

---

## PREMIER PROBLÈME

---

### **PARTIE I : Etude d'une solution de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$**

1. Soit  $p$  un élément de  $\mathbb{N}^*$ .  $\forall t \in [p, p+1]$ ,  $\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{p}$ . Comme  $p \leq p+1$ , en intégrant il vient :

$$\int_p^{p+1} \frac{1}{p+1} dt \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{p} dt; \text{ c'est à dire : } \frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{p}.$$

Alors  $\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt - \frac{1}{p} \leq 0$  ou  $\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \geq \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \geq 0$ .

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.}$$

2. Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$ .  $\forall p \in [1, n]$ ,  $0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$ . En sommant on obtient :

$$0 \leq a_n = \sum_{p=1}^n u_p \leq \sum_{p=1}^n \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1. \text{ Ainsi } 0 \leq a_n \leq 1.$$

Finalement  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq a_n \leq 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_{n+1} - a_n = u_{n+1} \geq 0$ .

La suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  est croissante et majorée donc convergente.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq a_n \leq 1$  donc  $0 \leq \gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq 1$ .

La limite  $\gamma$  de la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  vérifie :  $0 \leq \gamma \leq 1$ .

### **PARTIE II : Expression intégrale du réel $\gamma$**

1. a.  $\varphi : x \rightarrow e^x$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée seconde est positive. Alors  $\varphi$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi la courbe représentative de  $\varphi$  est au dessus de toutes ses tangentes en particulier de celle au point d'abscisse 0.

Alors  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) \geq \varphi'(0)(x-0) + \varphi(0)$ ;  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x \geq e^0(x-0) + e^0 = x+1$ .

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, 1+x \leq e^x.}$$

- b. Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$  et soit  $t$  un réel appartenant à  $[0, n]$ .

en appliquant 1. a. à  $\frac{t}{n}$  et à  $-\frac{t}{n}$  on obtient :  $0 \leq 1 + \frac{t}{n} \leq e^{\frac{t}{n}}$  et  $0 \leq 1 - \frac{t}{n} \leq e^{-\frac{t}{n}}$ .

Ainsi  $0 \leq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq \left(e^{\frac{t}{n}}\right)^n = e^t$  et  $0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \left(e^{-\frac{t}{n}}\right)^n = e^{-t}$ . Poursuivons.

$$0 \leq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t \text{ et } \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geq 0 \text{ donc } : 0 \leq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

En multipliant par  $e^{-t}$  il vient :  $0 \leq \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ . Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, n], \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t, \quad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}}$$

**2. a.** Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$ . Posons :  $\forall x \in [0, 1], \psi(x) = (1 - x)^n + nx - 1$ .

$\psi$  est dérivable sur  $[0, 1]$  et  $\forall x \in [0, 1], \psi'(x) = -n(1 - x)^{n-1} + n = n[1 - (1 - x)^{n-1}] \geq 0$ .

$\psi$  est croissante sur  $[0, 1]$  et  $\psi(0) = 0$ . Alors  $\forall x \in [0, 1], \psi(x) \geq 0$ . Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], (1 - x)^n + nx - 1 \geq 0.}$$

*Remarque* On peut également obtenir ce résultat en utilisant la convexité de  $x \rightarrow (1 - x)^n$  sur  $[0, 1]$ .

**b.** Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$  et  $t$  un réel appartenant à  $[0, n]$ .

$\frac{t^2}{n^2}$  appartient à  $[0, 1]$ . a. donne alors  $\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n + n \frac{t^2}{n^2} - 1 \geq 0$ . Donc :  $1 - \frac{t^2}{n^2} \leq \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n$ .

Dès lors :  $\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t}$ .

1.b. donne enfin :  $\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ .

Alors  $e^{-t} - \frac{t^2}{n} e^{-t} = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ .

Finalement :  $e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}$ . Rappelons que :  $e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geq 0$  et concluons.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, n], 0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}}$$

.

**3. a.**  $f_n : t \rightarrow \frac{1}{t} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right)$  est continue sur  $]0, n]$ .

De plus :  $\forall t \in ]0, n], 0 \leq f_n(t) = \frac{1}{t} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \leq \frac{1}{t} \frac{t^2}{n} e^{-t} = \frac{t}{n} e^{-t}$ .

$\forall t \in ]0, n], 0 \leq f_n(t) \leq \frac{t}{n} e^{-t}$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t}{n} e^{-t}\right) = 0$ . Par encadrement il vient alors  $\lim_{t \rightarrow 0} f_n(t) = 0$ .

Ainsi  $f_n$  est continue sur  $]0, n]$  et prolongeable par continuité en 0. Par conséquent  $\int_0^n f_n(t) dt$  converge.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*, \int_0^n \frac{1}{t} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) dt \text{ converge.}}$$

Remarque  $\lim_{t \rightarrow 0} f_n(t) = 0$  s'obtient également sans difficulté à l'aide d'un développement limité. On a même  $f_n(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2n} t$ .

b. Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ .  $\forall t \in ]0, n]$ ,  $0 \leq f_n(t) \leq \frac{t}{n} e^{-t}$ . Donc :  $\int_0^n f_n(t) dt \leq \frac{1}{n} \int_0^n t e^{-t} dt$ .

$\forall t \in [0, +\infty[$ ,  $t e^{-t} \geq 0$  et  $\Gamma(2) = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$  converge et vaut 1.

Alors  $\int_0^n f_n(t) dt \leq \frac{1}{n} \int_0^n t e^{-t} dt \leq \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = 1$ .

Finalement  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}$ . Il vient alors sans difficulté par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.}$$

4. a. Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$ .

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} \left[ -\frac{n}{k+1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{k+1} \right]_0^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k+1} = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \text{ Or :}$$

$$n a_n = n \sum_{k=1}^n u_k = n \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \right) = n \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \right) = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - n \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt.$$

$$\text{Ainsi } n a_n = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - n [\ln |t|]_1^{n+1} = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - n \ln(n+1).$$

Ce qui donne :  $n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = n(a_n + \ln(n+1))$ . Finalement :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt = n(a_n + \ln(n+1)).}$$

b. Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$ . Posons :  $\forall t \in ]0, n]$ ,  $g_n(t) = \frac{1}{t} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right)$ .  $g_n$  est continue sur  $]0, n]$ .

$$\forall t \in ]0, n], g_n(t) = \frac{1}{n} \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k$$

$$\text{Alors } \lim_{t \rightarrow 0} g_n(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k \right) = \frac{1}{n} \times n = 1.$$

$g_n$  est donc continue sur  $]0, n]$  et prolongeable par continuité en 0.  $\int_0^n g_n(t) dt$  existe.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*, J_n = \int_0^n \frac{1}{t} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) dt \text{ existe.}}$$

Remarque  $\lim_{t \rightarrow 0} g_n(t) = 1$  peut s'obtenir également en se rappelant  $(1+u)^\alpha - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \alpha u$ .

$$\int_0^n g_n(t) dt = \int_0^n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt = \frac{1}{n} \times n(a_n + \ln(n+1)).$$

$$\int_0^n g_n(t) dt = a_n + \ln(n+1).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = \int_0^n \frac{1}{t} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) dt = a_n + \ln(n+1).$$

5. a.  $h : t \rightarrow \frac{1 - e^{-t}}{t}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 1$  car :  $\frac{1 - e^{-t}}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-(-t)}{t} = 1$ .

$h$  est donc continue sur  $\mathbb{R}^*$  et prolongeable par continuité en 0, ce qui suffit pour dire que  $\int_0^1 h(t) dt$  converge.

Ainsi :

$$U = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \text{ existe.}$$

Posons :  $\forall t \in [1, +\infty[$ ,  $\ell(t) = \frac{e^{-t}}{t}$ .  $\ell$  est continue sur  $[1, +\infty[$ .

De plus  $\forall t \in [1, +\infty[$ ,  $0 \leq \ell(t) = \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$  et  $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$  converge car  $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$  converge.

Alors les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent la convergence de  $\int_1^{+\infty} \ell(t) dt$ . Ainsi :

$$V = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \text{ existe.}$$

b. Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$ .

$$J_n - I_n = \int_0^n \frac{1}{t} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) dt - \int_0^n \frac{1}{t} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) dt = \int_0^n \frac{1 - e^{-t}}{t} dt.$$

$$\text{Donc } J_n - I_n = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt + \int_1^n \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = U + \int_1^n \frac{1}{t} dt - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt = U + [\ln|t|]_1^n - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

$$J_n - I_n = U + \ln n - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt. \text{ Rappelons alors que } J_n = a_n + \ln(n+1). \text{ Ainsi :}$$

$$a_n = J_n - \ln(n+1) = U + \ln n - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt + I_n - \ln(n+1) = U - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt + I_n - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$  on obtient  $\gamma = U - V$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \gamma$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt = V$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0.$$

$$\gamma = U - V.$$


---

$\mathcal{B}_0 = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 - e_3), \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 - e_4), \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_3 + e_4), \frac{1}{\sqrt{3}}(-e_2 - e_3 + e_4) \right)$  est une base orthonormale de  $E$  et la matrice de  $u$  dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$