la trace est un invariant de similitude.

8.b) Si on pose pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$a(t) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}(t)),$$

alors la fonction a est continue et W est solution de l'équation différentielle linéaire homogène

$$y' - ay = 0.$$

On sait alors que les solutions sont du type

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{Ce}^{\mathrm{A}(t)},$$

où A est une primitive de a : par exemple

$$\mathrm{A} : t \in \mathbb{R} \mapsto \int_{t_0}^{t} a(u)\,\mathrm{d}u.$$

Comme $\mathrm{W}(t_0) = 1$, on a $\mathrm{C} = 1$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{W}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)} = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(u)\,\mathrm{d}u\right).$$

Or on a pour $t = t_0 + \mathrm{T}$, $\mathrm{E}(t) = \mathrm{B}$.

$$\begin{aligned} \det\mathrm{B} &= \exp\left(\int_{t_0}^{t_0+\mathrm{T}} \mathrm{Tr}(\mathrm{A}(u))\,\mathrm{d}u\right) \\ &= \exp\left(\int_{0}^{\mathrm{T}} \mathrm{Tr}(\mathrm{A}(u))\,\mathrm{d}u\right) \end{aligned}$$

car $u \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{A}(u))$ est T-périodique. On conclut en précisant que $\det\mathrm{B}$ est le produit des valeurs propres complexes de B.