Mathématiques approfondies
ECG 2

Cahier

de

vacances

Lycée Saint-Louis 2026/2027

CHAPITRE 1

Analyse

1 Sommes finies

Exercice 1. ✦ ♫ [1] Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Calculer les sommes et produits suivants : *20min*

$$C_1 = \sum_{k=0}^{2n} |n-k|, \quad C_2 = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^3}{(k-1)^2(k+1)}\right), \quad C_3 = \sum_{k=0}^{n} k \cdot k!, \quad C_4 = \prod_{k=3}^{n} \frac{k^2+k-2}{k^2+2k-3}, \quad C_5 = \prod_{k=1}^{n} k\mathrm{e}^{-2k}.$$

Exercice 2. ✦ **Sommes des puissances des premiers entiers** *30min*

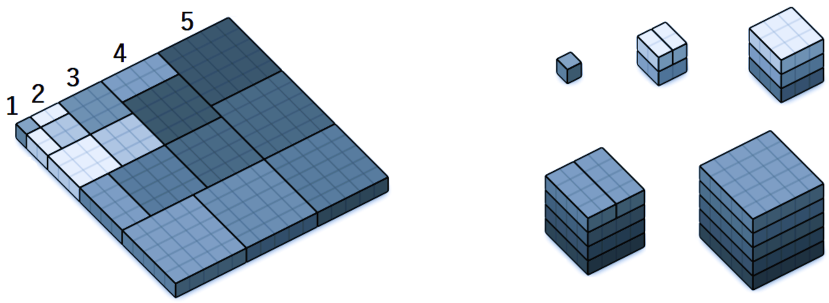
Pour tout $i \in \mathbb{N}$, tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_i(n) = \sum_{k=1}^{n} k^i \quad \text{et} \quad T_i(n) = \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^{i+1} - k^{i+1}\right).$$

1. *Cas particulier*

a) Rappeler les valeurs de $S_0(n)$, $S_1(n)$ et $S_2(n)$ en fonction de n.

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_3(n) = S_1(n)^2$.
Expliquer cette relation à l'aide du dessin suivant :



2. *Cas général*

a) i. Calculer $T_i(n)$. En déduire

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^{i+1} = S_{i+1}(n) + (n+1)^{i+1} - 1$$

ii. Développer $(k+1)^{i+1}$ à l'aide du symbole Σ. En déduire

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^{i+1} = S_{i+1}(n) + (i+1)S_i(n) + \sum_{q=0}^{i-1} \binom{i+1}{q} S_q(n).$$

b) Conclure $\qquad S_i(n) = \dfrac{1}{i+1}\left((n+1)^{i+1} - 1 - \displaystyle\sum_{q=0}^{i-1} \binom{i+1}{q} S_q(n)\right).$

3. Démontrer que $S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$.

4. Écrire un programme Python qui prend en arguments n et i et calcule $S_i(n)/\left(n^{i+1}/(i+1)\right)$. Tester et commenter.

1. *Le symbole ♫ désigne les exercices classiques à maîtriser en priorité.*

2 Suites et séries

Analyse asymptotique

Méthode

- Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, prouver $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$ revient à montrer $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, prouver $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ revient à montrer $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.
- On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si $u_n = v_n + o(v_n)$.

Exercice 3. ✦ ♬ Dans chacun des exemples suivants, déterminer un équivalent de la suite $(u_n)_n$. *20min*

1. $u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+1}$
2. $u_n = \sqrt{n^2+1} + n$
3. $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$
4. $u_n = \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^{1/n}}{2}\right)$
5. $u_n = \sqrt{n} + \ln(1+e^n)$
6. $u_n = \mathrm{e}^{1/n+1/n^2} - \mathrm{e}^{1/n}$.

Exercice 4. ✦ **Contre-exemples** *15min*

1. Donner un exemple de suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ne soient pas équivalents.
2. Donner un exemple de suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ne soient pas équivalents.
3. Donner un exemple d'une fonction f et de suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \sim v_n$ mais $f(u_n) \not\sim f(v_n)$.

Exercice 5. ✦ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$. *20min*
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et trouver un équivalent simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les bases

Méthode

Comment justifier la convergence d'une série?

Il faut distinguer :
• *Si on ne demande pas le calcul de la somme.*

- Utiliser les critères d'équivalence, de négligeabilité ou de comparaison en utilisant les séries de référence (en particulier, les séries de Riemann).
- Revenir à la définition et montrer que la suite des sommes partielles ($S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$) est convergente. Par exemple, si u est à termes positifs, $(S_n)_n$ est croissante et on peut appliquer le théorème de convergence monotone.

• *Si on demande le calcul de la somme.*

- Reconnaître une somme de référence (exponentielle, géométrique, géométriques dérivées).
- Réécrire le terme général sous la forme $a_{k+1} - a_k$ pour faire un télescopage.

Exercice 6. ✦ ♬ Étudier la convergence des séries : *30min*

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}},\quad \sum_{n\geqslant 1}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right),\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1+2^2+\cdots+n^2},\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{(\ln n)^5}{n^2},\quad \sum_{n\geqslant 2}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}.$$

✦✦ Discuter en fonction des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de la convergence de :

$$\sum_{n\geqslant 1}(\sqrt{n+7}-\sqrt{n})^{\alpha} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{n^{\alpha}}{n^2+n^{\beta}}.$$

Exercice 7. ✦ ♫ Calculer les sommes suivantes $\quad A = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} e^{-k}, \quad B = \sum_{k\geqslant 2} \frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)}$. *15min*

Méthode

Comment justifier la convergence d'une suite à l'aide des séries?

Pour étudier la convergence d'une suite u, on peut étudier celle de la série $\sum(u_n - u_{n-1})$.

Par exemple, montrons que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ converge en utilisant

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\}$,

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \Rightarrow \quad u_n - u_{n-1} &\sim \frac{1}{2n^2}. \end{aligned}$$

D'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ converge. Or, si on note S_n la somme partielle d'ordre n de cette série, $S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1}) = u_n - u_0$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi.

Exercice 8. ✦ ♫ **Constante d'Euler** *15min*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

1. Calculer $u_{n+1} - u_n$. En déduire la convergence de la suite u.
2. En admettant qu'il existe un réel γ tel que $\sum_{k=1}^{n} 1/k = \ln(n) + \gamma + o(1)$, calculer la limite de la suite u.

Les exercices

Exercice 9. ✦✦ On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence *25min*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = \ln\left(e^{x_n} - x_n\right) \quad \text{et} \quad x_0 = 1.$$

1. Pourquoi cette suite est-elle bien définie et positive?
2. a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = e^{x_n} - e^{x_{n+1}}$.
   b) Justifier que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Démontrer la convergence de la série $\sum x_n$ et calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$.

⋙ *Solution en vidéo. Youtube : Michael Penn Putnam Exam | 2016 : B1*

Exercice 10. ✦✦ **Avec un peu d'algèbre linéaire** *30min*

On définit les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 et P_3 sur $\mathbb{R}$ par

$$P_0 = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x(x-1), \quad P_3(x) = x(x-1)(x-2)$$
$$\text{et} \quad P_4(x) = x(x-1)(x-2)(x-3).$$

1. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_4[x]$. Avec un argument d'algèbre linéaire, justifier l'existence de $\alpha_0, \cdots, \alpha_4$ tels que $\mathrm{P} = \sum_{i=0}^{4} \alpha_i \mathrm{P}_i$.

   On ne cherchera pas à calculer ici ces valeurs.

2. **a)** Vérifier que pour tout indice i, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}_i(n)}{n!} = \mathrm{e}$.

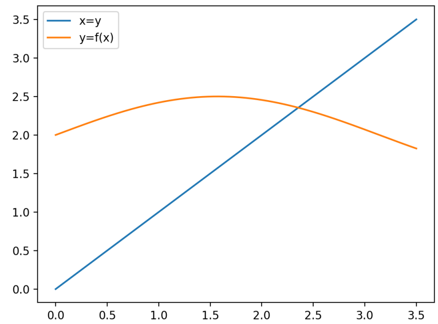
   b) Calculer en fonction de $\alpha_0, \cdots, \alpha_4$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}(n)}{n!}$.

3. *Application.* Donner la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 - n^2}{n!}$.

Exercice 11. ✦✦ ♫ Étude d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ *40min*

On considère la suite définie par : $u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\sin(u_n) + 2.$

1. Comment obtenir à l'aide de Python le graphe de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}\sin(x) + 2$ ainsi que celui de $x \in \mathbb{R} \mapsto x$ sur $[0; 7/2]$?



2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$.

   a) Prouver que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\quad \left|f(y) - f(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}|y - x|$.

   b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad |v_n| \leqslant \frac{|v_0|}{2^n}$.

   c) Justifier la convergence de la suite u. Notons ℓ la limite

3. En utilisant la question 2.(a), démontrer que ℓ est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

4. On note R_n, le reste d'ordre n de la série $\sum v_k$.

   a) Comparer $\ell - u_n$ et R_{n-1}.

   b) En déduire que $|\ell - u_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. *On admet que* $|u_1 - u_0| \leqslant 1$.

5. Compléter le programme suivant qui prend en argument ε et renvoie une approximation de ℓ à ε-près.

```
def approx( ) :
    u=    ....
    erreur=2
    while    ....
        u=    ....
        erreur=    ....
```

Exercice 12. ✦✦ ♫ Formule du binôme négatif *D'après EDHEC 2015* *25min*

1. Pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$, vérifier l'équivalent $\binom{k}{p} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{k^p}{p!}$ En déduire la convergence de la série $\sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k$.

2. On définit, pour $x \in]-1, 1[$, $\quad \mathrm{S}_p(x) = \sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k$.

   a) Préciser $\mathrm{S}_0(x)$.

b) À l'aide de la formule du triangle de Pascal, démontrer que $(1-x)S_{p+1}(x) = xS_p(x)$.

c) Conclure avec $\displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty}\binom{k}{p}x^k = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$.

Exercice 13. ✦✦✦ **Recherche d'un équivalent par le Lemme de Cesaro** *d'après oraux H.E.C* *1h20*

On admet la propriété suivante :

$(\mathscr{P})$: Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le nombre réel L, alors la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad V_n = \frac{1}{n}(u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1})$$

converge aussi vers L.

On se donne deux nombres réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n\frac{1+\alpha.u_n}{1+\beta.u_n}$$

1. Question de cours : Convergence et divergence des suites réelles monotones.
2. Dans cette question seulement, on suppose $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.
   a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x\dfrac{1+x}{1+2x}$.
   b) Étudier la convergence de la suite (u_n).
   c) Écrire un programme en Python permettant le calcul de u_{10}.
3. Dans le cas général, prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1/u_n$. Prouver que la suite $(v_{n+1} - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\beta - \alpha$.
5. En utilisant la propriété $(\mathscr{P})$, déduire du résultat précédent un équivalent de u_n de la forme $\frac{1}{q\cdot n}$ lorsque n tend vers $+\infty$, où q est un réel strictement positif.
6. Discuter en fonction du réel $\gamma \in \mathbb{R}$, la convergence de la série $\sum u_n{}^{\gamma}$.

3 Limites et continuité

3.1 DLs

Exercice 14. ✧ ♫ Donner les développements limités usuels au voisinage de 0 : à l'ordre 2, puis à l'ordre n lorsque cela a un sens. *5min*

$$(1+x)^{\alpha} = \quad , \quad \frac{1}{1-x} = \quad , \quad e^x = \quad , \quad \ln(1+x) = \quad \cos(x) = \quad , \quad \sin(x) = \quad .$$

Méthode

Comment calculer le DL d'un produit de DLs usuels ?

Calculons le $DL_3(0)$ de $x \mapsto e^x(1+\sin(x))$.
Précisons le DL de chacun des facteurs. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3) \quad \text{et} \quad 1 + \sin(x) = 1 + x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3).$$

On développe ensuite l'expression en omettant les termes de degré supérieur à 3, l'ordre du DL.

$$\begin{aligned} e^x(1+\sin(x)) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)\left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right) \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + x + x^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3). \end{aligned}$$

Finalement, on réorganise les termes suivants leur ordre : $e^x(1+\sin(x)) = 1 + 2x + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x^3 + o_0(x^3)$.

Méthode

Comment effectuer un changement de variable dans un DL?

Exemple 1.

Déterminons le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\sin(3t)$. On écrit le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\sin(x)$ par $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o_0\left(x^4\right)$.

On peut remplacer x par $3t$ puisque $3t \xrightarrow[t\to 0]{} 0$, $\quad \sin(3t) = 3t - \dfrac{9}{2}t^3 + o_0\left(t^4\right)$.

Exemple 2.

Donnons le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\ln(1+t^2)$. Partons du DL usuel : $\ln(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$.

Sachant que $t^2 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$, en remplaçant x par t^2, on obtient : $\ln(1+t^2) = t^2 - \dfrac{1}{2}t^4 + o_0(t^4)$.
Notons que le DL du logarithme à l'ordre 2 a suffi.

Exercice 15. ✦ Écrire le DL à l'ordre n indiqué, au voisinage de 0 , pour les fonctions suivantes. *1h*

1. $x \mapsto 5 - 3x + 4x^2 + 4x^5 - 12x^7$, $n = 3$;
2. $x \mapsto \cos(x) + \ln(1+x)$, $n = 2$;
3. $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$, $n = 2$;
4. $x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $n = 3$;
5. $x \mapsto \ln(2+x)$, $n = 2$;
6. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 1 + x + x^4 + \mathrm{e}^x$, $n = 3$;
7. $\left(3x^8 - 14x^6 + 13x^5 + 5x^3 - x^2 + 1\right)(1+x)^{\frac{1}{2}}$, $n = 2$;
8. $x \mapsto \mathrm{e}^x(1 + \sin(x))$, $n = 3$;
9. $x \mapsto \frac{3 + x^2 + x^3 + \ln(1+x)}{1-x}$, $n = 2$;
10. $x \mapsto (\sin x)^2 \cos(x)$, $n = 4$;
11. $x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$, $n = 4$;
12. ✦✦ $x \mapsto \exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 16. ✦ Calculer la limite en 0 des fonctions suivantes. *20min*

1. $x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)^2} - \dfrac{1}{x^2}$; 2. $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$; 3. $x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$.

3.2 Continuité

Méthode

Comment appliquer le théorème des valeurs intermédiaires?

En pratique, il est souvent judicieux de se ramener au cas où $y = 0$ à l'aide d'une fonction auxiliaire g et d'appliquer l'énoncé suivant :

$$\text{Soit } g : [a;b] \to \mathbb{R} \text{ continue telle que } g(a)g(b) < 0 \text{ alors il existe } c \in]a;b[\text{ tel que } g(c) = 0.$$

• ♫ *Exemple*
Montrons que pour toute fonction continue $f : [0;1] \to [0;1]$, il existe $c \in [0;1]$ pour lequel

$$c = f(c).$$

Pour cela, on considère la fonction $g : x \in [0;1] \mapsto f(x) - x \in \mathbb{R}$. On a $g(0) \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ puisque l'image de f est incluse dans $[0;1]$. g étant continue sur le segment $[0;1]$, le théorème des valeurs intermédiaires s'applique. Il existe $c \in [0;1]$ tel que $g(c) = 0$. Autrement dit, $f(c) = c$.

Exercice 17. ✧ ♫ Prouver qu'il existe un réel $x > 0$ tel que $3^x + 5^x = 7^x$. *10min*

Attention. Il ne faut pas confondre le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection. Ce dernier permet souvent de justifier en plus une unicité.

Exercice 18. ✦✦ Soit $\mathrm{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application polynomiale. *25min*

1. Justifier que si P est de degré impair, alors P est surjective.
2. Étudier la réciproque.

Exercice 19. ✦✦ *15min*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application continue. Montrer que si tout réel possède un ou deux antécédents par f, alors f est une bijection.

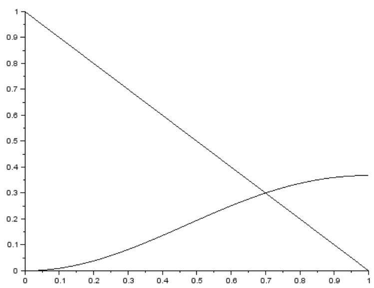
Le jury attend des candidats qu'ils sachent tracer rapidement l'allure du graphe d'une fonction ou soient capables d'illustrer un raisonnement par un petit schéma.

Rapport de Jury : Oraux, HEC 2023

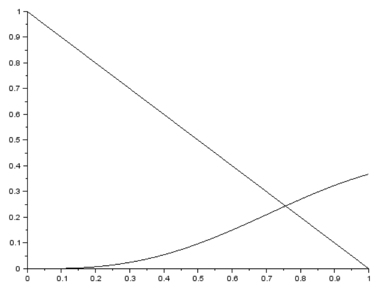
Exercice 20. ✦✦ ♫ **Exemple de suite implicite** *D'après EMLyon* *1h*

On note $f_0 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x^2} \end{array} \right.$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \mathrm{e}^{-x^2} \end{array} \right.$.

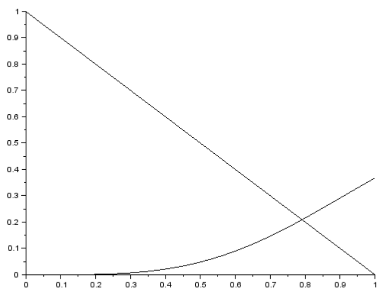
1. **a)** Justifier précisément que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser la dérivée.
   b) Préciser la parité de la fonction f_n.
   c) En déduire le tableau de variation et le graphe de f_n sur $\mathbb{R}^+$, puis sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.
   Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. *Distinguer deux cas* $x \in [0,1]$ *et* $x \geqslant 1$.
   Que pouvez en déduire sur la position relative des courbes représentatives de f_{n+1} et f_n ?
3. **a)** Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation $f_n(x) = 1 - x$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet une unique solution. On note x_n, cette unique solution.
   b) Écrire un programme Python qui prend en argument n et trace les graphes de f_n et $x \mapsto 1 - x$ sur $[0,1]$.
   Voici quelques résultats :



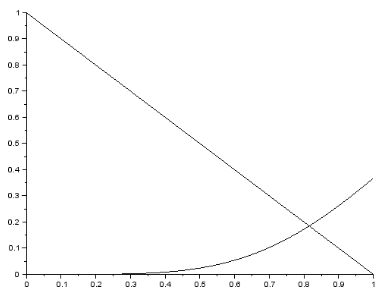
$n = 2$



$n = 3$



$n = 4$



$n = 5$

   c) Conjecturer la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$. Prouver votre conjecture. En déduire la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ vers une limite finie. Notons ℓ, cette limite.
   d) Raisonnons par l'absurde pour prouver que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ tend vers 1.
   On suppose que $\ell < 1$. Justifier que pour tout $n \geqslant 2$, $x_n \leqslant \ell$, en déduire que $({x_n}^n)_{n\geqslant 2}$ converge alors vers 0.
   En déduire une contradiction.
   e) Donner la limite de $({x_n}^n)_{n\geqslant 2}$.

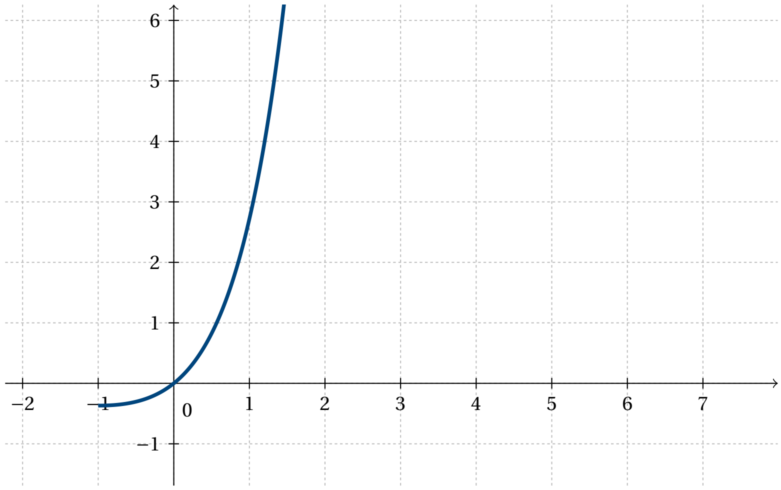
4 Dérivation et intégration

4.1 Dérivation

Exercice 21. ✦ On dit qu'un polynôme P non constant est scindé dans $\mathbb{R}$ s'il se factorise dans $\mathbb{R}$ en produit de polynômes du premier degré. Montrer que si P est un polynôme réel non constant scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$, alors P' est aussi scindé à racines simples. *20min*

Exercice 22. ✦✦ ♫ Pour tout réel x, on pose $f(x) = xe^x$. *40min*

1. Justifier que la fonction f définit une bijection de $I = [-1, +\infty[$ sur $J = [-1/e, +\infty[$.
2. Dans la suite, on note W la bijection réciproque. Préciser les variations de W sur J.
3. Voici le graphe de f. Compléter avec le graphe de W.



4. a) Préciser W(0) et W(e).

   b) Justifier que W est dérivable sur $J \setminus \{-1/e\}$ avec pour tout $x \in J \setminus \{-1/e\}$, $\quad W'(x) = \dfrac{1}{x + e^{W(x)}}$.

   c) En déduire les équations des tangentes en 0 et en e de la fonction W.

Exercice 23. ✦✦ **Généralisation des accroissements finis** *20min*

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I et $a \in I$. On suppose que pour tout $x \in I$, $g'(x) \neq 0$.

1. Montrer que pour tout $b \in I \setminus \{a\}$: $g(b) - g(a) \neq 0$.
2. Montrer que pour tout $b \in I \setminus \{a\}$, il existe c_b compris entre a et b, tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c_b)}{g'(c_b)}.$$

   Indication. Considérer, pour un certain réel λ bien choisi, la fonction $h : x \mapsto f(x) - \lambda g(x)$.

3. *Application : Règle de L'Hospital.*

   a) Montrer que si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell$.

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1) - \ln(x)}{(x-1)^2}$.

Exercice 24. ✦✦ **Étude de relations fonctionnelles** *30min*

1. Trouver les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient : $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$.
2. On se propose de trouver les fonctions dérivables qui vérifient : $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) \times f(y)$.

   a) Justifier que si f s'annule une fois, alors f est la fonction nulle.

   b) Prouver si f est non nulle alors f est une fonction strictement positive.

   c) Conclure en utilisant $g = \ln \circ f$.

   d) Que dire si on suppose seulement la fonction dérivable en 0 ?

4.2 Intégration

Méthode

Comment encadrer une intégrale ?

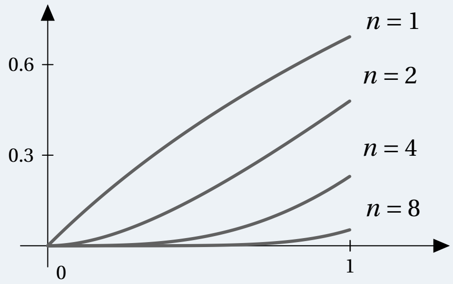
Prenons l'exemple de $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t)^n \,\mathrm{d}t$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_*^+, \quad 0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$$

$$\Rightarrow \qquad 0 \leqslant \ln(1+t)^n \leqslant t^n.$$

Par croissance de l'intégrale,

$$0 = \int_0^1 0 \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \ln(1+t)^n \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$



Par encadrement, la suite $(\mathrm{I}_n)_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Graphiquement, plus n devient grand, plus l'aire sous la courbe est proche de 0.

Exercice 25. ✧ Prouver par encadrement la convergence vers 0 des suites de terme général : *15min*

$$\mathrm{K}_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-tn} \cos(t/n)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{L}_n = \int_0^1 \sin\left(t^n\right)\mathrm{d}t.$$

Méthode

Comment rédiger une intégration par parties ?

Dans votre rédaction, il ne faut pas oublier de rappeler que les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$.

- *Exemple 1.* Calculons $\displaystyle\int_0^\pi t\cos(t)\,\mathrm{d}t$.

Posons u, v de classe $\mathscr{C}^1$, pour tout $t \in [0;\pi]$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} v(t) & = & t \\ u(t) & = & \sin(t) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} v'(t) & = & 1 \\ u'(t) & = & \cos(t) \end{array}\right. .$$

Ainsi, $$\int_0^\pi t\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \left[u(t)v(t)\right]_0^\pi - \int_0^\pi u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, $$\left[u(t)v(t)\right]_0^\pi = \left[\sin(t)t\right]_0^\pi = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^\pi u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\cos(t)\right]_0^\pi = 2.$$

Finalement, $$\int_0^\pi t\cos(t)\,\mathrm{d}t = -2.$$

- *Exemple 2.* Calculons la primitive du logarithme qui s'annule en 1.

Posons u, v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$, pour tout $t \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} v(t) & = & \ln(t) \\ u(t) & = & t \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} v'(t) & = & 1/t \\ u'(t) & = & 1 \end{array}\right. .$$

Par intégration par parties, on a pour $x \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \left[u(t)v(t)\right]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, $$\left[u(t)v(t)\right]_1^x = \left[t\ln(t)\right]_1^x = x\ln(x) \quad \text{et} \quad \int_1^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x 1\,\mathrm{d}t = [t]_1^x = x-1.$$

Méthode

Finalement, la primitive (qui s'annule en 1) est $x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto x\ln(x) - x + 1$. Ce calcul montre que,

$$\text{Les primitives sur } \mathbb{R}_*^+ \text{ de } \ln \text{ sont } x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto x\ln(x) - x + \mathrm{C} \quad \text{avec} \quad \mathrm{C} \in \mathbb{R}.$$

Exercice 26. ✧ Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On pose $\mathrm{S} = \int_0^x \sin(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{C} = \int_0^x \cos(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$. *15min*

À l'aide de deux intégrations par parties, trouver deux relations (différentes) reliant S à C, et en déduire que :

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin(x) - \cos(x)) \quad \text{et} \quad \mathrm{C} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin(x) + \cos(x)).$$

Méthode

Comment rédiger un changement de variable sur un segment ?

Donnons la rédaction du changement de variable lorsque l'on donne la nouvelle variable en fonction de l'ancienne.

- *Exemple 1.* Calculons l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t - 1}{\mathrm{e}^t + 1}\mathrm{d}t$.

→ Précisons que l'intégrale est bien définie puisque $t \mapsto \frac{e^t - 1}{e^t + 1}$ est continue sur $[0;1]$.

→ Posons $u = \psi(t) = \mathrm{e}^t$. ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ avec « $\mathrm{d}u = \psi'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ », « $\frac{\mathrm{d}u}{u} = \mathrm{d}t$ ».

→ De plus, lorsque t varie de 0 à 1, u varie de $\psi(0) = 1$ à $\psi(1) = e$. On trouve :

$$\mathrm{I} = \int_{t=0}^{t=1} \frac{e^t - 1}{e^t + 1}\mathrm{d}t = \int_{u=1}^{u=e} \frac{u-1}{u+1} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

On a maintenant un calcul d'une intégrale d'une fraction rationnelle :

$$\mathrm{I} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2u - (u+1)}{u(u+1)}\mathrm{d}u = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2}{u+1} - \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \left[2\ln(u+1) - \ln(u)\right]_1^{\mathrm{e}} = 2\ln(\mathrm{e}+1) - 2\ln(2) - 1.$$

- *Exemple 2.* Calculons l'intégrale $\mathrm{J} = \int_1^2 e^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

→ Notons que l'intégrale est bien définie puisque l'application $t \in [1;2] \mapsto e^{\sqrt{t}}$ est bien continue.

→ Posons $u = \psi(t) = \sqrt{t}$. Ce changement de variable est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1;2]$ avec :

$$\text{« } \mathrm{d}u = \psi'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} \text{ », ou encore « } 2u\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}t \text{ ».}$$

→ De plus, lorsque t varie de 1 à 2, u varie de $\sqrt{1} = 1$ à $\sqrt{2}$. Ainsi, en remplaçant $\int_{t=1}^{t=2} \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_{u=1}^{u=\sqrt{2}} 2u\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$.

Or, on a déjà calculé ce type d'intégrale. Par intégration par parties, on a

$$\int_{u=1}^{u=2} u\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \left[u\mathrm{e}^u\right]_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = (\sqrt{2} - 1)\mathrm{e}^{\sqrt{2}}.$$

On peut conclure $\mathrm{J} = 2(\sqrt{2} - 1)\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$.

Exercice 27. ✧ ♫ Calculer $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1 + \ln(t)}}$ en posant $u = \ln(t)$. *5min*

Exercice 28. ✦✦ On pose $\quad \mathrm{I} = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t \quad$ et $\quad \mathrm{J} = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right)\mathrm{d}t$. *20min*

1. Justifier que I et J sont bien définies.
2. Montrer que $\mathrm{I} = \mathrm{J}$.
3. En déduire la valeur de $\mathrm{A} = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(t))\mathrm{d}t$.

Les exercices

Exercice 29. ✦ Soit f une fonction positive et continue sur $\mathbb{R}_+$, telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. *10min*
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(c) = \mathrm{e}^{-c}$.

Exercice 30. ✦✦ ♫ Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\quad \mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t$. *30min*

1. Préciser I_0 et I_1.
2. **a)** Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad \mathrm{I}_{n+1} = (2n+2)\big(\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n+1}\big)$.

   b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad \mathrm{I}_n = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.
3. En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2n+1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 31. ✦✦ Soit la fonction $\mathrm{F} : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t+x}\,\mathrm{d}t$. *30min*

1. Montrer que la fonction F est décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$, fixé. Montrer que $\quad \mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u$.
3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, l'égalité : $\quad \mathrm{F}'(x) + \mathrm{F}(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{x+1} - \dfrac{1}{x}$.
4. Étudier la limite de F en $+\infty$.

Exercice 32. ✦✦✦ ♫ **Intégrale à paramètre** *d'après oral ESCP 2014* *1h*
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\varphi(x) = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(t)}{1+x^2t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   Puis, montrer que φ est à valeurs strictement positives, et que φ est paire.
2. Étudier la monotonie de φ sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que : $\forall\, x,\ x_0 \in \mathbb{R}$, $\quad \left|\varphi(x) - \varphi(x_0)\right| \leqslant \left|x^2 - x_0^2\right| \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^2 \ln(t)\mathrm{d}t$. En déduire que φ est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que φ est dérivable en 0 , et préciser la valeur de $\varphi'(0)$.
5. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. En effectuant le changement de variable $u = xt$ dans l'intégrale, montrer que

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}\int_x^{x\mathrm{e}} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u - \frac{\ln(x)}{x}\int_x^{x\mathrm{e}} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

   b) Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 33. ✦✦✦ **Produit de convolution** *45min*
Pour toutes fonctions continues $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit la fonction $f * g$ via

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que $f * g = g * f$.
2. **a)** Expliciter $\exp * \exp$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose pour tout réel t, $f_n(t) = \begin{cases} t^n & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$ puis pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, $\mathrm{H}_{n,m} = f_n * f_m$.

   b) Justifier que pour tout $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_{n,m} = \dfrac{m}{n+1}\mathrm{H}_{n+1,m-1}$.

   c) Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}^2$, on a $\mathrm{H}_{n,m} = \dfrac{m!n!}{(m+n)!}\mathrm{H}_{n+m,0}$.

   Explicitez pour tout $n, m \in \mathbb{N}^2$, $\mathrm{H}_{n,m}$.

Exercice 34. ✦✦✦ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par *Questions sans préparation HEC* 25min

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{n+2}(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
2. a) Calculer $u_{n+2} + u_n$.
   b) En déduire la limite de (u_n) ainsi qu'un équivalent de (u_n) lorsque n tend vers plus l'infini.

Terminons par une méthode à bien savoir maîtriser : la comparaison série-intégrale.

Exercice 35. ✦ ♬ **Équivalent des sommes partielles d'une série divergente** 30min

L'objectif est de prouver la divergence de la série $\sum_{k\geqslant 3} \frac{1}{k\ln k}$ et de déterminer un équivalent des sommes partielles :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln k}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{t\ln t}$.
2. a) Montrer que pour tout $k \geqslant 2$: $\dfrac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \frac{1}{k\ln k}$.
   b) En déduire, pour tout $n \geqslant 3$, $\displaystyle\int_3^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \int_3^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$.
3. Calculer, pour tous a, b réels strictement supérieurs à 1 : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
4. a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\ln k}$ diverge.
   b) Utiliser la question 2.b) pour trouver un équivalent de S_n.

Sommes de Riemann

Méthode

Comment reconnaître une somme de Riemann ?

En pratique, on choisit $a = 0$, $b = 1$. Le théorème devient pour une fonction f continue sur $[0;1]$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par exemple, pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$, on considère la fonction continue $t \in [0;1] \mapsto t^\alpha$. Par suite,

$$\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=0}^{n-1} k^\alpha = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 t^\alpha\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Exercice 36. ✦✦ Déterminer l'existence et la valeur de la limite des suites dont les termes généraux sont :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \quad (n \in \mathbb{N}^*);$$

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} \quad (n \in \mathbb{N}^*); \quad w_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

25min

Exercice 37. ✦✦✦ Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+n+k^2}$. 30min

Méthode

Comment rédiger une comparaison à une intégrale de Riemann ?

Exemple 1.

Justifions que l'intégrale $\displaystyle\int_{e}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \ln(t)}$ est convergente.

— La fonction $t \in [e;+\infty[\mapsto \dfrac{1}{t^2\ln(t)}$ est l'inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas, elle est donc continue. Nous sommes dans le cas d'une intégrale généralisée en $+\infty$.

— Pour tout $t \in [e;+\infty[$, $\dfrac{1}{t^2\ln(t)} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

— Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t^2\ln(t)}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sont positives.

— L'intégrale généralisée, $\displaystyle\int_{e}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$, est une intégrale de Riemann convergente (car $2 > 1$).

Par application du critère de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_{e}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \ln(t)}$ est convergente.

Exemple 2.

Justifions que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^{-2t}-1}{t^2} dt$ est divergente.

— La fonction $t \in]0;1[\mapsto \dfrac{e^{-2t}-1}{t^2}$ est continue. Nous sommes dans le cas d'une intégrale généralisée en 0.

— Par application des équivalents usuels : $e^{-2t} - 1 \underset{0}{\sim} -2t$, puis, $\dfrac{e^{-2t}-1}{t^2} \underset{0}{\sim} -\dfrac{2}{t}$.

— Les deux fonctions considérées sont de signe constant (négatif) au voisinage de 0.

— L'intégrale généralisée en 0, $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dt}{t}$, est une intégrale de Riemann divergente (car $1 \leqslant 1$).

Par application du critère d'équivalence, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^{-2t}-1}{t^2} dt$ est divergente.

Exercice 38. ♫ ✦ On pose pour tout entier naturel n non nul, *40min*

$$I_n = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n}\, dx.$$

1. Prouver la convergence de l'intégrale impropre I_n.
2. On pose pour tout réel $A > 0$ et tout entier naturel n non nul :

$$I_n(A) = \int_{0}^{A} \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n}\, dx.$$

Par une intégration par parties, montrer $I_n(A) = \dfrac{A}{\left(1+A^3\right)^n} + 3n\left(I_n(A) - I_{n+1}(A)\right)$.

3. a) Montrer, pour tout entier naturel n non nul, $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n}\, dx \leqslant \frac{1}{3n-1}$.

b) On admet $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{1} \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n}\, dx = 0$.
En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

4. a) Montrer, pour tout entier naturel n non nul : $I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n$.

b) En déduire, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k-1}{3k}$$

5. On admet $\mathrm{I}_1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. Écrire un script Python qui prend en argument un entier n supérieur à 2 et calcule puis affiche la valeur de I_n.

Exercice 39. ✦✦ ♫ Intégrale à paramètre — 30min

Partie I

1. Montrer que, pour tout x réel, $\mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(tx)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ existe.

2. Montrer que $\mathrm{G}(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Partie II

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ existe.

2. Montrer que pour tout $(t, x, h) \in \mathbb{R}^3$:

$$\left|\sin(t(x+h)) - \sin(tx) - th\cos(tx)\right| \leqslant \frac{t^2h^2}{2}.$$

3. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}'(x) = \mathrm{G}(x)$.

4. En déduire F.

Exercice 40. ✦✦✦ Intégrales de Dirichlet et de Borwein — 50min

On pose
$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale I converge à l'aide d'une intégration par parties.

2. Soit f une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\int_0^{\pi/2} f(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)u\big)}{\sin(u)}\,\mathrm{d}u$. Vérifier que $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = 0$. En déduire I_n.

4. Soit $f(u) = \frac{1}{u} - \frac{1}{\sin u}$.
Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.

5. En appliquant les résultats de la question 2, trouver la valeur de I puis celle de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

6. *Vers une généralisation ?*

a) Écrire une fonction python qui prend en arguments un réel $\mathrm{A} > 0$, une fonction f définie sur $[0; \mathrm{A}]$, un entier naturel n et renvoie la n-ième somme de Riemann associée à f sur $[0; \mathrm{A}]$.

b) Écrire une fonction Python qui prend en arguments un entier $n \geqslant 1$, un réel x et renvoie le nombre

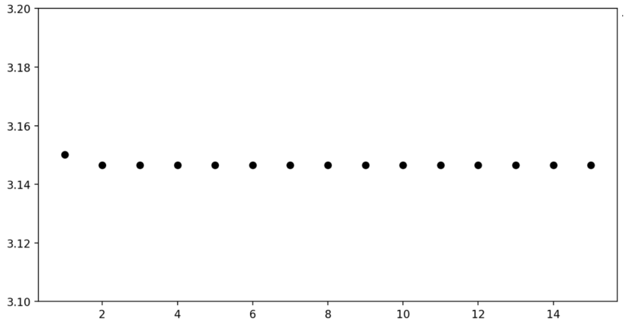
$$f_n(x) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\big(x/(2k-1)\big)}{x/(2k-1)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

c) En déduire une fonction Python `borwein` qui prend en argument A, un entier n et approxime l'intégrale convergente

$$\int_{-\mathrm{A}}^{+\mathrm{A}} \frac{\sin x}{x}\,\frac{\sin(x/3)}{x/3}\cdots\frac{\sin\big(x/(2n-1)\big)}{x/(2n-1)}\,\mathrm{d}x$$

d) Commenter les simulations suivantes qui renvoient les résultats de `borwein(n,100)` pour différentes valeurs de n.

```
nmax=15
L=np.zeros(nmax)
for n in range(1,nmax+1):
    A=500
    L[n-1]=borwein(n,A)
plt.ylim(3.1,3.2)
plt.plot(np.arange(1,nmax+1),L,'ko')
plt.show()
```




```
>>> L
array([3.15013643, 3.14659287, 3.14659269, 3.14659265, 3.14659265,
       3.14659265, 3.14659265, 3.14659265, 3.14659262, 3.14659236,
       3.14659178, 3.14659091, 3.14658979, 3.14658851, 3.14658711])
```

6 Convexité

Exercice 41. ✦ **Une inégalité de convexité** *20min*

1. Étudier la convexité de $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$ sur $]1;+\infty[$.

2. En déduire pour tous $a, b \in]1;+\infty[$, $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\cdot\ln(b)}$.

Exercice 42. ✦✦✦ Soient a, $b \in \mathbb{R}_*^+$ et $t_1, t_2 \in [0,1]$ tels que : $t_1 + t_2 = 1$. On appelle : *1h*

- *moyenne harmonique* pondérée (par (t_1, t_2)) de a et b, la valeur m_{H} définie par

$$\frac{1}{m_{\mathrm{H}}} = t_1 \cdot \frac{1}{a} + t_2 \cdot \frac{1}{b}.$$

- *moyenne géométrique* pondérée de a et b, la valeur m_{G} définie par

$$\ln m_{\mathrm{G}} = t_1 \cdot \ln a + t_2 \cdot \ln b.$$

- *moyenne arithmétique* pondérée de a et b, la valeur m_{A} définie par

$$m_{\mathrm{A}} = t_1 a + t_2 b.$$

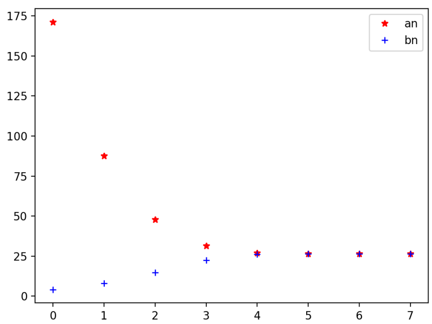
1. En vous servant de la définition de la concavité de la fonction logarithme, montrer que $m_{\mathrm{H}} \leqslant m_{\mathrm{G}} \leqslant m_{\mathrm{A}}$.

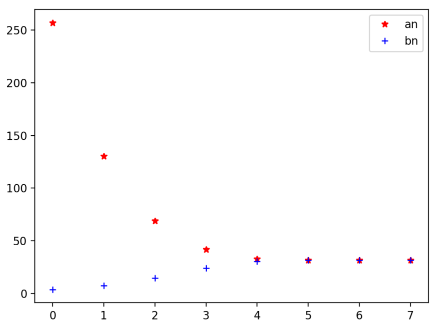
2. On définit les suites (a_n), (b_n) par

$$a_0, b_0 \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n) \\ \dfrac{1}{b_{n+1}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n}\right). \end{cases}$$

Proposer un programme Python qui prend au hasard a_0 dans $]0;1]$, b_0 dans $]0;300]$ et affiche les 8 premiers termes des suites (a_n), (b_n) construites à partir des deux réels a_0, b_0.

3. Voici quelques tests :





Que peut-on conjecturer sur les suites (a_n), (b_n) ?

4. Étudier les variations de (a_n), (b_n). En déduire que ces deux suites convergent vers une limite commune ℓ. En calculant $a_n b_n$, donnez une relation liant ℓ et $a_0 b_0$.

5. a) Montrez que $a_{n+1} - \ell = \frac{1}{2}\frac{(a_n-\ell)^2}{a_n}$.
Déduisez un résultat analogue pour $(a_{n+1} + \ell)$.

   b) Calculez $\dfrac{a_n - \ell}{a_n + \ell}$ en fonction de n. Déduisez un équivalent de $(a_n - \ell)$ quand $n \to +\infty$.

7 Problèmes

Exercice 43. ✦✦✦ **Autour de la constante d'Euler** *Sujet EMLyon 2002* *1h30*

On note, pour tout entier $p \geqslant 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad a_n = \sum_{p=1}^{n} u_p = u_1 + \ldots + u_n.$$

PARTIE I : Étude de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$

1. Montrer, pour tout entier $p \geqslant 1$:

$$0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$$

2. En déduire que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et converge vers un réel, noté γ, tel que $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

PARTIE II : Expression intégrale du réel γ

1. a) Établir, pour tout réel x : $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$.

   b) En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel t tel que $0 \leqslant t \leqslant n$:

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^t \quad \text{et} \quad \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t},$$

$$\text{puis :} \quad \left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n \mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

2. a) Établir, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel x de $[0;1]$:

$$(1-x)^n + nx - 1 \geqslant 0$$

   b) En utilisant 1.b) et 2.a), montrer, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel t tel que $0 \leqslant t \leqslant n$:

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{n}\mathrm{e}^{-t}$$

3. a) On note, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{I}_n = \int_0^n \frac{1}{t}\left(\mathrm{e}^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}t$$

   Justifier l'existence de I_n.

   b) Établir que I_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

4. a) Établir, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^k \mathrm{d}t = n\left(a_n + \ln(n+1)\right).$$

   b) On note, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{J}_n = \int_0^n \frac{1}{t}\left(1 - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}t$$

   Justifier l'existence de J_n, et montrer, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{J}_n = a_n + \ln(n+1)$$

5. On note :

$$U = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt \quad \text{et} \quad V = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

a) Justifier l'existence de U et de V.

b) Démontrer :

$$\gamma = U - V.$$

Exercice 44. ✦✦ **Les restes ...** 2h

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle. Lorsque la série de terme général u_n est convergente, on définit le reste de la série d'ordre n par

$$R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Si, à nouveau, la série de terme général $R_{1,n}$ est convergente, on dit que la série $\sum u_n$ est doublement convergente et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, la notion de double convergence.

1. *Exemple 1.*

Dans cette question uniquement, on suppose que $u_0 = 0$ et : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_k = \dfrac{1}{(k+1)k}.$

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{1,n}$.

Indication. On pourra d'abord simplifier $\sum\limits_{k=n+1}^{N} u_k$.

Est-ce que la série $\sum u_k$ est doublement convergente ?

2. *Exemple 2.*

Reprendre la question précédente avec la suite u définie par $\quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = \dfrac{1}{2^k}.$

3. *Exemple 3.*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$. Dans cette question, on s'intéresse au cas où : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_k = \dfrac{1}{k^\alpha}.$

a) Rappeler la condition nécessaire et suffisante de la convergence de la série $\sum u_k$.

b) Préciser les variations de $t \mapsto 1/t^\alpha$. Prouver que pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}.$$

Puis, pour tout entier $k \geqslant 2$, $\quad \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}.$

c) Soit $N > n$, montrer que

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Puis, $\quad \dfrac{1}{\alpha-1}\cdot\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{1,n} \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1}\cdot\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}.$

d) En déduire que

$$R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

e) Sous quelle condition nécessaire et suffisante la série $\sum u_k$ est doublement convergente.

f) Plus généralement, pour tout entier $p \geqslant 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série est p-convergente et on note $(R_{p,n})_n$ la suite des restes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}.$$

Conjecturer la valeur du plus grand entier p pour lequel $\sum u_k$ est p-convergente.
Prouver votre conjecture.

4. *Exemple 4.*

Dans cette question, on s'intéresse à la suite u définie par : $\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad u_k = \dfrac{(-1)^k}{k+1}$.

a) Justifier que

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. Prouver que

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} u_k = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{\mathrm{N}+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

c) En déduire la convergence de la série et l'égalité $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$.

d) En adaptant les calculs précédents, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{R}_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

e) Généraliser le résultat précédent en prouvant que pour tous $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{R}_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p}\,\mathrm{d}t.$$

CHAPITRE 2

Algèbre

1 Systèmes linéaires et matrices

1.1 Le pivot de Gauss

Méthode

Calcul du noyau d'une matrice dont les coefficients sont explicites.

Calculons le noyau de la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ à l'aide d'un pivot de Gauss. Soit $X = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z & t \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \mathrm{Ker}(A) \iff AX = 0_{4,1} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & y & + & z & + & 4t & = & 0 \\ 3x & & & + & 3z & + & 5t & = & 0 \\ 4x & + & 2y & + & & & 2t & = & 0 \\ 5x & + & 3y & - & z & & & = & 0 \end{array}\right. \underset{\substack{L_3 \leftarrow 3L_3 - 4L_1 \\ L_4 \leftarrow 3L_4 - 5L_1}}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & y & + & z & + & 4t & = & 0 \\ & - & y & + & 2z & + & t & = & 0 \\ & & 2y & - & 4z & - & 10t & = & 0 \\ & & 4y & - & 8z & - & 20t & = & 0 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3/2}}{\overset{L_4 = 2L_3}{\iff}} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & y & + & z & + & 4t & = & 0 \\ & & y & - & 2z & - & t & = & 0 \\ & & y & - & 2z & - & 5t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow (L_3 - L_2)/4}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & y & + & z & + & 4t & = & 0 \\ & & y & - & 2z & - & t & = & 0 \\ & & & & & - & t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcccl} x & = & \frac{1}{3}(-y-z) & = & -z \\ y & = & 2z & & \\ t & = & 0 & & \end{array}\right. .$$

Ainsi,
$$X \in \mathrm{Ker}(A) \iff X = \begin{bmatrix} -z \\ 2z \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = z \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En conclusion, le noyau est
$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ z \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

Exercice 45. ✦ Calculer les noyaux des matrices suivantes : *5min pour A,* *20min pour B.*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_\alpha = \begin{bmatrix} 2-\alpha & 3 & 1 \\ 5 & 6+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & -2-\alpha \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Méthode

Comment calculer l'inverse d'une matrice ?

D'après la proposition précédente, pour trouver l'inverse, il suffit de résoudre, pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'équation $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Or, la résolution est efficace par la méthode du pivot de Gauss.

Méthode

Exemple. Inversons la matrice :
$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&3&-2\\1&2&0\end{bmatrix}.$$

Soient $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a

$$AX=Y \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1&+&2x_2&-&x_3&=&y_1\\ x_1&+&3x_2&-&2x_3&=&y_2\\ x_1&+&2x_2&&&=&y_3\end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1&+&2x_2&-&x_3&=&y_1\\ x_1&+&3x_2&-&2x_3&=&y_2\\ &&&&x_3&=&y_3-y_1\end{array}\right.$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1&+&2x_2&-&x_3&=&y_1\\ &&x_2&-&x_3&=&y_2-y_1\\ &&&&x_3&=&y_3-y_1\end{array}\right.$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2+L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1&+&2x_2&-&x_3&=&y_1\\ &&x_2&&&=&y_2-2y_1+y_3\\ &&&&x_3&=&y_3-y_1\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x_1&=&4y_1-2y_2-y_3\\ x_2&=&-2y_1+y_2+y_3\\ x_3&=&-y_1+y_3\end{array}\right. \iff X=\begin{bmatrix}4&-2&-1\\-2&1&1\\-1&0&1\end{bmatrix}Y.$$

Donc A est inversible d'inverse
$$A^{-1}=\begin{bmatrix}4&-2&-1\\-2&1&1\\-1&0&1\end{bmatrix}.$$

Exercice 46. ✦ Calculer, quand il existe, l'inverse des matrices suivantes : *10min*

$$D=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{bmatrix}\quad\text{et}\quad E=\begin{bmatrix}3&-2&0&-1\\0&2&2&1\\0&1&2&1\\1&-2&-3&-2\end{bmatrix}$$

Méthode

Comment calculer le rang d'une matrice par un pivot de Gauss ?

Par exemple, calculons le rang de la matrice $A=\begin{bmatrix}1&3&2\\1&4&1\\0&-1&1\end{bmatrix}$.
Il suffit de reprendre la méthode pour calculer le rang d'une famille de vecteurs. Ici, on cherche le rang de la famille des vecteurs colonnes
$$C_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad C_2=\begin{bmatrix}3\\4\\-1\end{bmatrix}\quad\text{et}\quad C_3=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}.$$
Cherchons les relations linéaires entre ces vecteurs. Soient λ_1, λ_2, $\lambda_3\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1C_1+\lambda_2C_2+\lambda_3C_3=0$. On trouve le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda_1+3\lambda_2+2\lambda_3&=&0\\ \lambda_1+4\lambda_2+\lambda_3&=&0\\ -\lambda_2+\lambda_3&=&0\end{array}\right. \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl}\lambda_1+3\lambda_2+2\lambda_3&=&0\\ \lambda_2-\lambda_3&=&0\\ -\lambda_2+\lambda_3&=&0\end{array}\right. \underset{L_3=-L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl}\lambda_1&=&-5\lambda_3\\ \lambda_2&=&\lambda_3.\end{array}\right.$$

En choisissant par exemple $\lambda_3=1$, on trouve $\lambda_2=1$ et $\lambda_1=-5$, ainsi $-5C_1+C_2+C_3=0$. Le vecteur C_1 peut s'écrire comme combinaison linéaire de C_2 et C_3, donc $\mathrm{Vect}(C_1,C_2,C_3)=\mathrm{Vect}(C_2,C_3)$.
Comme C_2 et C_3 sont clairement linéairement indépendants, on a prouvé que $\mathrm{rg}(A)=2$.

1.2 Inversibilité et puissances d'une matrice

Méthode

Comment justifier qu'une matrice est inversible ?

On résume :

- *Si on demande l'inverse.*

  1. Pour une matrice carrée simple dont les coefficients sont explicites, on peut faire un **pivot de Gauss**.

  2. Si on a une équation polynomiale simple sur A, isoler le terme I_n de A.
  Plus généralement, on peut chercher une matrice carrée B telle que $AB = I_n (= BA)$;

  3. Si la matrice est diagonale, on vérifie que les coefficients diagonaux sont non nuls et l'inverse est la matrice diagonale obtenue en inversant tous les coefficients diagonaux.

  4. Dans le cas d'une matrice de taille 2, on a une formule explicite avec le déterminant.

- *Si on ne demande pas l'inverse.*

  5. Vérifier que le noyau de la matrice ne contient que la matrice colonne nulle.

  6. Vérifier que le rang de la matrice est maximal. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A est inversible si et seulement si $\text{rg}(A) = n$.

  7. Se souvenir qu'une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous les coefficients diagonaux sont non nuls.

  8. Pour les matrices de taille 2, utiliser le déterminant.

Exercice 47. ✦ Calculer, s'il existe, l'inverse des matrices suivantes : *15min*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 48. ✦ **Vrai ou faux ?** *5min*

1. La somme de deux matrices inversibles est inversible. ✓ ×

2. Toute matrice carrée est la somme de deux matrices inversibles. ✓ ×

Exercice 49. ✦ ♫ *Extrait oraux ESCP* *25min*

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que la matrice suivante soit une matrice de projecteur :

$$J_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

On suppose désormais que α prend cette valeur et on note J la matrice associée.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = I_3 + (-1 + e^x)J$ et $G(x) = I_3 - (1 + e^x)J$. Calculer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x)F(y)$.
La matrice $F(x)$ est-elle inversible ? Préciser l'inverse.
La matrice $G(x)$ est-elle inversible ?

Méthode

Calcul des puissances via la formule du binôme de Newton.

Posons : $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I_3 + N \quad \text{avec} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les puissances de N sont faciles à calculer

Méthode

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \forall\, k \geqslant 3, \quad N^k = N^{k-3}N^3 = 0_3.$$

Comme $2I_3$ et N commutent, la formule du binôme s'applique : pour $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A^p &= (2I_3 + N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} N^k (2I_3)^{p-k} \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{p}{k} 2^{p-k} N^k = 2^p \binom{p}{0} I_3 + 2^{p-1} \binom{p}{1} N + 2^{p-2} \binom{p}{2} N^2. \end{aligned}$$

On en déduit la formule explicite : $$A^p = 2^{p-2} \begin{bmatrix} 4 & 2p & \frac{p(p-1)}{2} \\ 0 & 4 & 2p \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Exercice 50. ✦ ♬ On pose $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ et $Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

1. Calculer P^2, Q^2, PQ et QP. *20min*
2. a) Déterminer deux réels α et β de sorte que $A = \alpha P + \beta Q$.
   b) En déduire une expression de A^p valable pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Méthode

Comment calculer les puissances par « diagonalisation » ?

Limitons nous à un exemple. Posons $$A = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -30 & 4 & 6 \\ -36 & 8 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

On vérifie par calcul que

$$A = PDP^{-1} \quad \text{où} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Par récurrence, on prouve que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$A^p = \underbrace{(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1})}_{p \text{ fois}} = PD\underbrace{P^{-1}P}_{I_n}DP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD^pP^{-1}.$$

Un dernier calcul donne pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$A^p = PD^pP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1^p & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^p & 0 \\ 0 & 0 & 0^p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -22 + 4(-2)^p & 4 & 4 - (-2)^p \\ -44 - 4(-2)^p & 8 & 8 + (-2)^p \end{bmatrix}.$$

Remarque. Cette méthode est un cas simple de raisonnements plus globaux de la théorie de la réduction (au programme de deuxième année). Nous verrons que la décomposition $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale est possible « pour la plupart » des matrices.

Exercice 51. ✦✦ On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$.

En examinant les instructions en Python suivantes, calculer les puissances de A. *20min*

Console

```
>>> import numpy as np
>>> A = np.array(([1, -6, 0], [2, -6, 2], [2, -4, 3]))
>>> P = np.array(([6, 2, -1], [2, 1, 0], [-1, 0, 1]))
>>> P_inv = np.linalg.inv(P)  # calcule l'inverse de la matrice P
>>> P_inv
array([[ 1., -2.,  1.],
       [-2.,  5., -2.],
       [ 1., -2.,  2.]])
>>> P_inv @ A @ P      # La commande @ permet le produit matriciel
array([[-1.00000000e+00,  0.00000000e+00,  0.00000000e+00],
       [ 6.66133815e-16, -2.00000000e+00,  0.00000000e+00],
       [ 4.44089210e-16,  0.00000000e+00,  1.00000000e+00]])
```

2 Polynômes

Exercice 52. ✦ Localisation des racines d'un polynôme. *20min*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $|a_0| + \cdots + |a_{n-1}| \leqslant |a_n|$.

1. Justifier que les racines réelles du polynôme d'expression

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

sont toutes comprises dans $[-1; 1]$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire que le polynôme Q défini par $Q(x) = nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x + 1$ n'admet aucune racine dans $\mathbb{Z}$.

Méthode

Comment prouver qu'un polynôme est nul ?

Il suffit de justifier l'un des énoncés suivants :

i) Tous les coefficients du polynôme sont nuls ;

ii) Le polynôme admet une infinité de racines ;

iii) Le polynôme admet strictement plus de racines (comptées avec multiplicité) que son degré.

Par exemple, prouvons que le seul polynôme P vérifiant pour tout réel x, $P(x) + P(x+1) = 0$ est le polynôme nul. On a $P(0)P(1) = -P(0)^2 \leqslant 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (P est continue car polynomial), il existe, $\alpha \in [0; 1]$ une racine de P. On constate que d'après la relation, $\alpha + 1$ est aussi racine. Par récurrence immédiate, pour tout entier n, $\alpha + n$ est racine. Le polynôme P admet une infinité de racines, il est donc nul.

Noter que pour prouver une égalité entre polynôme $P = Q$, on peut se ramener au cas précédent en montrant que $P - Q$ est le polynôme nul.

Exercice 53. ✦✦ ♫ Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts. *30min*

1. **a)** Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_k \in \mathbb{R}_n[x]$ (où $0 \leqslant k \leqslant n$) tel que :

$$\forall i \neq k, \qquad L_k(x_i) = 0 \quad \text{et} \quad L_k(x_k) = 1$$

b) Vérifier que L_k est de degré n.

c) Montrer que la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

2. Soit $y_0, \ldots, y_n$ des réels quelconques. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \qquad P(x_i) = y_i$$

Le polynôme P est appelé le polynôme d'interpolation de Lagrange.

Exercice 54. ✦✦ **Étude des polynômes de Bernoulli** *40min*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{R}[x]$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x+1) - P(x) = nx^{n-1}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit P une solution de $(\bullet)_n$. Démontrer que $\deg(P) = n$.
2. Soient P_1, P_2 deux solutions de $(\bullet)_n$. Justifier que $P_1 - P_2$ est un polynôme constant.
3. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Vérifier que si P est solution de $(\bullet)_n$ alors $\frac{1}{n}P'$ est solution de $(\bullet)_{n-1}$.
4. On définit la suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par la récurrence $B_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} \quad \text{et} \quad B_n'(x) = n\,B_{n-1}(x).$$

   a) Pourquoi la suite $(B_n)_n$ est bien définie. Préciser B_1, B_2 et B_3.
   b) Calculer $\int_0^1 B_n(t)\mathrm{d}t$ puis $\int_1^2 B_n(t)\mathrm{d}t$.
   c) Donner $B_n(0)$ et $B_n(1)$.

3 Espaces vectoriels

3.1 Généralités

Méthode

Pour vérifier que F est un sous-espace vectoriel, on se contente de vérifier que pour tout scalaire λ et tous vecteurs u, v de F,

$$\lambda \cdot u + v \in F \quad \text{et} \quad F \neq \varnothing.$$

Pour le second point, il suffit d'exhiber un élément de F, le plus simple étant 0_E. En effet, comme F est non-vide, il existe $u \in F$. F est stable par multiplication par un scalaire, donc $0_E = 0 \cdot u \in F$.
Précisons que si $0_E \notin F$, alors F ne peut pas être un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 55. ✦✦ Les ensembles suivants, munis des lois usuelles, sont-ils des espaces vectoriels? *20min*

$$E_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant y\right\}, \quad E_2 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = 2a+c\right\}, \quad E_3 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a-b=2\right\},$$
$$E_4 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2+c^2=b\right\}, \quad E_5 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid abc=0\right\}, \quad E_6 = \{P \in \mathbb{R}[x], P(0)=3\},$$
$$E_7 = \{P \in \mathbb{R}[x], P(3)=0\}, \quad E_8 = \left\{f \in \mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant K\right\},$$
$$E_9 = \left\{f \in \mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant K\right\} \text{ où } K \in \mathbb{R}_*^+ \text{ est fixé}, \quad E_{10} = \{f \in \mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}), f \text{ est paire}\}.$$

Méthode

Comment justifier qu'une famille est libre?

Appliquons la définition pour démontrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ où

$$\varepsilon_1 = (2,-1,2), \quad \varepsilon_2 = (0,1,2) \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 = (0,-1,3).$$

Soient λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels tels que $\lambda_1 \cdot \varepsilon_1 + \lambda_2 \cdot \varepsilon_2 + \lambda_3 \cdot \varepsilon_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. C'est équivalent à

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot (2,-1,2) + \lambda_2 \cdot (0,1,2) + \lambda_3 \cdot (0,-1,3) &= (0,0,0) \\ \iff (2\lambda_1, -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3) &= (0,0,0) \end{aligned}$$

Méthode

$$\iff \begin{cases} 2\lambda_1 &= 0 \\ -\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2-\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_2+3\lambda_3 &= 0 \end{cases}.$$

On en déduit que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. La famille $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ est libre.

Exercice 56. ✦ ♫ **Familles libres - exemples** *35min*

1. *Dans* $\mathbb{R}^n$.
   Montrer que la famille $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ de $\mathbb{R}^4$ définie par $\varepsilon_1=(3,-1,1,0)$, $\varepsilon_2=(1,1,-1,0)$, $\varepsilon_3=(-1,2,1,0)$ et $\varepsilon_4=(1,1,1,1)$ est libre.
2. *Dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$ et $D=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$.
   - **a)** Justifier que la famille (A,B,C,D) est une famille libre de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   - **b)** Que dire de la liberté de la famille (A,B,C,D,I_2) ?
3. ✦✦ *Dans les espaces fonctionnels.*
   - **a)** Étudier la liberté de la famille formée de $f_1=\ln$, $f_2=\exp$ et $f_3=\mathrm{id}_{\mathbb{R}_*^+}$ dans $\mathscr{A}(\mathbb{R}_*^+,\mathbb{R})$.
   - **b)** Étudier la liberté de la famille $\mathscr{F}=\left(\tan,\tan^2,\dots,\tan^n\right)$ dans l'espace vectoriel E des fonctions définies sur $]-\pi/2,\pi/2[$.

Exercice 57. ✦ **Avec un peu d'algèbre linéaire...** *15min*

On définit les fonctions f, g et h par

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\cos(x),\quad g(x)=\sin\left(x^2\right)\quad \text{et}\quad h(x)=\cos\left(x^3\right).$$

1. Donner les développements limités de f, g et h en 0 à l'ordre 4.
2. En déduire que la famille (f,g,h) est une famille libre dans l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Méthode

Comment justifier que deux sous-espaces sont supplémentaires ?

Pour prouver que F et G sont supplémentaires, il faut justifier que pour tout $w\in E$:

- Il existe un couple (u,v) tel que $w=u+v$ avec $u\in F$ et $v\in G$.
- Ce couple est unique.

Considérons $E=\mathbb{R}[X]$ et posons

$$F=\{P\in\mathbb{R}[X]\mid P \text{ est un polynôme pair}\}\quad \text{et}\quad G=\{P\in\mathbb{R}[X]\mid P\text{ est un polynôme impair}\}.$$

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$.

Analyse (recherche des conditions nécessaires).
On suppose que $P\in F+G$, il existe donc P_i et P_p des polynômes respectivement impair et pair tels que $P(X)=P_i(X)+P_p(X)$. On a aussi :

$$P(-X)=P_i(-X)+P_p(-X)=-P_i(X)+P_p(X).$$

Il vient : $$P_i(X)=\frac{P(X)-P(-X)}{2}\quad \text{et}\quad P_p(X)=\frac{P(X)+P(-X)}{2}.$$

Ainsi, les seuls candidats pour P_i et P_p sont ceux donnés par ces formules.

Synthèse (recherche des conditions suffisantes).

Posons $$P_i(X)=\frac{P(X)-P(-X)}{2}\quad \text{et}\quad P_p(X)=\frac{P(X)+P(-X)}{2}.$$

On vérifie :

Méthode

→ P_p est un polynôme pair car $P_p(-X) = \dfrac{P(-X)+P(X)}{2} = P_p(X)$. De même, on montre que P_i est un polynôme impair;

→ $P_p(X) + P_i(X) = \dfrac{P(X)-P(-X)}{2} + \dfrac{P(X)+P(-X)}{2} = P(X)$.

Conclusion.
Tout polynôme s'écrit de manière unique comme somme d'un polynôme pair et d'un polynôme impair. Cela justifie l'égalité $F \oplus G = \mathbb{R}[X]$.

Remarquons que l'analyse justifie l'unicité du couple tandis que la synthèse justifie son existence.

Exercice 58. ✦ ♫ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ les sous-espaces vectoriels des matrices symétriques et antisymétriques de taille n. Justifier que $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ sont supplémentaires.
Rappels : A est symétrique si ${}^t A = A$, antisymétrique si ${}^t A = -A$. *20min*

3.2 Précision en dimension finie

Méthode

Comment montrer qu'une famille est une base?

Il suffit de montrer que :

- La famille est libre;
- Elle admet exactement $\dim(E)$ éléments.

→ C'est ainsi que l'on montre que la famille suivante est une base de $\mathbb{R}^3$:

$$e_1 = (2,3,4), \quad e_2 = (0,3,1) \quad \text{et} \quad e_3 = (0,0,4).$$

En effet, cette famille est libre : soient λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. On trouve un système triangulaire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\lambda_1 & = & 0 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 & = & 0 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Comme la famille contient $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs, il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}^3$.
→ De même, la famille suivante est une base de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$P_1(X) = 1, \quad P_2(X) = X+3, \quad P_3(X) = X^2+4 \quad \text{et} \quad P_4(X) = 2X^3+X+1.$$

En effet, elle est libre (car de degrés échelonnés) et contient $\dim\big(\mathbb{R}_3[X]\big) = 3+1 = 4$ vecteurs.
Plus rarement, on montre qu'une famille est génératrice et qu'elle admet le bon nombre d'éléments.

Comment prouver une égalité entre deux sous-espaces vectoriels?

Pour prouver l'égalité entre sous-espaces vectoriels $F = G$, on prouve :

- Une inclusion, par exemple $F \subset G$;
- L'égalité des dimensions.

Dans $\mathbb{R}^2$, posons $u_1 = (1,1)$, $u_2 = (2,-1)$ et considérons $\text{Vect}(u_1, u_2)$.
On a bien sûr l'inclusion $\text{Vect}(u_1,u_2) \subset \mathbb{R}^2$. De plus, les vecteurs u_1 et u_2 sont non-colinéaires, donc $\dim\big(\text{Vect}(u_1,u_2)\big) = 2$. Finalement, $\text{Vect}(u_1,u_2) = \mathbb{R}^2$.

Exercice 59. ✦ Donner une base des espaces vectoriels suivants, préciser la dimension. *20min*

1. $E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \,\middle|\, a+b+c+d=0 \right\}$.
2. $E_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(4)=0\}$.
3. $E_3 = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ est diagonale}\}$.
4. E_4, le sev des matrices symétriques de taille n.

4 Applications linéaires

Méthode

Comment déterminer une base du noyau ?

Considérons l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (3x-y, -2x+2y-2z, -x-y+2z) \end{array} \right.$

Soit $X = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. En procédant par pivot de Gauss, on établit les équivalences suivantes :

$$X \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(X) = (0,0,0) \iff (3a-b, -2a+2b-2c, -a-b+2c) = (0,0,0)$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3a-b & = & 0 \\ -2a+2b-2c & = & 0 \\ -a-b+2c & = & 0 \end{array} \right. \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow -L_3 \\ L_2 \leftarrow -L_2/2}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} a+b-2c & = & 0 \\ -a+b-c & = & 0 \\ 3a-b & = & 0 \end{array} \right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-3L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} a+b-2c & = & 0 \\ 2b-3c & = & 0 \\ -4b+6c & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3=-2L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} a+b-2c & = & 0 \\ 2b-3c & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -b+2c = \frac{1}{2}c \\ b & = & \frac{3}{2}c \end{array} \right. \iff (a,b,c) = \frac{1}{2}c\,(1,3,2)$$

$$\iff X \in \mathrm{Vect}\big((1,3,2)\big).$$

On peut vérifier notre calcul en remarquant que $f\big((1,3,2)\big) = 0_{\mathbb{R}^3}$. En conclusion :

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\big((1,3,2)\big).$$

La famille contenant le vecteur $(1,3,2)$ est une base du noyau.

Exercice 60. ✧ Soient $\varphi : E \to F$ et $\psi : F \to G$ deux applications linéaires. Établir l'équivalence entre : *10min*

i) $\psi \circ \varphi = 0_{\mathscr{L}(E,G)}$; ii) $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$.

Exercice 61. ✦ ♫ **Noyaux et images itérés** *10min*

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $\mathrm{Ker}\left(f^k\right) \subset \mathrm{Ker}\left(f^{k+1}\right)$ et $\mathrm{Im}\left(f^{k+1}\right) \subset \mathrm{Im}\left(f^k\right)$.

Exercice 62. ✦✦ Soient E un espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$. *25min*

1. Préciser $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, g$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g$.
3. Vérifier que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$.
4. Conclure que $(\mathrm{Ker}\, f) \cap (\mathrm{Im}\, g) = \{0_E\}$.

Méthode

Comment prouver qu'une application p est un projecteur ?

D'après la caractérisation précédente, il suffit de justifier que p est linéaire *et* que $p^2 = p$.

- *Exemple 1.*

→ Soit $p : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(\dfrac{2x+2y}{3}, \dfrac{x+y}{3} \right) \in \mathbb{R}^2$. Vérifions tout d'abord que p est un projecteur.

Méthode

p est linéaire et $p^2\big((x,y)\big)=\left(\dfrac{2\frac{2x+2y}{3}+2\frac{x+y}{3}}{3},\dfrac{\frac{2x+2y}{3}+\frac{x+y}{3}}{3}\right)=\left(\dfrac{2x+2y}{3},\dfrac{x+y}{3}\right)=p\big((x,y)\big)$.

→ Calculons le noyau de p :

$$(x,y)\in \mathrm{Ker}(p) \iff \left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{2x+2y}{3} & = & 0\\ \dfrac{x+y}{3} & = & 0\end{array}\right. \iff \{\ x+y\ =\ 0 \iff (x,y)\in \mathrm{Vect}\big((1,-1)\big).$$

→ Calculons l'image de p : soit $v=(a,b)\in\mathbb{R}^2$,

$$v\in \mathrm{Im}(p) \iff \exists x,y\in\mathbb{R},\quad v=p\big((x,y)\big) \iff \exists x,y\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{2x+2y}{3} & = & a\\ \dfrac{x+y}{3} & = & b\end{array}\right.$$

$$\iff \exists x,y\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl}x+y & = & \frac{3}{2}a\\ x+y & = & 3b\end{array}\right. \iff \frac{3}{2}a=3b \iff v=(2b,b)=b(2,1).$$

Ainsi $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Vect}\big((2,1)\big)$.

→ Finalement, p est le projecteur sur $\mathrm{Vect}\big((2,1)\big)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\big((1,-1)\big)$.

• *Exemple 2. Les projecteurs associés*
Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Montrons que $q=\mathrm{id}_E-p$ est le projecteur sur G parallèlement à F. L'application q est linéaire et comme id_E et p commutent,

$$q^2=(\mathrm{id}_E-p)^2=\mathrm{id}_E{}^2-2p\circ\mathrm{id}_E+p^2=\mathrm{id}_E-2p+p=\mathrm{id}_E-p=q.$$

Soit $u\in E$.
$u\in F$ si et seulement si $p(u)=u$, c'est-à-dire $q(u)=u-p(u)=u-u=0_E$.
$u\in G$ si et seulement si $p(u)=0_E$, c'est-à-dire $q(u)=u-p(u)=u$.

Par suite, $$\mathrm{Im}(q)=G \quad\text{et}\quad \mathrm{Ker}(q)=F.$$

Exercice 63. ✦ Soit p, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : *10min*

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\qquad p(x,y,z)=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y-\frac{1}{2}z\ ,\ y\ ,\ -\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z\right).$$

Montrer que p est une projection, et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 64. ✦ Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le vecteur $u=(1,2,-1)$ et les espaces *20min*

$$F=\mathrm{Vect}(u)\quad\text{et}\quad G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ 2x+y+z=0\right\}.$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer l'expression de la projection p sur F parallèlement à G, et celle de la projection q sur G parallèlement à F.

Méthode

Comment calculer le rang d'une application à l'aide du noyau ?

Calculons par exemple le rang de l'application linéaire :

$$\varphi : P\in\mathbb{R}_n[X]\mapsto P''\in\mathbb{R}_n[X]\quad\text{avec}\quad n\geqslant 2.$$

On constate que le noyau de φ s'identifie à $\mathbb{R}_1[X]=\{aX+b\mid a,b\in\mathbb{R}\}$. Ce dernier est de dimension 2. Par la formule du rang, φ est donc de rang $(n+1)-2=n-1$.

Exercice 65. ✦ Soient $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Posons *20min*

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AMB. \end{array} \right.$$

1. Vérifier que φ est linéaire.
2. Montrer que φ est bijective et exprimer φ^{-1}.
3. Montrer que $\mathscr{B} = (I_2, A, B, AB)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, déterminer la matrice de φ dans $\mathscr{B}$.
Pour simplifier les calculs, on pourra utiliser ce calcul Python :

Editeur

```
import numpy as np
A=np.array([[2,1],[5,3]])
print(np.dot(A,A)-5*A+np.eye(2))

B=np.array([[4,1],[7,2]])
print(np.dot(B,B)-6*B+np.eye(2))
```

Console

```
>>> # script executed

[[0. 0.]
 [0. 0.]]
[[0. 0.]
 [0. 0.]]
```

Exercice 66. ✦ Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On considère deux endomorphismes f et g de E tels que :

$$f + g = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leqslant n.$$

1. Montrer que $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Im} f$ puis qu'il y a égalité. Que peut-on en déduire sur $g \circ f$?
2. En déduire que f et g sont des projecteurs de E. *20min*

Exercice 67. ✦✦ Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ avec E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. On suppose que

$$f \circ f = -\mathrm{id}_E.$$

1. f est-elle injective ? surjective ? bijective ? *30min*
2. Dans cette question seulement, on suppose que $n = 2$.
Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$, montrer que $\big(x, f(x)\big)$ est une base de E. Préciser la matrice J de f dans cette base.
3. ✦✦✦ *Généralisation.*
Justifier que dans le cas général d'une dimension n paire, il existe une base $\mathscr{B}$ pour laquelle, on a la matrice par blocs

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{bmatrix} J & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & J & \ddots & 0_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_2 & 0_2 & \cdots & J \end{bmatrix}.$$

Exercice 68. ✦✦ Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$c(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad s(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

On considère aussi le sous-espace vectoriel de E, $F = \mathrm{Vect}(\cos, \sin, c, s)$. *25min*

1. Justifier que la famille $\mathscr{B} = (\cos, \sin, c, s)$ est une base de F.
2. Vérifier que F est stable par dérivation, c'est-à-dire, pour tout $f \in F$, $f' \in F$.
On introduit alors l'endomorphisme
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ f & \mapsto & f' \end{array} \right. .$$
3. Donner M, la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.
4. Préciser M^k où $k \in \mathbb{N}$. *Distinguer* $k = 4p$, $k = 4p+1$, $k = 4p+2$ *et* $k = 4p+3$ *où* $p \in \mathbb{N}$.

Problème

Exercice 69. ✦✦✦ ♬ **Polynôme d'interpolation de Lagrange** *1h*

Pour tous i, $j \in \mathbb{N}$, on définit le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ par $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon. Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et $(a_1, \dots, a_n)$ une famille de nombres réels distincts deux à deux.

1. **a)** Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $L_i\left(a_j\right) = \delta_{i,j}$.

b) Montrer que la famille $(L_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

2. Soit $\pi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[x], \qquad \pi(P) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i.$$

a) Montrer que π est un projecteur de $\mathbb{R}[x]$.

b) Déterminer le noyau et l'image de π.

c) On note

$$F = \left\{ Q \prod_{i=1}^{n} (x - a_i) : Q \in \mathbb{R}[x] \right\}.$$

Montrer que $F \oplus \mathbb{R}_{n-1}[x] = \mathbb{R}[x]$.

d) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

3. Soit $\varepsilon : \mathbb{R}_{n-1}[x] \to \mathbb{R}^n$,

$$P \mapsto (P(a_i))_{i\in[\![1,n]\!]}.$$

a) Montrer que ε est un isomorphisme.

b) Soit $f \in \mathscr{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (une application de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que $P(a_i) = f(a_i)$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Ce polynôme s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction f aux points $(a_1, \dots, a_n)$.

4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$. Soient $f \in \mathscr{C}^n([a, b], \mathbb{R})$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que $a \leqslant a_1 < \dots < a_n \leqslant b$ et P le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f et aux points $(a_1, \dots, a_n)$.

a) Soit $x \in [a, b] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ et K réel. On définit la fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ par

$$t \mapsto f(t) - P(t) - K \prod_{i=1}^{n} (t - a_i).$$

Montrer qu'il existe K tel que $\varphi(x) = 0$.

b) Montrer que pour cette valeur de K, il existe $\zeta \in [a, b]$ tel que $\varphi^{(n)}(\zeta) = 0$

c) Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, on a :

$$\left|f(x) - P(x)\right| \leqslant \frac{\prod_{i=1}^{n} |x - a_i|}{n!} \sup_{[a,b]} \left|f^{(n)}\right|.$$

CHAPITRE 3

Probabilité

Exercice 70. ✦ *15min*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$, et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ avec

$$\forall k \in [\![0; n]\!], \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{a}{k+1}\binom{n}{k}.$$

1. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, exprimer $\mathbf{P}(X = k)$ en fonction de a, n et $\binom{n+1}{k+1}$.
2. Déterminer la valeur de a.
3. À l'aide de $\mathbf{E}(X+1)$, calculer l'espérance de X.

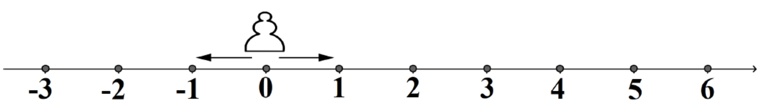
Exercice 71. ✦✦ **Rang du premier Pile-Face** *25min*

Considérons une infinité de lancers mutuellement indépendants d'une pièce équilibrée. On note X la variable aléatoire qui donne le rang d'apparition du premier Pile-Face (dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k). Si une telle succession ne se produit pas, on pose $X = 0$.
Notons A_i l'événement : « Un pile apparaît au i-ème lancer ».

1. En utilisant le système complet d'événements $(A_1, \overline{A_1})$, prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$,
$$\mathbf{P}\big([X = k+1]\big) = \frac{1}{2}\mathbf{P}\big([X = k]\big) + \frac{1}{2^{k+1}}.$$
2. En déduire $\mathbf{P}\big([X = k]\big)$ pour tout $k \geqslant 2$.
On pourra introduire la suite v définie, pour tout entier $k \geqslant 2$, par $v_k = 2^k \mathbf{P}\big([X = k]\big)$.
3. Préciser $\mathbf{P}\big([X \geqslant 2]\big)$ puis $\mathbf{P}\big([X = 0]\big)$.
4. Justifier que X admet une espérance. La calculer.

Exercice 72. ✦✦ ♫ Un pion se déplace sur un axe gradué. Il est initialement à l'origine. *30min*

On lance de manière mutuellement indépendante n fois une pièce équilibrée. À chaque lancer, on déplace d'une unité le pion vers la gauche si un face apparaît et vers la droite si un pile sort. Notons X_n l'abscisse du pion à la fin des n lancers et Y_n le nombre de faces obtenus.



1. Donner la loi de Y_n. Préciser l'espérance et la variance.
2. a) Exprimer X_n en fonction de Y_n.
   b) En déduire l'espérance et la variance de X_n.
3. Notons Z_n la distance à l'origine du pion à la fin des n lancers.
   a) Donner la loi de Z_2 et Z_3.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $\mathbf{V}(Z_n) \leqslant \mathbf{V}(X_n)$.
4. a) Préciser $\mathbf{P}([X_n = 0])$ en fonction de la parité de n.

b) En utilisant la formule de Stirling

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

donner un équivalent simple de $\mathbf{P}([X_{2n}=0])$.

Exercice 73. ✦✦✦ ♬ **Les fonctions génératrices** *40min*

Soient $n\in\mathbb{N}$ et X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$ et à valeurs dans $[\![0;n]\!]$. On définit alors la *fonction génératrice* G_X de X par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad G_X(t)=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}\big([X=k]\big)\,t^k.$$

1. **a)** Préciser $G_X(1)$.
   b) Justifier que $\mathbf{E}(X)=G_X'(1)$.
   c) Trouver une relation simple entre $\mathbf{V}(X)$, $G_X''(1)$ et $G_X'(1)$.
2. Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}_*^+$, $\mathbf{E}(t^X)=G_X(t)$.
3. *Une application.*
   Un basketteur à n paniers à trois points à mettre. Il s'arrête au premier échec. On suppose que s'il se présente au i-ème lancer, la probabilité de réussir le panier est $q_i\in]0;1[$. Soit X_n la variable aléatoire qui renvoie le nombre de paniers réussis.
   a) Donner la loi de X_n en fonction des nombres q_i.
   b) On se place dans le cas où pour tout indice i, $q_i=q$. Prouver que pour tout $t\in\mathbb{R}\setminus\{1/q\}$

$$G_{X_n}(t)=p\frac{1-(qt)^n}{1-qt}+(qt)^n.$$

   c) En déduire que $\mathbf{E}(X_n)=\dfrac{q}{p}(1-q^n)$. Préciser la limite $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{E}(X_n)$.

Exercice 74. ✦ Soit X une variable aléatoire discrète telle que : *20min*

$$X(\Omega)=\mathbb{N}\quad\text{et}\quad\forall k\in\mathbb{N},\quad 4\mathbf{P}([X=k+2])=9\mathbf{P}([X=k+1])-2\mathbf{P}([X=k]).$$

1. Donner la loi de X.
2. Justifier que X admet une espérance et une variance et les calculer.
   On pourra remarquer que la variable $Y=X+1$ *suit une loi usuelle.*

Exercice 75. ✦✦✦ ♬ **Une seconde expression de l'espérance** *35min*

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$ avec $X(\Omega)=\mathbb{N}$.

1. *Préliminaires.*
   a) Soit $k\in\mathbb{N}^*$, exprimer $\mathbf{P}\big([X=k]\big)$ à l'aide de $\mathbf{P}\big([X>k]\big)$ et $\mathbf{P}\big([X>k-1]\big)$.
   b) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n}k\mathbf{P}\big([X=k]\big)=\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}\big([X>k]\big)\right)-n\mathbf{P}\big([X>n]\big).$$

2. On suppose que X admet une espérance.
   a) Montrer que $n\mathbf{P}\big([X>n]\big)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.
   b) En déduire que la série $\sum\mathbf{P}\big([X>k]\big)$ est convergente et que $\mathbf{E}(X)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}\big([X>k]\big)$.
3. Réciproquement, supposons que la série $\sum\mathbf{P}\big([X>k]\big)$ converge.
   Montrer que X admet une espérance, et que $\mathbf{E}(X)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}\big([X>k]\big)$.

Exercice 76. ✦✦ **Inégalité de Hölder** *45min*

1. Soient $p, q \in \mathbb{R}_*^+$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
   a) Soient $a \in \mathbb{R}_*^+$. On pose $f : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \frac{x^q}{q} + \frac{a^p}{p} - ax$. Vérifier que f admet un minimum atteint en $a^{1/(q-1)}$. Préciser la valeur de ce minimum.
   b) En déduire l'inégalité : $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \quad ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires positives telles que $\mathbf{E}(X^p)$ et $\mathbf{E}(Y^q)$ existent.
   a) Justifier que XY admet une espérance.
   b) En considérant $\tilde{X} = X/E(X^p)^{1/p}$ et $\tilde{Y} = Y/E(Y^q)^{1/q}$, justifier que : $|E(XY)| \leqslant E(X^p)^{1/p} E(Y^q)^{1/q}$.
3. Application
   Soit Z une variable aléatoire discrète positive admettant un moment d'ordre n. Montrer que, pour tous réels r, s tels que $0 < r < s \leqslant n$, on a
   $$E(Z^r)^{1/r} \leqslant E(Z^s)^{1/s}.$$

Exercice 77. ✦✦ Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, $p \in]0; 1[$. On pose $q = 1 - p$. *45min*

On effectue des tirages dans une urne contenant des boules blanches et noires. On suppose que la proportion de boules blanches est p. On tire avec remise et on arrête les tirages dans l'une des deux situations suivantes :

- Une boule blanche apparaît;
- On obtient n boules noires.

Les tirages sont indépendants. Dans la suite, on note :

- B_i : l'événement "On tire une boule blanche au i-ème lancer".
- T_n : La variable aléatoire donnant le nombre de lancers effectués.
- X_n : La variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches obtenues.
- Y_n : La variable aléatoire donnant le nombre de boules noires obtenues.

1. *Étude de* T_n
   a) Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$. Exprimer l'événement $[T_n = k]$ à l'aide des événements B_i. En déduire $\mathbf{P}([T_n = k])$.
   b) Démontrer que
   $$\mathbf{P}([T_n = n]) = q^n + q^{n-1}p.$$
   c) Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}([T_n = k]) = 1$.
   d) Exprimer l'espérance de T_n avec les nombres $\mathbf{P}([T_n = k])$. Faire le calcul.
   Pour le calcul, on pourra dériver f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.
2. *Étude de* X_n
   a) Vérifier que X_n suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.
   b) En déduire l'espérance et la variance de X_n.
3. *Étude de* Y_n
   a) Exprimer Y_n avec X_n et T_n.
   b) Donner l'espérance de Y_n.

Exercice 78. ✦✦ **Racines d'un polynôme à coefficients aléatoires** *35 minutes*

Soient U et V deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ avec U suivant une loi uniforme sur $\{-1; 0; 1\}$ et V de loi géométrique de paramètre p. Pour tout $\omega \in \Omega$, on définit $N(\omega)$ comme le nombre de racines du polynôme
$$Q_\omega(x) = x^2 + 2U(\omega)x + V(\omega).$$
Donner la loi de N. Proposer un programme python qui simule N.

Exercice 79. ✦✦✦ ♫ **Sommes et produits de variables aléatoires** *40 minutes*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, à valeurs dans $\{-1; 1\}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p = \mathbf{P}([X_1 = 1])$, et on suppose que $p \in]0; 1[$.

1. *Le produit*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$Y_n = \prod_{i=1}^{n} X_i.$$
   a) Déterminer les lois de Y_2 et de Y_3.
   b) On pose, pour $n \geqslant 1$, $\mathbf{P}([Y_n = 1]) = p_n$. Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n, puis la valeur de p_n pour tout $n \geqslant 1$.
   c) Existe-t-il des valeurs de n pour lesquelles les variables Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes?
2. *La somme*
On pose : $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer la loi de S_n, son espérance et sa variance.
3. *Python*
Écrire un programme permettant de simuler les variables S_n et Y_n.

Exercice 80. ✦✦✦ *D'après oral ESCP* *1h10*

Un individu gravit un escalier. À chaque fois, avant de faire un pas, il lance une pièce non équilibrée donnant pile avec la probabilité p (avec $0 < p < \frac{1}{2}$) et progresse d'une marche s'il obtient "pile» et enjambe deux marches d'un coup s'il obtient «face».

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n le nombre de marches gravies à l'issue des n premiers pas et X'_n le nombre de fois ou l'individu a progressé par enjambées de 2 marches au cours des n premiers pas.
   a) Déterminer une relation simple liant X_n et X'_n. En déduire la loi de X_n.
   b) Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X_n.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit Y_n le nombre aléatoire de pas justes nécessaires pour atteindre ou dépasser la $n^{\text{ème}}$ marche et $\mathbf{E}(Y_n)$ l'espérance de Y_n.
   a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Y_n ?
   b) Déterminer la loi de Y_1, puis celle de Y_2 et préciser l'espérance de ces deux variables aléatoires.
   c) Montrer que pour tout entier naturel k, et tout entier $n \geqslant 3$, on a :
$$\mathbf{P}(Y_n = k) = p\mathbf{P}(Y_{n-1} = k-1) + (1-p)\mathbf{P}(Y_{n-2} = k-1)$$
   d) Montrer que pour $n \geqslant 3, \mathbf{E}(Y_n) = p \cdot \mathbf{E}(Y_{n-1}) + (1-p)\mathbf{E}(Y_{n-2}) + 1$.
3. On considère l'ensemble E des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \geqslant 3$, on ait :
$$u_n = pu_{n-1} + (1-p)u_{n-2} + 1$$
   a) Montrer qu'il existe un réel α, que l'on déterminera, tel que la suite $(\alpha n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E.
   b) Montrer que u appartient à E si et seulement si la suite $v : n \mapsto u_n - \alpha n$ vérifie la relation :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = pv_{n-1} + (1-p)v_{n-2}.$$
   c) En déduire la valeur de $\mathbf{E}(Y_n)$.

Exercice 81. ✦✦✦ **Les moments déterminent la loi** *d'après oraux HEC* *45min*

1. Rappeler la définition de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire discrète.
2. Soit Y une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ qui prend les valeurs 0 , 1 et 2 avec les probabilités p_0, p_1 et p_2 respectivement. On suppose que $\mathbf{E}(Y) = 1$ et $\mathbf{E}(Y^2) = 5/3$.
Calculer p_0, p_1 et p_2.
3. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n+1)$ réels distincts et soit φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui, à tout polynôme Q de $\mathbb{R}_n[x]$, associe le $(n+1)$-uplet $(Q(x_0), Q(x_1), \ldots, Q(x_n))$.
   a) Montrer que φ est une application linéaire bijective.
   b) Déterminer la matrice A de φ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
   c) Soit X une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_n$. On suppose que l'on connaît les valeurs de $\mathbf{E}(X), \mathbf{E}(X^2), \ldots, \mathbf{E}(X^n)$.
   Peut-on déterminer la loi de X?

Exercice 82. ✦✦✦ **Variante du problème du collectionneur** *D'après l'oral de Solal 2026* *30min*

Soient N, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. On dispose de N cases numérotées de 1 à N et l'on lance successivement n boules dans ces cases. Chaque boule tombe dans chaque case avec probabilité $1/N$, indépendamment des autres boules.
On note T_n le nombre de cases occupées après les n premiers lancers.

1. a) Déterminer la loi de T_1 et calculer $\mathbf{E}(T_1)$.
   b) Faire de même avec T_2.
2. Calculer $\mathbf{P}(T_n = 1)$, puis $\mathbf{P}(T_n = 2)$.
3. Montrer que
$$\mathbf{E}(T_n) = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).$$

Proba et Python

Exercice 83. ✦ **Moments** *20min*

Soit X une variable aléatoire sur un univers fini. On rappelle que donner la loi de X signifie donner

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\} \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1; m]\!], \quad \mathbf{P}([X = x_i]).$$

Dans ce cas, on définit les listes val et Loi par :

$$\text{val} = [\ x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m\ ] \quad \text{et} \quad \text{Loi} = [\mathbf{P}([X = x_1]) \quad \mathbf{P}([X = x_2]) \quad \cdots \quad \mathbf{P}([X = x_m])]$$

1. Écrire une fonction Python, nommée `moment`, qui prend en argument les deux listes (val, Loi), un entier s et renvoie renvoie le moment $\mathbf{E}(X^s)$.
2. En utilisant uniquement la fonction `moment`, écrire une nouvelle fonction qui calcule la variance.

Exercice 84. ✦✦ **Lois usuelles avec random()** *30min*

Une urne contient 5 boules (1 rouge et 4 bleues). On considère l'expérience suivante

On tire une boule au hasard et on note la couleur. On replace ensuite la boule dans l'urne.

1. Soit X la variable aléatoire qui renvoie 1 si la boule est rouge et 0 sinon.
   Préciser la loi de X.
   En utilisant uniquement la commande `random`, écrire un programme qui simule la variable X.
2. On répète maintenant n fois l'expérience élémentaire. On suppose les tirages mutuellement indépendants. On note Y le nombre de boules rouges obtenues.
   Quelle est la loi de Y ?
   Avec la commande `random`, écrire un programme qui prend en argument n et simule Y.
3. On repète maintenant une infinité de fois l'expérience élémentaire. On suppose toujours les tirages mutuellement indépendants. On note Z le numéro du tirage où on a obtenu la première boule rouge.
   Quelle est la loi de Z ? Écrire un programme qui simule la variable Z.
4. Modifier le programme précédent pour simuler la variable X_2 qui donne le numéro du tirage où on obtient la seconde boule rouge.
   Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Généralisez la question avec X_r, la variable aléatoire qui renvoie le tirage de la r-ième boule rouge.

CHAPITRE 4

Informatique

Il ne faut pas négliger l'informatique. Citons un rapport du jury des concours :

> *Avec la dernière réforme du programme, l'informatique a encore gagné en importance. Si plusieurs candidats ont su bien traiter les questions d'informatique, encore trop de candidats s'étaient contentés d'un survol rapide de la matière, quand ils ne l'avaient pas délaissée totalement.*
> *Presque tous les sujets comportaient une question d'informatique lors de cette session et cette proportion devrait continuer de croître l'an prochain, le but étant que tous les candidats soient interrogés sur une partie du programme d'informatique. Ces questions nous permettent d'évaluer l'esprit pratique et de relier les mathématiques à des cas concrets.*
>
> *Rapport de Jury : Oraux, HEC 2023*

1 Quelques programmes de référence

1.1 Tracé d'une courbe

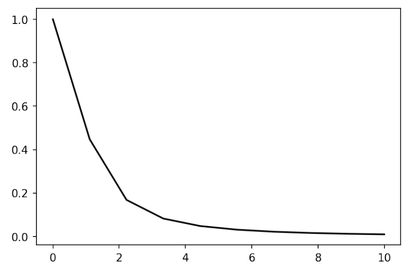
La commande `plt.plot(x,y)` permet de tracer une ligne brisée reliant les points du plan de coordonnées (x_i, y_i). Ainsi, pour tracer la courbe représentative d'une fonction, il suffit de créer une liste `x` pour l'axe des abscisses avec la commande `np.linspace()` ou `np.arange()` puis de créer une nouvelle liste `y` pour l'axe des ordonnées en appliquant la fonction à chaque élément de `x`. Bien sûr, plus le nombre de points est grand, plus le tracé sera précis.
Par exemple, donnons la courbe de $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[0;10]$.

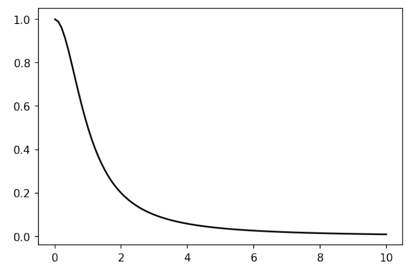
Editeur

```
A = np.linspace(0,10,10)
D = 1/(1+A**2)
plt.plot(A,D)
```

Editeur

```
A = np.linspace(0,10,100)
D = 1/(1+A**2)
plt.plot(A,D)
```





Exercice 85. ✦ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x/(1+|x|)$. *15min*

1. Comment obtenir le graphe de f sur $[-5;5]$?

2. Justifier que la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle J à préciser.

3. Donner le graphe de la réciproque ?

1.2 Boucle for - Calcul du n-ième terme d'une suite

Ordre 1

Donnons un programme utilisant une boucle inconditionnelle `for` pour déterminer le n-ième terme d'une suite récurrente d'ordre 1. Par suite récurrente d'ordre 1, nous entendons une suite où le calcul du $(n+1)$-ième terme dépend du n-ième terme de la suite. Par exemple :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = {u_n}^2 - 3u_n + 5.$$

Editeur

```
def Suite(n) :
    u=1
    # Initialisation
    for i in range(1,n+1):
        u=u**2-3*u+5
        # Formule de récurrence
    return u
```

Console

```
>>> Suite(1)
3

>>> Suite(3)
15
```

Exercice 86. ✦ ♫ **Calcul d'un n-ième terme d'une suite via Python** ⏱ *10min*

1. Écrire une fonction qui prend n en argument et qui renvoie les n-ièmes termes de la suite u définie par la relation de récurrence :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{{u_n}^2 + 1}$$

2. Conjecturer et prouver une formule simple pour u_n.
3. Comment écrire une fonction qui prend en argument n et renvoie $[u_0, \quad u_1, \quad \dots, u_n]$?

Récurrence à plusieurs pas

Prenons l'exemple d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n.$$

Editeur

```
def rec2(u0,u1,n):
    u=u0
    v=u1
    for i in range(n-1) :
        w=2*v+u
        u=v
        v=w
    print("u{}={}".format(n,w))
```

Console

```
rec2(0,1,2)
>>> u2 = 2

rec2(0,1,5)
>>> u5 = 29
```

1.3 Boucle for - Calcul d'une somme/d'un produit

Illustrons l'utilisation d'une boucle `for` dans le calcul d'une somme. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$. En remarquant que $S_i = S_{i-1} + i^3$, on revient au cas précédent. Voici une fonction Python qui prend en argument n et renvoie S_n.

Editeur

```python
def Somme_S(n):
    s=0
    for i in range(0,n+1):
        s=s+i**3
        #ou s+=i**3
    return s
```

Console

```
>>> print(Somme_S(10))

3025
```

Exercice 87. ✦ Écrire un programme qui calcule $\prod_{k=0}^{99} \cos\left(k\pi/(200)\right)$. *5min*

1.4 Boucle for - Principe d'un compteur

Il arrive régulièrement qu'on compte le nombre d'éléments d'un ensemble E vérifiant une certaine propriété $\mathscr{P}$. Pour créer un algorithme qui exécute cette tâche, on peut procéder de la manière suivante.

1. On introduit une variable `Compteur` qui va compter le nombre d'éléments vérifiant $\mathscr{P}$.
   Au début, `Compteur=0`.
2. On parcourt chaque élément de l'ensemble E à l'aide d'une boucle `for`.
3. Pour chaque élément, on teste (à l'aide d'une structure `if`), si l'élément vérifie la propriété ou non. Si la propriété est bien satisfaite, on augmente la valeur de `Compteur` de 1.
4. À la fin de la boucle, `Compteur` donne le nombre d'éléments vérifiant la propriété $\mathscr{P}$.

Exemple. Donnons un algorithme qui compte les nombres premiers inférieurs à 100.

Editeur

```python
Compteur  = 0

for k in range(2,101)  :
# On ne traite ni 0 ni 1, en revanche on traite 100

    Diviseurs = 0
    for i in range(2, k//2+1):
        if (k % i) == 0:
        # i est un diviseur de k
           Diviseurs +=1
    if Diviseurs == 0 :
      Compteur +=1

print("Nombre premier inférieur à 100 :",Compteur)

# Une fois ce code exécuté, Python renvoie la réponse : 25.
```

1.5 While - Algorithme de seuil

Ce type d'algorithme intervient lorsqu'on cherche le plus petit entier n tel que la propriété $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Il est très courant de le rencontrer dans l'étude des suites.

Exemple. On montre que la suite u, définie par la formule de récurrence suivante converge vers 2.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2}{(n+2)(n+1)} + u_n \quad \text{et} \quad u_0 = 0.$$

On cherche l'indice n tel que $u_n - 2$ devient inférieur à un seuil donné. Déterminons par exemple, le plus petit entier n pour lequel $|u_n - 2| \leqslant 10^{-3}$.

Editeur

```
u=0  # Initialisation
n=0
while (abs(u-2) > 0.001) :
    u=u+2/((n+1)*(n+2))
    # Calcul du terme suivant par la formule de récurrence
    n=n+1

print("La plus petite valeur est : ",n)

# Ce code affiche la valeur 1999.
```

Exercice 88. ✦ *10min*

Écrire un programme qui prend en argument un réel A et renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant A$.

Exercice 89. ✦ ♬ On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2k}\right).$$

15min

1. Écrire un programme qui prend en argument n et renvoie u_n.
2. On admet que la suite u converge vers 0.
   Écrire un programme qui renvoie la plus petite valeur n pour laquelle $u_n \leqslant 10^{-3}$.

1.6 While - Approximation de limite à une précision donnée

Soit u une suite convergente vers une limite finie ℓ. On souhaite obtenir une approximation de la limite.
On a $|u_n-\ell| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En définissant une précision voulue, on peut donc déterminer une approximation de ℓ à cette précision près, on cherche donc un entier n tel que $|u_n-\ell| <$ précision.

Exemple. On considère la suite u définie par le terme général

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

On montre que la suite est bien définie et qu'elle converge vers une limite finie ℓ avec $|u_n-\ell| \leqslant \dfrac{1}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Le programme suivant donne une approximation de ℓ à 10^{-3}-près.

Editeur

```
def limite(precision) :
    s=1 # initialisation somme
    n=1 # initialisation indice
    erreur=1 # initialisation écart à la limite
    while erreur > precision :
        n+=1
        s+=1/(n**2)
        erreur=1/n
    return s
```

Cette fonction exécutée avec la précision `0.001` donne `1.6439345666815615`. Testons ce résultat sachant que la limite de la suite u est $\pi^2/6$.

Console

```
>>> m.pi**2/6
1.6449340668482264
```

Exercice 90. ✦✦ ♫ **Approximation d'une limite** *15min*

On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

Écrire une fonction qui prend en argument un réel strictement positif ε et renvoie une approximation de la limite $\mathrm{e} = \exp(1)$ à une précision ε-près.

1.7 While - Algorithme de Dichotomie

On rappelle le code pour approximer un zéro d'une fonction f.

Editeur

```
def dichotomie(a0,b0,precision):
    a=a0
    b=b0
    p=precision
    while b-a>p :
        c=(a+b)/2
        if f(a)*f(c)<=0:
            b=c
        else :
            a=c
    return(b)
```

2 Les exercices

Exercice 91. ✧ **Table de multiplication** *10min*

Écrire un programme qui renvoie sous forme de matrice le tableau suivant :

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Exercice 92. ✦ ♫ Écrire un programme qui prend en argument une fonction f, un entier naturel non nul n et deux réels a, b (avec $a < b$) et renvoie la somme de Riemann d'ordre de f :

$$\mathrm{S}_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Tester ensuite votre programme en calculant $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{4\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$. *20min*

Exercice 93. ✦ *10min*
Écrire une fonction `puissance` qui prend en argument entier n, un réel a strictement positif et renvoie la plus petite puissance de a supérieure ou égale à n.

Exercice 94. ✦✦ On définit la suite réelle u par : *20min*

$$u_0 = 1, \quad u_1 = \frac{1+{u_0}^2}{1}, \quad u_2 = \frac{1+{u_0}^2+{u_1}^2}{2}, \quad \cdots, \quad u_n = \frac{1+{u_0}^2+\cdots+{u_{n-1}}^2}{n}.$$

Écrire un programme qui calcule les dix premiers termes de cette suite.

Exercice 95. ✦✦ *10min*
La série $\sum \frac{1}{n^3}$ est convergente. Écrire un programme qui calcule les termes successifs de la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des sommes partielles de cette série jusqu'à ce que $\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1} < 10^{-10}$ et renvoie le dernier S_n calculé.

Exercice 96. ✦✦ **Suite périodique** *30min*
On définit la fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ par disjonction des cas :

$$\forall\, x \in [0;1], \qquad f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0;1/2], \\ 2(1-x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Donner le graphe de f.

On définit ensuite la suite u par : $\quad u_0 \in [0;1] \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$

2. Écrire un programme qui prend comme arguments u_0 et n et renvoie les n premiers termes de la suite initialisée à u_0.

3. **a)** Tester le programme pour $u_0 = 1/2$, $u_0 = 1/4$, $u_0 = 1/8$... Que se passe-t-il ?
Énoncer un résultat pour tout $u_0 = 1/2^p$ où $p \in \mathbb{N}$. *Facultatif.* Prouvez-le.

b) Tester ensuite $u_0 \in \{2/5 ; 2/7 ; 2/11 \cdots\}$. Que constatez-vous ?

Exercice 97. ♫ On rappelle que la suite de Fibonacci $(\mathrm{F}_k)_k$ est la suite définie par *20min*

$$\mathrm{F}_0 = 0, \quad \mathrm{F}_1 = 1 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n.$$

Les premiers termes de la suite sont $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

1. Écrire une fonction d'entête `def fibo(n):` qui renvoie les $n+1$ premiers termes de la suite $(\mathrm{F}_k)_k$.

2. Écrire une nouvelle fonction qui prend un réel x positif et renvoie le nombre de Fibonacci le plus proche tout en lui étant inférieur.

Exercice 98. ✦✦✦ **Suites adjacentes** *30min*
On considère le programme suivant :

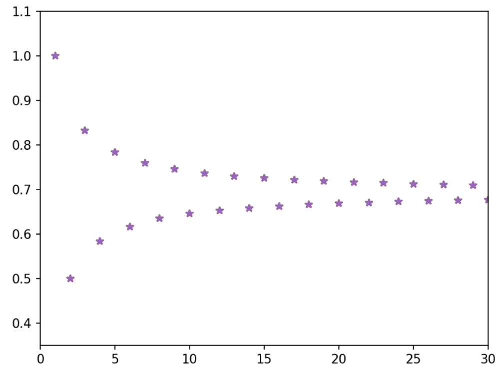
Editeur

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

n=30
x=np.arange(1,n+1)
y=np.zeros(n)
eps=1
for i in range(n):
    y[i]=eps/(i+1)
    eps=eps*(-1)
z=np.cumsum(y)

plt.axis([0, 30, 0.35, 1.1])
plt.plot(x,z,'*')
plt.show()
```

Ci-dessous, le résultat obtenu :



1. Préciser le contenu des variables y et z après l'exécution du programme.
2. Ce graphe suggère que deux suites sont adjacentes. Lesquelles ?
3. Démontrer cette conjecture.

Exercice 99. ✦ **Suites de Michel Mendès-France** # PY19

Soient $k \in \mathbb{R}^+$ et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On définit les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ par les récurrences :

$$x_0 = y_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + k^n \cos\big(2\pi f(n)\big) \\ y_{n+1} = y_n + k^n \sin\big(2\pi f(n)\big). \end{cases}$$

On définit ensuite les points M_n par $\mathrm{M}_n : (x_n, y_n)$.

1. Écrire un programme qui prend en arguments $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, k, f et relie par un segment les points M_0, M_1, M_2, …, M_N.

2. *Exemples.* Tester les valeurs suivantes pour retrouver les figures de la page suivante

- **a)** $k = 1$, $\mathrm{N} = 5000$ et $f(x) = x^{1.18649}$;
- **b)** $k = 1$, $\mathrm{N} = 1550$ et $f(x) = \sin\big(x^{1/2}\big)$;
- **c)** $k = 1$, $\mathrm{N} = 1000$ et $f(x) = x^{3/2}$;
- **d)** $k = 1$, $\mathrm{N} = 6000$ et $f(x) = 0.141593x^2$;
- **e)** $k = 1$, $\mathrm{N} = 30000$ et $f(x) = 0.0666818x^2$.

3. Comment modifier le programme précédent pour s'arrêter dès qu'on sort du carré $[-100;100]^2$?

Michel Mendès-France est un mathématicien français (1936-2018), fils de Pierre Mendès-France, homme d'État français, président du Conseil des ministres du 18 juin 1954 au 23 février 1955.

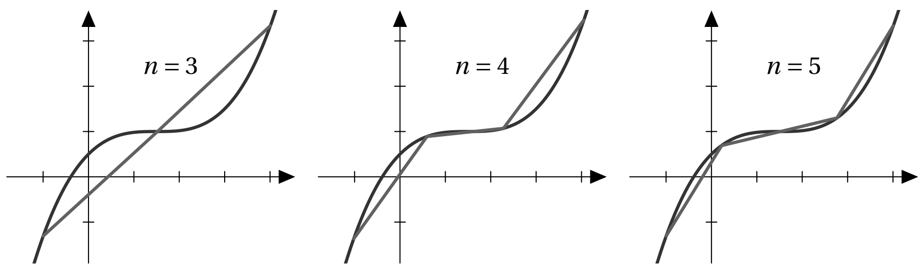
Exercice 100. ✦✦✦ **Approximation de la longueur d'une courbe** *30min*

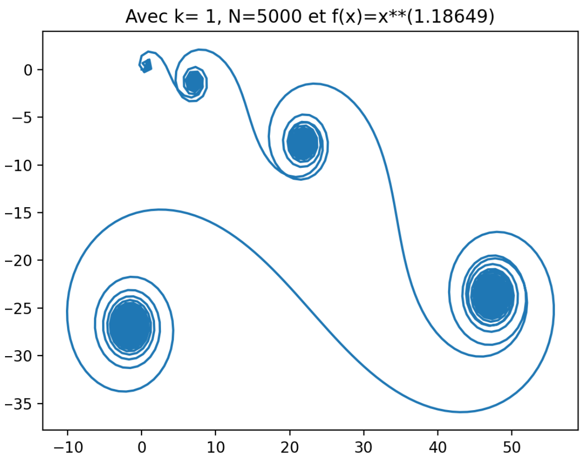
1. Écrire une fonction qui prend en argument deux points A $(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A})$ et B $(x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B})$ de $\mathbb{R}^2$ et renvoie la distance entre A et B.
Pour rappel, $\mathrm{AB}^2 = (x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})^2 + (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})^2$.

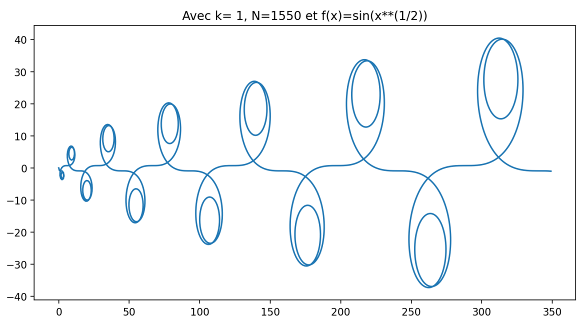
2. Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$.
Afin d'approximer la longueur de la courbe représentative de f, on découpe l'intervalle $[a;b]$ régulièrement

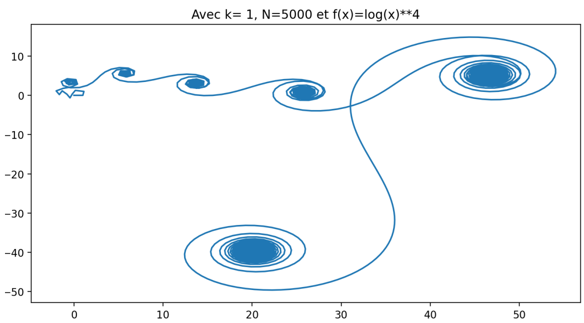
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

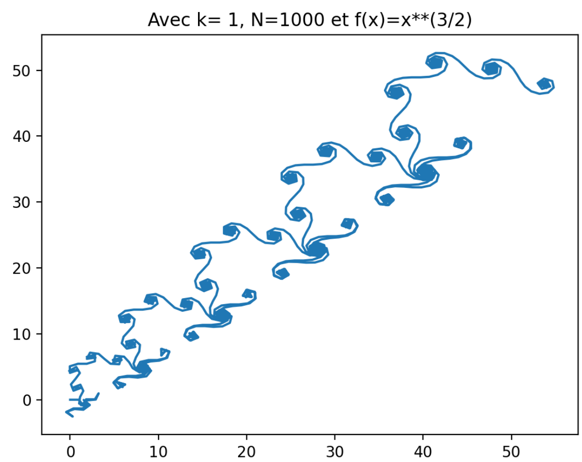
Puis, on somme les distances entre les points $\big(x_i, f(x_i)\big)$ et $\big(x_{i+1}, f(x_{i+1})\big)$ pour tout indice i.
Écrire un programme qui prend en entrée une fonction f, un entier n et renvoie une approximation de la longueur de la courbe représentatif de f.

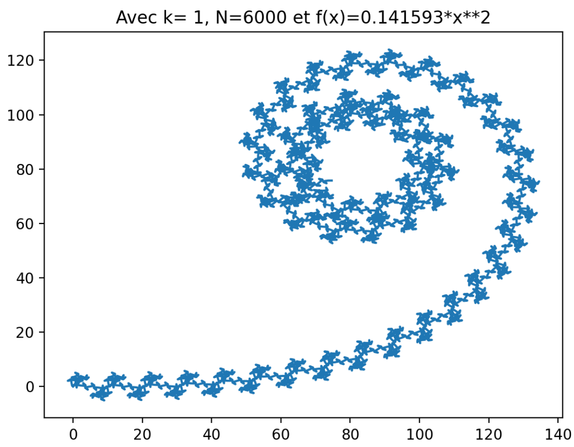


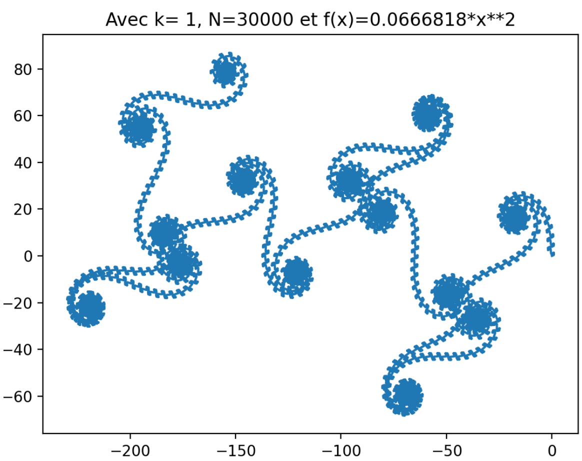

Avec k= 1, N=5000 et f(x)=x**(1.18649)

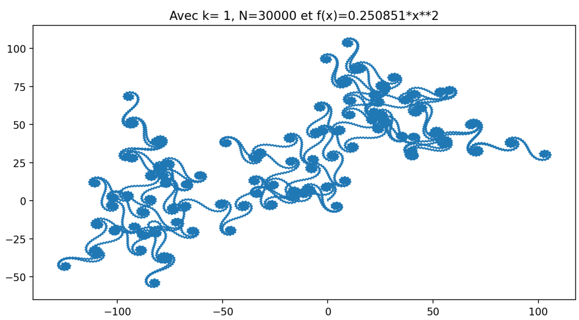

Avec k= 1, N=1550 et f(x)=sin(x**(1/2))

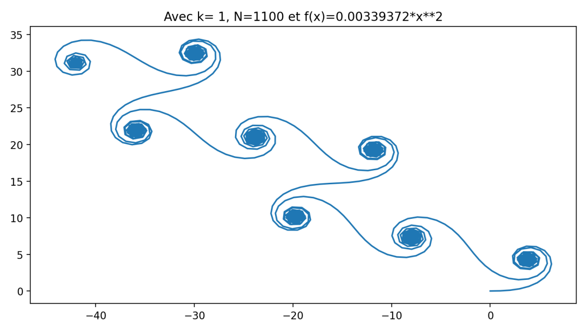

Avec k= 1, N=5000 et f(x)=log(x)**4


Avec k= 1, N=1000 et f(x)=x**(3/2)


Avec k= 1, N=6000 et f(x)=0.141593*x**2


Avec k= 1, N=30000 et f(x)=0.0666818*x**2


Avec k= 1, N=30000 et f(x)=0.250851*x**2


Avec k= 1, N=1100 et f(x)=0.00339372*x**2

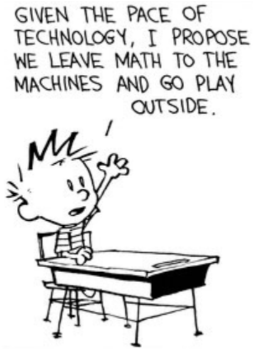
Vous pouvez aussi regarder les sujets :

- **Analyse**
  - → ♫ EDHEC 2022, problème.
  - → ♫ EMLyon 2023, exercice 1.
  - → ECRICOME 2017, exercice 1.
  - → ECRICOME 2016, exercice 1.
  - → ECRICOME 2012, exercice 1.
  - → EDHEC-3 2018, exercice 1.
  - → EDHEC 2015, exercice 1.
  - → EMLyon 2020, partie B du problème 1.

- **Algèbre**
  - → ♫ ECRICOME 2014, exercice 2 (questions 1 à 4 puis 8, 9 10).
  - → ♫ EDHEC 2016, exercice 2.

- **Probabilité**
  - → ♫ EDHEC (sujet secours) 2018, exercice 3.
  - → ♫ EDHEC 2015, problème.

  Les énoncés sont disponibles sur le site de l'APHEC :
  https://www.annales-prepa.fr/maths/ecrits/s/par-ecole/



– FIN –

Analyse

Révisé ?

- **$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ et sommes, max/sup**

— Coefficient binomiaux (définition, formule explicite, formule du triangle de Pascal). □□□ √
— Formule du binôme de Newton $(a+b)^n = ...$, factorisation de $a^n - b^n = ...$ □□□ √
— Somme géométrique. □□□ √
— Définition d'un maximum (minimum), de la borne supérieure (inférieure). □□□ √
— Théorème de la borne supérieure. □□□ √

- **Application**

— Définitions de : Injectivité, surjectivité, bijectivité. □□□ √
— Composition d'applications injectives/surjectives/bijectives. □□□ √

- **Polynôme**

— Racine. Nombre de racines d'un polynôme de degré n. □□□ √
— Diviseur. Division euclidienne. □□□ √
— Définition d'une racine et caractérisations. Multiplicité d'une racine. □□□ √
— Factorisation dans le cas réel d'un polynôme. □□□ √

- **Suites et séries**

— Théorème de limite monotone. □□□ √
— Suites adjacentes. □□□ √
— Comment obtenir l'expression explicite d'une suite arithmético-géométrique (exemple $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 3u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 ? □□□ √
— Règles de calculs sur les limites. Croissances comparées. □□□ √
— Théorème d'encadrement. □□□ √
— Petit "o", équivalent. Exemples usuels. □□□ √
— Séries de référence : séries géométriques, série exponentielle, série de Riemann. □□□ √
— Critères de convergence pour les séries à termes positifs. □□□ √

- **Limite et continuité**

— Définition de la continuité en un point a, sur un intervalle I. □□□ √
— Théorème des valeurs intermédiaires. Théorème de la bijection. □□□ √
— Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ et f est continue en a, $f(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$. □□□ √
— Existence d'un maximum et minimum sur une fonction continue sur un segment. □□□ √

- **Dérivation d'une fonction d'une variable**

— Définition du nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement. Interprétation avec la tangente. □□□ √
— Développement limité d'ordre 1 : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_a(x-a)$. □□□ √
— Formules de dérivation d'une composée, d'une réciproque □□□ √
— Théorème de Rolle. Égalité et inégalité des accroissements finis. □□□ √
— Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$. □□□ √
— Dérivées successives. Formule de Leibniz. □□□ √

- **Intégration sur un segment**

— Définition de l'intégrale avec l'aire. Croissance de l'intégrale lorsque les bornes sont dans le bon sens. □□□ √
— Approximation d'intégrales par les sommes de Riemann. □□□ √
— Connaître les primitives usuelles. □□□ √
— Changement de variable. □□□ √
— Intégration par parties. □□□ √
— Simplification d'une intégrale d'une fonction paire (ou impaire) sur un intervalle symétrique centrée en 0. □□□ √
— Si f est continue, positive et d'intégrale sur $[a;b]$ alors f est nulle sur $[a;b]$. □□□ √

- **Intégration sur un intervalle quelconque**

— Définitions et règles de calculs. □□□ √
— Critère de convergence (par majoration, négligeabilité et équivalent). □□□ √
— Intégrales de Riemann. □□□ √

Algèbre

- **Calcul matriciel**

— Formule du produit matriciel. Transposée. Trace. □□□ $\surd$
— Matrices symétriques/antisymétriques. □□□ $\surd$
— Système linéaire, pivot de Gauss. □□□ $\surd$
— Déterminant d'une matrice de taille 2. □□□ $\surd$

- **Espaces vectoriels**

— Somme de sous-espace vectoriels. □□□ $\surd$
— Famille génératrice, libre, base. □□□ $\surd$
— Théorème de la base incomplète. □□□ $\surd$
— Dimension. Définition et calculs. Formule de Grassmann. □□□ $\surd$
— Rang d'une famille. □□□ $\surd$
— Caractérisations de sous-espaces supplémentaires. □□□ $\surd$

- **Algèbre linéaire**

— Définition d'une application linéaire.
— Définition du noyau et de l'image. Lien avec l'injectivité et la surjectivité. □□□ $\surd$
— Définition et propriétés des projecteurs (noyau, image, $p \circ p$..) □□□ $\surd$
— Définition du rang, formule du rang. □□□ $\surd$
— Lien entre le rang et l'injectivité/surjectivité/bijectivité. Cas des endomorphismes. □□□ $\surd$
— Matrice d'une famille, de passage et d'une application linéaire. □□□ $\surd$
— Composition application et produit matriciel : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G,\mathscr{B}_E}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G,\mathscr{B}_F}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(f)$. □□□ $\surd$
— Bijectivité et inversibilité : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,B_F}\left(f^{-1}\right) = ..$ □□□ $\surd$
— En dimension finie, isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Conséquence $\dim \mathscr{L}(E,F) = \ldots$ □□□ $\surd$
— Polynôme d'endomorphisme et de matrice. □□□ $\surd$

Probabilités

- **Généralités sur les probabilités**

— Définition d'une probabilité (comme une application de ...) □□□ $\surd$
— Formule du crible $\mathbf{P}(A \cup B) = \ldots$ □□□ $\surd$
— Définition de l'indépendance entre événements. □□□ $\surd$
— Probabilité conditionnelle. Formule des probabilités composées. □□□ $\surd$
— Définition d'un système complet d'événements. □□□ $\surd$
— Formule des probabilités totales. □□□ $\surd$
— Formule de Bayes. □□□ $\surd$
— Théorème de la limite monotone. □□□ $\surd$

- **Variables aléatoires**

— Définition d'une variable aléatoire et de la fonction de répartition. □□□ $\surd$
— Propriété de la fonction de répartition. Caractérisation de la loi. □□□ $\surd$
— Définition d'une variable aléatoire discrète. □□□ $\surd$
— Indépendance. □□□ $\surd$

- **Lois usuelles**

— Les discrètes finies. Bernoulli, binomiale, uniforme discrète. □□□ $\surd$
— Les discrètes infinies dénombrables. Géométrique, Poisson. □□□ $\surd$
— Les continues. Uniforme continue, exponentielle, normale, gamma. □□□ $\surd$

- **Espérance et variance**

— Définition des moments et de la variance. □□□ $\surd$

— Croissance de l'espérance et linéarité. ☐☐☐ $\surd$
— Espérance et variance des lois usuelles. ☐☐☐ $\surd$
— Existence par le théorème de domination. ☐☐☐ $\surd$
— Montrer que si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment d'ordre $s \leqslant r$. ☐☐☐ $\surd$
— Formule de transfert (version discrète). ☐☐☐ $\surd$
— Formule de Koenig-Huygens. ☐☐☐ $\surd$

• **Couple de variables aléatoires**
— Loi d'un couple de variables discrètes. Lois marginales de variables discrètes. ☐☐☐ $\surd$
— Loi d'une somme de lois binomiales indépendantes. ☐☐☐ $\surd$
— Loi d'une somme de lois de Poisson indépendantes. ☐☐☐ $\surd$
— Espérance de $Z = g(X, Y)$ et théorème de transfert : Sous réserve de convergence absolue ☐☐☐ $\surd$
$$E(Z) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x, y)P([X = x] \cap [Y = y])..$$
— Espérance d'un produit dans le cas d'indépendance. ☐☐☐ $\surd$
— Variance d'une somme de variables indépendantes. ☐☐☐ $\surd$
— $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + 2\text{cov}(X, Y) + \mathbf{V}(Y)$. ☐☐☐ $\surd$

• **Convergences et approximations**
— Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev. ☐☐☐ $\surd$
— Loi faible des grands nombres. Preuve. ☐☐☐ $\surd$
— Approximation de lois binomiales par les lois de Poisson. ☐☐☐ $\surd$

Le symbole ♫ désigne les exercices classiques à maîtriser en priorité.