CHAPITRE 1

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

Un mathématicien est une machine à transformer le café en théorèmes.

PAUL ERDÖS
Mathématicien hongrois (1913-1996).

1 Rappels et compléments sur les espaces vectoriels

1.1 Rappels : e.v, s.e.v, familles de vecteurs

Pour résumer, un espace vectoriel E est un ensemble muni de 2 lois « + » et « · » telles que :

- E est stable par multiplication à gauche par un nombre : $\forall\,\lambda\in\mathbb{R},\ \forall\,u\in \mathrm{E},\ \lambda\cdot u\in \mathrm{E}$.
- E est stable par somme : $\forall\,u\in \mathrm{E},\ \forall\,v\in \mathrm{E},\ u+v\in \mathrm{E}$.
- il y a de « bonnes règles de calcul » entre les lois « + » et « · ».

Par exemple :

- → $\forall\,u\in \mathrm{E},\quad 0\cdot u=0_{\mathrm{E}}$ (le vecteur nul).
- → $\forall\,u\in \mathrm{E},\quad \forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{R},\quad \lambda\cdot(\mu\cdot u)=(\lambda\times\mu)\cdot u.$
- → $\forall\,u,v\in \mathrm{E}, \forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{R},\quad \lambda\cdot(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v\quad$ et $\quad(\lambda+\mu)\cdot u=\lambda\cdot u+\mu\cdot u.$
- → $\forall\,\lambda\in\mathbb{R},\quad \lambda\cdot u=0_{\mathrm{E}}\quad\Longleftrightarrow\quad \lambda=0\ \text{ ou }\ u=0_{\mathrm{E}}.$
- → $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\quad \forall\,(u,v)\in \mathrm{E}^2 :\quad \begin{cases}\text{Si } \lambda\neq 0 \quad \text{alors}\quad \lambda\cdot u=\lambda\cdot v\ \Rightarrow\ u=v.\\ \text{Si } u\neq 0_{\mathrm{E}}\quad \text{alors}\quad \lambda\cdot u=\mu\cdot u\ \Rightarrow\ \lambda=\mu.\end{cases}$

Les éléments de E sont des **vecteurs**.

Exemples de référence.

- $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel avec les lois + et · définies par
$\forall\,u=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \forall\,v=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n,\ \forall\,\lambda\in\mathbb{R}$

$$u+v=(x_1+y_1\,,\,x_2+y_2\,,\,\ldots\,,\,x_n+y_n)\quad\text{et}\quad \lambda\cdot u=(\lambda\times x_1\,\ldots,\lambda\times x_n).$$

- L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices de taille (n,p) est un espace vectoriel pour les lois usuelles.

- Les ensembles $\mathbb{R}[x]$ et $\mathbb{R}_n[x]$ respectivement des applications polynomiales et des applications polynomiales de degré au plus n sont des espaces vectoriels pour les lois usuelles.

- L'ensemble $\mathscr{A}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ des applications d'un ensemble I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel pour les lois usuelles.

⚠ **Attention.** Un espace vectoriel n'est jamais vide.

Combinaisons linéaires, sous-espaces vectoriels

Dans la suite, une famille finie de vecteurs de E est la donnée d'une liste finie $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ de vecteurs de E. Le cardinal de la famille est alors le nombre de vecteurs.

DÉFINITION — combinaison linéaire

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ *une famille finie de vecteurs de* E.
On appelle ***combinaison linéaire*** *des vecteurs* $u_1, \dots, u_n$*, tout vecteur* v *s'écrivant*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i \quad \text{avec pour tout } i \in [[1, n]], \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

DÉFINITION — sous-espaces vectoriels

Soient E *un espace vectoriel et* F *une partie de* E. F *est un* ***sous-espace vectoriel*** *de* E *si*

- F *est non vide.*
- F *est stable par somme, c'est-à-dire :* $\forall (u, v) \in F^2, \quad u + v \in F.$
- F *est stable par multiplication par un nombre, c'est-à-dire :* $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda \cdot u \in F.$

Remarque. Les sous-espaces vectoriels sont les parties (non vides) de E stables par combinaisons linéaires.

Méthodes.
- Pour vérifier que F est un sous-espace vectoriel, on se contente de vérifier que pour tout nombre λ et tous vecteurs u, v de F, $\lambda \cdot u + v \in F$ et $F \neq \varnothing$. Pour le second point, il suffit d'exhiber un élément de F, le plus simple étant 0_E.
- De plus, on démontre que tout sous-espace vectoriel est un espace vectoriel. Donc, en pratique, lorsqu'on souhaite prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel, on montre que l'ensemble en question est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$...)

Exercice 1

✧ Les ensembles suivants, munis des lois usuelles, sont-ils des espaces vectoriels ?

$$E_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant y\right\}, \quad E_2 = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = 2a + c\right\}, \quad E_3 = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - b = 2\right\},$$
$$E_4 = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + c^2 = b\right\}, \quad E_5 = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid abc = 0\right\}, \quad E_6 = \{P \in \mathbb{R}[x], P(0) = 3\},$$
$$E_7 = \{P \in \mathbb{R}[x], P(3) = 0\}, \quad E_8 = \left\{f \in \mathscr{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant K\right\},$$
$$E_9 = \left\{f \in \mathscr{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant K\right\} \text{ où } K \in \mathbb{R} \text{ est fixé}, \quad E_{10} = \{f \in \mathscr{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \text{ est paire}\}.$$

p. 33

PROPOSITION — intersection de sous-espaces

Soient F, G *deux sous-espaces vectoriels de* E.
Alors l'intersection $F \cap G$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

⚠ **Attention.** En général, c'est faux pour la réunion.

Exercice 2

✦✦ Soient E un espace vectoriel et E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $E_1 \cup E_2$ est un sous-espace vectoriel de E. On veut montrer qu'alors $E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$. Si $E_1 \subset E_2$, alors la condition est vérifiée. Supposons donc que E_1 ne soit pas inclus dans E_2. Montrer que nécessairement $E_2 \subset E_1$.

p. 34

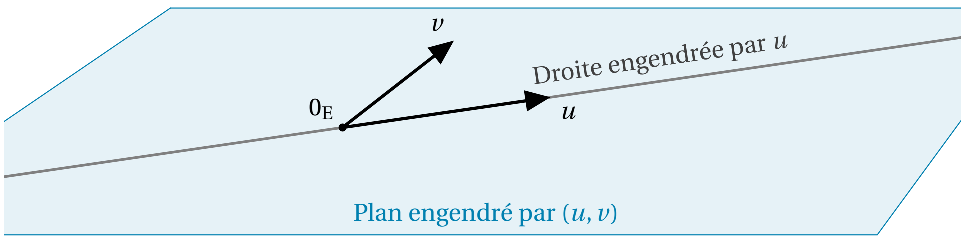
DÉFINITION **sous-espace vectoriel engendré par une partie finie**

Soient E *un espace vectoriel et* X *une partie finie de* E.
L'espace vectoriel engendré par X *est défini par l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de* X. *On le note* Vect(X). *Autrement dit, si* $X = \{u_1, \ldots, u_n\}$, *alors*

$$\mathrm{Vect}(X) = \left\{ v \in E \;\middle|\; \exists\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i \right\}.$$

Remarque. Comme son nom l'indique, Vect(X) est un sous-espace vectoriel de E. En particulier, il contient le vecteur nul.

Vocabulaire.
- Un espace vectoriel engendré par un vecteur non nul est une **droite vectorielle**.
- Un espace vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires est un **plan vectoriel**.



Pour rappel, deux vecteurs u, v sont **non colinéaires** s'ils sont non nuls et il n'existe pas de réel λ tel que $u = \lambda \cdot v$.

Familles génératrices, libres et bases

DÉFINITION **famille libre finie**

Soient E *un espace vectoriel et* $m \in \mathbb{N}^*$, *on dit que la famille* $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_m)$ *de vecteurs de* E *est une* ***famille libre*** *si la seule combinaison linéaire nulle est la combinaison linéaire à coefficients nuls. Autrement dit,*

$$\forall\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m, \qquad \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot u_i = 0_E \quad \Rightarrow \quad \forall\, i \in [\![1, m]\!], \quad \lambda_i = 0 \right).$$

Remarque. Soit $(u, v) \in E^2$. La famille (u, v) est libre si et seulement si les vecteurs u et v sont non colinéaires.

Exemple. Dans les cas des polynômes : une famille finie $(Q_1, \ldots, Q_r)$ de $\mathbb{R}[x]$ est une famille libre si elle est de **degrés échelonnés**. C'est-à-dire,

$$0 \leqslant \deg(Q_1) < \deg(Q_2) < \cdots < \deg(Q_r).$$

Exercice 3

✦ **Exemples**

1. Dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est libre où

$$\varepsilon_1 = (3,-1,1,0), \quad \varepsilon_2 = (1,1,-1,0), \quad \varepsilon_3 = (-1,2,1,0) \quad \text{et} \quad \varepsilon_4 = (1,1,1,1).$$

2. Dans $\mathbb{R}_n[x]$
À quelle condition sur le polynôme P, la famille $\left(\mathrm{P}^{(k)}\right)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[x]$?

3. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. p. 34

a) Justifier que la famille $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D})$ est une famille libre de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Que dire de la liberté de la famille $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{I}_2)$?

4. ✦✦ Dans les espaces fonctionnels. Étudier la liberté des familles suivantes.

a) La famille formée de $f_1 = \ln$, $f_2 = \exp$ et $f_3 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ dans $\mathscr{A}(\mathbb{R}_*^+, \mathbb{R})$.

b) La famille $\mathscr{F} = \left(\tan, \tan^2, \ldots, \tan^n\right)$ dans $\mathscr{A}\left(]-\pi/2, \pi/2[, \mathbb{R}\right)$.

c) La famille $\left(f_i\right)_{\in[\![0;n]\!]}$ où $f_i : x \in \mathbb{R} \mapsto |x - i| \in \mathbb{R}$ dans $\mathscr{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

DÉFINITION — **famille génératrice finie**

Soit $\mathscr{G} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille finie de vecteurs de E.
On dit que $\mathscr{G}$ est une ***famille génératrice*** *de* E*, si tout vecteur de* E *peut s'obtenir comme combinaison linéaire à partir des vecteurs de $\mathscr{G}$. Autrement dit si,*

$$\textit{Pour tout vecteur } v \in \mathrm{E}, \textit{ il existe } \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R} \textit{ tels que } v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i.$$

Remarque. Sous forme condensée, $\mathscr{G}$ est génératrice de E si $\mathrm{Vect}(\mathscr{G}) = \mathrm{E}$.

Exercice 4

✦ Dans chacun des cas suivants, donner une famille génératrice de l'espace vectoriel.

1. $\mathrm{F} = \left\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = z\right\}$. p. 35

2. G : l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n de degré impair.

3. H : l'espace des matrices symétriques de taille 3.

DÉFINITION — **base**

On appelle ***base*** *d'un espace vectoriel* E*, toute famille libre et génératrice de* E.

Exemples. Les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- La famille $(e_i)_{i=1,\cdots n}$ où $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ avec 1 en i-ème position est une base de $\mathbb{R}^n$.
- La famille $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
- La famille des matrices élémentaires $(\mathrm{E}_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Pour rappel, la matrice élémentaire $\mathrm{E}_{i,j}$ est la matrice ne contenant que des 0, sauf un 1 en position (i, j).

PROPOSITION — **coordonnées d'un vecteur dans une base**

Soient E *un espace vectoriel et* $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ *une famille finie de* E *à* n *éléments.*
Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) *La famille* $\mathscr{B}$ *est une base de* E.

ii) *Pour tout vecteur* v *de* E,
il existe un unique n*-uplet* $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot u_i$.

Dans ce cas, $(x_1, \dots, x_n)$ *sont les* ***coordonnées de*** v ***dans la base*** $\mathscr{B}$.

1.2 Rappels : sommes de deux s.e.v et supplémentaires

DÉFINITION — **somme de sous-espaces, somme directe**

Soient F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E.

- ***Le sous-espace somme*** *est défini par* $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \left\{ u + v \,\middle|\, (u, v) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G} \right\}$.
- *On dit que* F *et* G *sont en* ***somme directe****, notée* $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, *si* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_\mathrm{E}\}$.

Remarques.
- $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant F et G.
- On montre l'équivalence entre F et G sont en somme directe et

$$\forall\, u \in \mathrm{F}, \quad v \in \mathrm{G}, \qquad u + v = 0\mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad u = v = 0_\mathrm{E}.$$

PROPOSITION — **unicité de la décomposition**

Soient F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) *Les sous-espaces* F *et* G *sont en somme directe.*

ii) *Tout vecteur* $u \in \mathrm{F} + \mathrm{G}$ *s'écrit de manière unique sous la forme :*
$$u = u_\mathrm{F} + u_\mathrm{G} \quad \textit{avec} \quad u_\mathrm{F} \in \mathrm{F}, \quad u_\mathrm{G} \in \mathrm{G}.$$

Exercice 5

✦ Prouver cette équivalence. p. 36

DÉFINITION — **supplémentaire**

Soient E *un espace vectoriel et* F, G *deux sous-espaces vectoriels de* E.
On dit que F *et* G *sont* ***supplémentaires*** *si tout vecteur de* E *se décompose de façon unique en une somme d'un vecteur de* F *et d'un vecteur de* G. *C'est-à-dire*

$$\forall\, w \in \mathrm{E}, \quad \exists!\,(u, v) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}, \quad w = u + v.$$

⚠ **Attention.** Il n'y a pas unicité du supplémentaire. Il ne faut pas confondre supplémentaire et complémentaire.

Remarque. Le raisonnement par analyse-synthèse est particulièrement adapté à cette définition.

Exemple. Pour $\mathrm{E} = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, posons

$$\mathrm{F} = \{\mathrm{D} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{D} \text{ est diagonale}\} \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \mathrm{Vect}(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2) \quad \text{avec} \quad \mathrm{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Montrons que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
Soit $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
→ *Analyse (recherche des conditions nécessaires).*
Supposons qu'il existe $\mathrm{M_F} \in \mathrm{F}$ et $\mathrm{M_G} \in \mathrm{G}$ telles que $\mathrm{M} = \mathrm{M_F} + \mathrm{M_G}$. En particulier, il existe $d_1, d_2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathrm{M_F} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{M_G} = \lambda \mathrm{A}_1 + \mu \mathrm{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \lambda+\mu \\ -\mu & 0 \end{bmatrix}.$$

La condition $\mathrm{M} = \mathrm{M_F} + \mathrm{M_G}$ se réécrit $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & \lambda+\mu \\ -\mu & d_2 \end{bmatrix}$ c'est-à-dire $\begin{cases} a &= d_1 \\ b &= \lambda+\mu \\ c &= -\mu \\ d &= d_2. \end{cases}$

Ainsi $d_1 = a$, $d_2 = d$, $\lambda = b + c$ et $\mu = -c$. Si une telle décomposition de M existe, elle est donc unique.

→ *Synthèse (recherche des conditions suffisantes).*
Le calcul précédent suggère de poser $\mathrm{M_F} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ et $\mathrm{M_G} = (b+c)\mathrm{A}_1 - c\mathrm{A}_2$.
Vérifions que cette décomposition convient :

- $\mathrm{M_F}$ est une matrice diagonale, donc $\mathrm{M_F} \in \mathrm{F}$.
- $\mathrm{M_G}$ est une combinaison linéaire de la famille $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2)$, donc $\mathrm{M_G} \in \mathrm{G}$.
- $\mathrm{M_F} + \mathrm{M_G} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} + (b+c)\mathrm{A}_1 - c\mathrm{A}_2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \mathrm{M}$.

Le couple $(\mathrm{M_F}, \mathrm{M_G})$ est une solution du problème.

→ *Conclusion.*
Toute matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice de F et d'une matrice de G. Par définition, F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 6

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\mathrm{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 0\}$, $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_2 = (1, 1, 1)$.
Montrer que $\mathrm{Vect}(u_1)$ et $\mathrm{Vect}(u_2)$ sont deux supplémentaires de F dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Posons $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ les sous-espaces vectoriels des matrices symétriques et antisymétriques de taille n. Justifier que $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ sont supplémentaires.
Rappels : A est symétrique si ${}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}$, *antisymétrique si* ${}^t\mathrm{A} = -\mathrm{A}$.

p. 36

PROPOSITION **caractérisation des supplémentaires**

Soient F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) *Les sous-espaces* F *et* G *sont supplémentaires.*

ii) $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_\mathrm{E}\}$ *et* $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{E}$.

On a donc : F *et* G *sont supplémentaires si et seulement si* $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$.

1.3 Rappels : précisions en dimension finie

Lorsqu'un espace vectoriel E est de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre est la dimension de E.

Exercice 7

✧ Donner une base des espaces vectoriels suivants, préciser la dimension.

1. $E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \;\middle|\; a+b+c+d=0 \right\}$.
2. $E_2 = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P'(1) = 0\}$.
3. $E_3 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ est diagonale}\}$.

p. 37

PROPOSITION — **cardinal d'une famille libre/génératrice**

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie et* $\mathcal{L}$, $\mathcal{G}$ *deux familles de* E.

Si
- *La famille* $\mathcal{L}$ *est libre.*
- *La famille* $\mathcal{G}$ *est génératrice de* E.

Alors $\operatorname{Card}(\mathcal{L}) \leqslant \dim(E)$ *et* $\dim(E) \leqslant \operatorname{Card}(\mathcal{G})$.

Remarque. La preuve du premier point est basée sur le *théorème de la base incomplète.* En dimension finie, on peut compléter toute famille libre de vecteurs de E en une base de E. Pour le second point, on montre que l'on peut extraire une base de E de n'importe qu'elle famille génératrice de E.

PROPOSITION — **cas d'égalité**

Soit E *un espace de dimension finie.*

- *Une famille libre* $\mathcal{L}$ *de cardinal* $\dim(E)$ *est une base.*
- *Une famille génératrice* $\mathcal{G}$ *de cardinal* $\dim(E)$ *est une base.*

Exercice 8

✦✦ ✎ **Exemple d'application**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts deux à deux. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}.$$

1. En revenant à la définition, montrer que $(L_1, \dots, L_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
   D'après l'énoncé précédent, cette famille est donc une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
2. En revenant à la définition, montrer que $(L_1, \dots, L_n)$ est génératrice de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
   On retrouve le fait que la famille est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

p. 37

PROPOSITION — **existence d'un supplémentaire**

Soit E *un espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel de* E *admet un supplémentaire.*

Preuve. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Si $F = \{0_E\}$ (ou $F = E$), alors E (ou $\{0_E\}$) est un supplémentaire de F. Supposons donc que F n'est pas trivial.
Le sous-espace F étant de dimension finie, il admet une base $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$. Par le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $e_{p+1}, \cdots, e_n$ tels que $(e_1, \cdots, e_n)$ soit une base de E. On vérifie alors que le sous-espace $H = \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \cdots, e_n)$ est bien un supplémentaire de F. ■

Remarque. Concaténation de bases.
Soient $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_G = (f_1, \dots, f_r)$ des bases respectivement de F et G. On montre que si F et G sont en somme

directe, alors $(e_1,\dots,e_p,f_1,\dots,f_r)$ est une base de $\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$.
On en déduit l'énoncé suivant.

PROPOSITION — **cas de la somme directe**

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie et* F, G *deux sous-espaces vectoriels de* E.
Si F *et* G *sont en somme directe, alors*

$$\dim(\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}) = \dim(\mathrm{F})+\dim(\mathrm{G}).$$

THÉORÈME — **formule de Grassmann**

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie et* F, G *deux sous-espaces vectoriels de* E. *Alors,*

$$\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) = \dim(\mathrm{F})+\dim(\mathrm{G})-\dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G}).$$

Exercice 9

✦ **Preuve**

1. Soit F_1 un supplémentaire de $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$ dans F. Montrer que $\mathrm{F}_1\oplus\mathrm{G}=\mathrm{F}+\mathrm{G}$. p. 37
2. Conclure en prouvant la formule de Grassmann.

PROPOSITION — **caractérisation des supplémentaires**

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie et* F, G *deux sous-espaces vectoriels de* E.
Les trois énoncés suivants sont équivalents.

- **i)** F *et* G *sont supplémentaires.*
- **ii)** $\mathrm{F}+\mathrm{G}=\mathrm{E}$ *et* $\dim(\mathrm{F})+\dim(\mathrm{G})=\dim(\mathrm{E})$.
- **iii)** $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{0_{\mathrm{E}}\}$ *et* $\dim(\mathrm{F})+\dim(\mathrm{G})=\dim(\mathrm{E})$.

Exercice 10

✦✦ Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$. On considère $u=(a_1,a_2\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et

$$\mathrm{F}=\mathrm{Vect}(u)\quad\text{et}\quad \mathrm{G}=\left\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} a_k x_k=0\right\}.$$

p. 38

1. F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, préciser les dimensions de F et G.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.
3. Représenter dans le plan les sous-espaces vectoriels F et G lorsque $u=(1,1)$.

1.4 Compléments : sommes de p sous-espaces vectoriels

Sommes de sous-espaces vectoriels

DÉFINITION — **somme de s.e.v**

Soient $\mathrm{F}_1,\dots,\mathrm{F}_p$, *des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel* E. *On appelle* ***somme*** *de* $\mathrm{F}_1,\dots,\mathrm{F}_p$, *notée* $\sum_{i=1}^{p}\mathrm{F}_i$, *l'ensemble*

$$\sum_{i=1}^{p}\mathrm{F}_i=\left\{\,u_1+\cdots+u_p \mid \forall\, i\in[\![1,p]\!],\ u_i\in\mathrm{F}_i\,\right\}.$$

Remarque. $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est un s.e.v de E, c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les F_i.

Exemples.

- Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Notons $\mathcal{T}^+$, $\mathcal{T}^-$ et $\mathcal{D}$ respectivement l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes, inférieures strictes et diagonales de taille (n,n). Ces trois ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{T}^+ + \mathcal{T}^- + \mathcal{D}.$$

En effet, pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!]}$, on peut écrire

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\in \mathcal{T}^+} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\in \mathcal{T}^-} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}}_{\in \mathcal{D}}.$$

- Soit $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.

$$\operatorname{vect}\left(e_1, e_2, \ldots, e_p\right) = \operatorname{Vect}(e_1) + \operatorname{Vect}(e_2) + \ldots + \operatorname{Vect}(e_p).$$

Exercice 11

✧ Soient $F_1, \ldots, F_p$, des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est bien un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit H, un sous-espace vectoriel de E tel que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $F_i \subset H$. Montrer que $\sum_{i=1}^{p} F_i \subset H$.

p. 38

Proposition — somme et dimension

Soient $F_1, \ldots, F_p$, *des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel* E.
Si *les* F_i *sont tous de dimension finie,* ***alors*** $\sum_{i=1}^{p} F_i$ *est aussi de dimension finie avec*

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i).$$

Preuve. Rappelons que, d'après la formule de Grassmann, pour F, G deux s.e.v de E de dimension finie

$$\dim(F+G) \leqslant \dim(F) + \dim(G) \qquad \text{car} \qquad \dim(F+G) \geqslant 0.$$

La proposition s'en déduit par récurrence. ■

Sommes directes, généralisation à p sous-espaces vectoriels

Définition — somme directe

La somme de p sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \ldots, F_p$ *d'un espace vectoriel* E *est dite* ***directe*** *si*

$$\forall\ (u_1, \ldots, u_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p, \qquad u_1 + \cdots + u_p = 0_E \quad \Rightarrow \quad u_1 = \cdots = u_p = 0_E.$$

La somme directe des s.e.v $F_1, F_2, \ldots, F_p$ *est notée* $F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_p$.

Exemples.

- En reprenant l'exemple précédent, on a même $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{T}^+ \oplus \mathcal{T}^- \oplus \mathcal{D}$.

- Si pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $\mathrm{F}_i = \mathrm{Vect}(e_i)$ où e_i est un vecteur de E non nul alors la somme $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ est directe si et seulement si la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est libre.

Preuve. Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons la famille libre. La somme est directe. Soit $(u_1, u_2, \ldots u_p) \in \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \times \ldots \times \mathrm{F}_p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} u_i = 0_{\mathrm{E}}$. Il existe donc λ_1, λ_2, …, λ_p tels que $u_1 = \lambda_1 e_1$, $u_2 = \lambda_2 e_2$, …, $u_p = \lambda_p e_p$. On a donc

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_p e_p = 0_{\mathrm{E}}.$$

Comme la famille est libre, chaque λ_i vaut 0, $u_i = \lambda_i e_i = 0_{\mathrm{E}}$. La somme est directe.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\underbrace{\lambda_1 e_1}_{\in \mathrm{F}_1} + \underbrace{\lambda_2 e_2}_{\in \mathrm{F}_2} + \cdots + \underbrace{\lambda_p u_p}_{\in \mathrm{F}_p} = 0_{\mathrm{E}}.$$

Si la somme est directe, chaque $\lambda_i e_i$ vaut 0_{E}. Comme $e_i \neq 0_{\mathrm{E}}$, on a $\lambda_i = 0$. La famille est libre. ∎

Exercice 12

✦ Soient F_1, F_2 et F_3 trois s.e.v de E tels que

$$\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 = \{0_{\mathrm{E}}\}, \quad \mathrm{F}_2 \cap \mathrm{F}_3 = \{0_{\mathrm{E}}\} \quad \text{et} \quad \mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_3 = \{0_{\mathrm{E}}\}.$$

p. 39

A-t-on nécessairement $\mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2 \oplus \mathrm{F}_3$?

PROPOSITION — somme directe et unicité

Soient $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On a équivalence entre :

i) *La somme $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ est directe.*

ii) *Tout vecteur de $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \ldots + \mathrm{F}_p$ s'écrit d'une manière unique comme somme de vecteurs de $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_p$.*

Autrement dit, $\forall\, u \in \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \ldots + \mathrm{F}_p, \quad \exists!\,(u_1, u_2, \ldots, u_p) \in \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \times \ldots \times \mathrm{F}_p$
$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_p.$

Preuve. Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons **i**). Soit $u \in \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \ldots + \mathrm{F}_p$. Par définition de la somme, u se décompose comme somme de vecteurs des F_i. Justifions l'unicité de la décomposition.
Soient $u_1 \in \mathrm{F}_1$, $v_1 \in \mathrm{F}_1$, $u_2 \in \mathrm{F}_2$, $v_2 \in \mathrm{F}_2$, …, $u_p \in \mathrm{F}_p$, $v_p \in \mathrm{F}_p$ tels que

$$u = \sum_{i=1}^{p} u_i \quad \text{et} \quad u = \sum_{i=1}^{p} v_i.$$

Par linéarité de la somme
$$\sum_{i=1}^{p} \underbrace{(u_i - v_i)}_{\in \mathrm{F}_i} = \sum_{i=1}^{p} u_i - \sum_{i=1}^{p} v_i = u - u = 0_{\mathrm{E}}.$$

Par définition de la somme directe, pour tout indice i, $u_i - v_i = 0_{\mathrm{E}}$, puis $u_i = v_i$. Ceci prouve l'unicité de l'énoncé **ii**).

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, supposons **ii**). Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p) \in \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \times \ldots \times \mathrm{F}_p$ tels que $0_{\mathrm{E}} = u = \sum_{i=1}^{p} u_i$. On a donc

$$\begin{array}{ccccccccc} u_1 & + & u_2 & + & \ldots & + & u_p & = & 0_{\mathrm{E}} \\ \underbrace{0_{\mathrm{E}}}_{\in \mathrm{F}_1} & + & \underbrace{0_{\mathrm{E}}}_{\in \mathrm{F}_2} & + & \ldots & + & \underbrace{0_{\mathrm{E}}}_{\in \mathrm{F}_p} & = & 0_{\mathrm{E}}. \end{array}$$

Par unicité de la décomposition, pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $u_i = 0_{\mathrm{E}}$. La somme est directe. ∎

Rappel sur la concaténation.
Lorsqu'on dispose de plusieurs familles de vecteurs de E, on peut les concaténer. C'est-à-dire, les regrouper pour former une nouvelle famille.

THÉORÈME **caractérisation par concaténation de bases**

Soient $F_1, \dots, F_p$ *des sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel* E.
Soient $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \dots, \mathscr{B}_p$, *des bases respectivement de* $F_1, F_2, \dots, F_p$. *On a équivalence entre les énoncés suivants.*

i) *La somme* $\sum_{i=1}^{p} F_i$ *est directe.*

ii) *La famille* $\mathscr{B}$, *obtenue par concaténation des familles* $\mathscr{B}_i$, *est une base de* $\sum_{i=1}^{p} F_i$.

Preuve. Raisonnons par double implication.

$\Rightarrow$ Supposons la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ directe. Soit $u \in \sum_{i=1}^{p} F_i$. Le vecteur u s'écrit de manière unique sous la forme

$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_p \quad \text{avec} \quad u_i \in F_i.$$

De plus, par définition d'une base, chaque u_i s'écrit de manière unique dans la base $\mathscr{B}_i$. Au final, u s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de la famille $\mathscr{B}$. Ceci étant vrai pour tout vecteur u arbitrairement choisi, $\mathscr{B}$ est donc une base de $\sum_{i=1}^{p} F_i$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons que $\mathscr{B}$ est une base de $\sum_{i=1}^{p} F_i$. Notons

$$\mathscr{B} = \big(\underbrace{e_1, e_2, \ldots, e_{j_1}}_{\substack{\text{vecteurs} \\ \text{de } \mathscr{B}_1}}, \underbrace{e_{j_1+1}, e_{j_1+2} \ldots, e_{j_2}}_{\substack{\text{vecteurs} \\ \text{de } \mathscr{B}_2}}, \ \ldots, \underbrace{e_{j_{p-1}+1}, e_{j_{p-1}+2} \ldots, e_{j_p}}_{\substack{\text{vecteurs} \\ \text{de } \mathscr{B}_p}}\big).$$

Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_p$ tel que $u_1 + u_2 + \ldots + u_p = 0_E$. Or, pour tout indice i, le vecteur u_i se décompose dans la base $\mathscr{B}_i$ de F_i.

$$\exists (\lambda_k) \in \mathbb{R} \qquad u_i = \sum_{k=j_{i-1}+1}^{j_i} \lambda_k e_k \qquad \text{(avec la convention } j_0 = 0).$$

Puis par somme $\sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{j_p} \lambda_k e_k = 0_E$. Comme la famille $\mathscr{B} = (e_k)_{k \in [\![1 ; j_p]\!]}$ est libre, pour chaque indice k, $\lambda_k = 0$, puis pour chaque indice i, $u_i = 0_E$. On a vérifié la définition, la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe. ∎

Exercice 13

✦✦ **Exemple.** Dans $\mathbb{R}^4$, on pose

$$F = \{(x, y, z, t) \mid x - y = z + t = 0\}, \quad G = \operatorname{Vect}(u), \quad H = \operatorname{Vect}(v) \quad \text{avec} \left\{ \begin{array}{lcl} u & = & (1,0,1,0) \\ v & = & (0,1,0,1,0). \end{array} \right.$$

p. 39

1. Donner une base de F.

2. Vérifier que $F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}^4$ à l'aide du théorème précédent.

THÉORÈME **caractérisation en dimension finie**

Soient $F_1, \ldots, F_p$ *des sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel* E. *On a l'équivalence entre les énoncés suivants.*

i) *La somme* $\sum_{i=1}^{p} F_i$ *est directe.*

ii) $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

Preuve. Raisonnons de nouveau par double implication.

$\Rightarrow$ Si la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe alors la famille $\mathscr{B}$ obtenue par concaténation de différentes bases de F_i en est une base. Par définition de la dimension :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}) = \sum_{i=1}^{p} \operatorname{Card}(\mathscr{B}_i) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i).$$

L'énoncé **ii**) est prouvé.

$\Leftarrow$ Réciproquement, s'il y a égalité des dimensions.

- La famille $\mathscr{B}$ contient $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i\right)$ vecteurs.
- Par définition de la somme, $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$.

On sait alors (voir cas d'égalité page 7) que la famille $\mathscr{B}$ est alors une base de $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$. D'après le théorème précédent, on conclut que la somme $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ est directe.

■

Remarque. Donnons une seconde démonstration de cet énoncé.
Pour cela, rappelons un résultat sur les produits cartésiens d'espaces vectoriels. Si F_1, F_2, …, F_p sont des espaces vectoriels de dimension finie, alors $\prod_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ est un espace vectoriel de dimension finie avec

$$\dim\left(\prod_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(\mathrm{F}_i).$$

La somme $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ est directe si et seulement si l'application linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i & \to & \sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i \\ (u_1, u_2, \ldots, u_p) & \mapsto & u_1 + u_2 + \ldots + u_p \end{array}\right.$$

est injective. Comme l'application est toujours surjective par définition de la somme de sous-espaces vectoriel, la somme est directe si et seulement si cette application linéaire est un isomorphisme, si et seulement si on a l'égalité des dimensions.

Exemple. Reprenons l'exemple précédent.

$$\dim\left(\mathscr{T}^+\right) + \dim\left(\mathscr{T}^-\right) + \dim(\mathscr{D}) = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n = n^2 = \dim\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right).$$

Exercice 14

✦ Soient F_1, F_2 et F_3 trois sous-espaces vectoriels de E tels que

$$\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 = \{0_\mathrm{E}\}, \quad \mathrm{F}_2 \cap \mathrm{F}_3 = \{0_\mathrm{E}\}, \quad \mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_3 = \{0_\mathrm{E}\}$$

$$\text{et} \quad \dim(\mathrm{F}_1) + \dim(\mathrm{F}_2) + \dim(\mathrm{F}_3) = \dim(\mathrm{E}).$$

A-t-on nécessairement $\mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2 \oplus \mathrm{F}_3 = \mathrm{E}$?

p. 39

Exercice 15

✦✦✦ **Exemple**
Dans $\mathbb{R}_3[x]$, on pose :

$$\mathrm{F} = \left\{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[x] \mid \mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}(2) = 0\right\}, \quad \mathrm{V} = \left\{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[x] \mid \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}(2) = 0\right\},$$
$$\mathrm{G} = \left\{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[x] \mid \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}(2) = \mathrm{P}(3) = 0\right\}, \quad \mathrm{H} = \left\{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[x] \mid \mathrm{P}(x) = \mathrm{P}(-x)\right\}.$$

1. Préciser les dimensions de chacun de ces sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Montrer que $\mathrm{V} \oplus \mathrm{H} = \mathbb{R}_3[x]$.
3. Justifier que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \oplus \mathrm{H} = \mathbb{R}_3[x]$.

p. 39

2 Matrices et applications linéaires

2.1 Rappels : définitions et théorèmes

Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base d'un espace vectoriel E, alors pour tout vecteur u de E, il existe un unique n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i \, e_i .$$

Dans ce cas, $(x_1, \dots, x_n)$ sont les **coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$**. On définit la **matrice colonne des coordonnées** de u dans la base $\mathscr{B}$ par

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Exercice 16

✧ *Les questions sont indépendantes.*

1. Dans $\mathbb{R}^3$, posons $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,2,3)$, $u_3 = (1,1,0)$.
Vérifier que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, et donner la matrice des coordonnées du vecteur $v = (0,1,0)$ dans cette base. p. 39
2. Donner la matrice des coordonnées de $(1+x)^n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

Généralisation. Soient $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E et $\mathscr{B}$ une base de E.
Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on note $(x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{n,k})$ les coordonnées de u_k dans la base $\mathscr{B}$.
On appelle **matrice de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$**, notée $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$, la matrice dont les colonnes sont les matrices coordonnées des vecteurs de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$:

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,p} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,p} \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

Autrement dit, la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ s'obtient en concaténant les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs de la famille.

DÉFINITION **matrice d'une application linéaire**

Soient E, F *deux espaces vectoriels de dimension finie et* $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathscr{B}_F$ *deux bases respectives de* E *et* F.
La matrice de $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ ***relativement aux bases*** $\mathscr{B}_E$ ***et*** $\mathscr{B}_F$ *est la matrice de la famille* $\big(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)\big)$ *dans la base* $\mathscr{B}_F$ *:*

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_F}\big(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)\big).$$

Elle est notée $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(\varphi)$.

Représentation

Notons $(e_1, \cdots, e_p)$ et $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ des bases de E et F. Une manière commode de se représenter la matrice est de placer en colonne les composantes des images de la base $(e_1, \cdots, e_p)$ par φ dans la base d'arrivée $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$. Le coefficient en position (i,j) de la matrice est la composante de $\varphi(e_i)$ suivant le vecteur ε_j.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & & & \varphi(e_p) \end{array} & \\ \begin{bmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & * & \cdots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & * \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array} \end{array}$$

Remarques.
- La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi)$ a dim(E) colonnes et dim(F) lignes.
- Dans le cas d'un endomorphisme (E = F), on peut choisir $\mathscr{B}_E = \mathscr{B}_F$. On note simplement $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\varphi)$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_E}(\varphi)$.

Exemples.
- La matrice de l'application identité $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\mathrm{id}_E)$ est la matrice identité I_p où $p = \dim(\mathrm{E})$.
- La matrice de l'application nulle $u \in \mathrm{E} \mapsto 0_\mathrm{F} \in \mathrm{F}$ est $0_{n,p}$ avec $n = \dim(\mathrm{F})$, $p = \dim(\mathrm{E})$.

THÉORÈME **isomorphisme**

Soient E, F *deux espaces vectoriels de dimension finie (de dimension respective p et n) et* $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ *deux bases respectives de* E *et* F.

Alors l'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ \varphi & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi) \end{array} \right.$ *est un isomorphisme d'espace vectoriel.*

En particulier, pour tous $\varphi, \psi \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi+\psi) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\psi) \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\lambda\varphi) = \lambda\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi).$$

Conséquences.
- À toute matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ correspond une unique application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ dont A soit la matrice dans les bases canoniques.
Elle est appelée **l'application linéaire canoniquement associée à la matrice** A.

- En dimension finie, il ne peut avoir d'isomorphisme si la dimension de l'espace de départ ne coïncide pas avec la dimension de l'espace d'arrivée. Ainsi, l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F est aussi de dimension finie et

$$\dim\big(\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})\big) = \dim\big(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})\big) = pn = \dim(\mathrm{E}) \times \dim(\mathrm{F}).$$

THÉORÈME **image d'un vecteur**

Soient E, F *deux espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives* $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$.
Soient $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *et* $u \in \mathrm{E}$.

Si on note
- U *la matrice colonne des coordonnées de* u *dans la base* $\mathscr{B}_E$.
- V *la matrice colonne des coordonnées de* $\varphi(u)$ *dans la base* $\mathscr{B}_F$.
- $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi)$, *la matrice de l'application* φ *dans les bases* $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$,

alors $\quad \mathrm{AU} = \mathrm{V}.$

Preuve. Posons $\mathscr{B}_E = (e_1,\cdots,e_p)$, $\mathscr{B}_F = (\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ et $u = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$, de sorte que $\mathrm{U} = {}^t[x_1 \quad \cdots \quad x_p]$.

Par définition :

- $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, où $\forall j \in [\![1;p]\!]$, $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\varepsilon_i$.
- $\mathrm{AU} = {}^t[y_1 \quad \cdots \quad y_n]$, où $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j$.

Alors
$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j\varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}x_j\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} \overbrace{\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j\right)}^{y_j} \varepsilon_i.$$

D'où le résultat car $\mathrm{V} = {}^t[y_1 \quad \cdots \quad y_n]$. ■

Remarques.

- Cette relation s'écrit directement

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\big(\varphi(u)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(u).$$

- Cette formule s'étend par concaténation aux matrices d'une famille de vecteurs.

Soient $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ et $(u_1,\cdots,u_q)$ une famille de vecteurs de E. Alors

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\big(\varphi(u_1),\cdots,\varphi(u_q)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(u_1,\cdots,u_q)} \qquad (\bullet)$$

THÉORÈME **produit matriciel et composition d'applications**

Soient E, F, G *trois espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives* $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$, $\mathscr{B}_G$.
Soient $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ *et* $\psi \in \mathscr{L}(F,G)$. *Alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G,\mathscr{B}_E}(\psi\circ\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G,\mathscr{B}_F}(\psi)\cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi).$$

Preuve. Posons $\mathscr{B}_E = (e_1,\cdots,e_p)$. Par définition de la matrice de $\psi\circ\varphi$ dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_G$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G,\mathscr{B}_E}(\psi\circ\varphi) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G}\big(\psi\circ\varphi(e_1),\cdots,\psi\circ\varphi(e_p)\big)\\
&= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G}\Big(\psi\big(\varphi(e_1)\big),\cdots,\psi\big(\varphi(e_p)\big)\Big)\\
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G,\mathscr{B}_E}(\psi\circ\varphi) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G,\mathscr{B}_F}(\psi)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\big(\varphi(e_1),\cdots,\varphi(e_p)\big), \quad \text{d'après l'égalité } (\bullet).
\end{aligned}$$

Or par définition, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\big(\varphi(e_1),\cdots,\varphi(e_p)\big)$,

donc finalement $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G,\mathscr{B}_E}(\psi\circ\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G,\mathscr{B}_F}(\psi)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi)$.

■

COROLLAIRE **inversibilité et isomorphisme**

Soient E, F *deux espaces vectoriels de dimension finie,* $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ *deux bases respectives de* E *et* F. *Soit* $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) *L'application linéaire* φ *est bijective.*

ii) *La matrice* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi)$ *est inversible.*

Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}\big(\varphi^{-1}\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi)^{-1}$.

Exercice 17

✦ Prouver cet énoncé grâce au théorème précédent.
On pourra utiliser la caractérisation de la bijectivité.

p. 40

Exercice 18

✦✦ *Les questions 1 et 2 sont indépendantes.*

1. Soient $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathscr{L}\big(\mathbb{R}^2\big)$ défini par $\varphi(x,y) \mapsto (ax+by, cx+dy)$.
À quelle condition sur a, b, c et d, φ est bijective?
2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer A, la matrice de $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto P(x+1) \in \mathbb{R}_n[x]$ dans la base canonique.
   b) Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.

p. 40

2.2 Rappels : noyau, image et rang

Les définitions et le calcul

DÉFINITION **noyau, image et rang d'une matrice**

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, *on définit*

Le noyau *de* A *par* $$\mathrm{Ker}(A) = \left\{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{n,1}\right\}.$$

L'image *de* A *par* $$\mathrm{Im}(A) = \left\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\quad AX = Y\right\} = \left\{AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\right\}.$$

Le rang *de* A, *noté* $\mathrm{rg}(A)$, *est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes dans* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Autrement dit, si $A = \left[C_1\, C_2 \cdots C_p\right]$ *alors*
$$\mathrm{rg}(A) = \dim\left(\mathrm{Vect}(C_1, C_2, \ldots, C_p)\right).$$

- **Propriétés de calculs.**
  - → Le rang est invariant par transposition, autrement dit
  $$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA).$$
  - → Le rang est invariant par les opérations élémentaires :
    - L'échange de lignes ou de colonnes ($L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$).
    - La multiplication d'une ligne ou d'une colonne par $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ($L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_i \leftarrow \lambda C_i$).
    - L'addition d'une autre ligne ou colonne ($L_i \leftarrow L_i + L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + C_j$).

Remarque. On a toujours $\mathrm{rg}(A) \leqslant p$. De plus, le rang est invariant par transposition, autrement dit
$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA).$$
En particulier, on a aussi $\mathrm{rg}(A) \leqslant n$.

Exercice 19

✦ Calculer les noyaux des matrices suivantes :
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B_\alpha = \begin{bmatrix} 2-\alpha & 3 & 1 \\ 5 & 6+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & -2-\alpha \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

p. 41

Exercice 20

✦ Calculer le rang des matrices suivantes :
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 9 \\ -1 & 2 & 5 & -5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \alpha I_2 \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

p. 42

DÉFINITION **noyau, image et rang d'une application linéaire**

Pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, *on définit*

Le noyau *de* φ *par* $$\mathrm{Ker}(\varphi) = \left\{u \in E \mid \varphi(u) = 0_F\right\}.$$

L'image *de* φ *par* $$\mathrm{Im}(\varphi) = \left\{v \in F \mid \exists\, u \in E,\quad \varphi(u) = v\right\} = \left\{\varphi(u) \mid u \in E\right\}.$$

Le rang *de* φ, *noté* $\mathrm{rg}(\varphi)$, *est défini par* $$\mathrm{rg}(\varphi) = \dim\left(\mathrm{Im}(\varphi)\right).$$

Exercice 21

✦ On admet que les applications suivantes sont linéaires. Déterminer leur noyau.

$$\varphi_1 : \mathrm{P} \in \mathbb{R}[x] \mapsto \mathrm{P}'' \in \mathbb{R}[x], \qquad \varphi_2 : \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[x] \mapsto \big(\mathrm{P}(1), \mathrm{P}(0), \mathrm{P}(-1)\big) \in \mathbb{R}^3,$$

$$\varphi_3 : \mathrm{P} \in \mathbb{R}[x] \mapsto \mathrm{P} - \mathrm{P}' \in \mathbb{R}[x] \quad \text{et} \quad \varphi_4 : \mathrm{P} \in \mathbb{R}[x] \mapsto \mathrm{P}(x+1) - \mathrm{P}(x-1) \in \mathbb{R}[x].$$

p. 42

Remarque. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\big(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\big)$. Ainsi le rang de φ correspond au rang de la famille image $\big(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\big)$.

PROPOSITION — **rang d'une matrice et d'une application linéaire**

Soient E, F *deux espaces vectoriels de dimension finie et* $\mathscr{B}_\mathrm{E}$, $\mathscr{B}_\mathrm{F}$ *deux bases respectivement de* E *et* F.
Soient $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *et* $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_\mathrm{F}, \mathscr{B}_\mathrm{E}}(\varphi)$. *Alors,*

$$\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(\varphi).$$

Formule du rang et conséquences

THÉORÈME — **formule du rang**

Soient E, F *deux espaces vectoriels avec* E *de dimension finie et* $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. *Alors*

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(\varphi)\big) + \mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathrm{E}).$$

Rappels. L'application $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_\mathrm{E}\}$.
L'application φ est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{F}$. Dans le cas où F est de dimension finie, on a aussi la surjectivité de φ si et seulement si $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathrm{F})$. À partir de la formule du rang, on montre les énoncés suivants :

- *Version endomorphisme*
Soient E un espace vectoriel de *dimension finie* n et φ un endomorphisme de E. On a équivalence entre :
  - **i)** φ est injective ($\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_\mathrm{E}\}$).
  - **ii)** φ est surjective ($\mathrm{rg}(\varphi) = n$).
  - **iii)** φ est bijective.

- *Version matricielle*
Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a équivalence entre :
  - **i)** $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}) = \{0_{n,1}\}$.
  - **ii)** $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = n$.
  - **iii)** A est inversible.

Exercice 22

✧ Soient $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(g) \leqslant 2$.
2. En déduire que $g \circ f$ n'est ni injective, ni surjective.

p. ??

2.3 Compléments : matrices de passage

DÉFINITION — **cas particulier des matrices de passages**

Soient E, *un espace vectoriel de dimension finie et* $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, *deux bases de* E.
La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$ *est appelée* **matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$**. *On la note* $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$.
Autrement dit, la j*-ème colonne de* $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ *est la matrice coordonnée du* j*-ème vecteur de* $\mathscr{C}$ *dans la base* $\mathscr{B}$.

Exemple. Soient $u = (1,2)$ et $v = (3,4)$. La famille $\mathscr{C} = (u,v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. La matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ à la base $\mathscr{C}$ est

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

On vérifie que $e_1 = -2u + v$ et $e_2 = 3/2\,u - 1/2\,v$, d'où

$$\mathrm{P}_{\mathscr{C},\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

⚠ **Attention.** On sera vigilant sur l'ordre.

Remarque. Pour $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, deux bases de E, on a

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}.}$$

En effet, si on note $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_E) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \mathrm{id}(e_1) & \mathrm{id}(e_2) & & & \mathrm{id}(e_n) \end{array} & \\ \begin{bmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & * & \cdots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & * \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array} \end{array} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & & & e_n \end{array} & \\ \begin{bmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & * & \cdots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & * \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array} \end{array} = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}.$$

Remarque. Avec trois bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ de E, on a aussi

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{D}} = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}} \cdot \mathrm{P}_{\mathscr{C},\mathscr{D}} \qquad (\bullet)$$

Exercice 23

✦ On considère la base canonique $\mathscr{B} = \left(1, x, x^2\right)$ de $\mathbb{R}_2[x]$. Soient a, $b \in \mathbb{R}$ distincts. On considère les familles de polynômes $\mathscr{C} = \left(1, x-a, (x-a)^2\right)$ et $\mathscr{D} = \left((x-a)^2, (x-a)(x-b), (x-b)^2\right)$.

1. a) Justifier que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sont deux autres bases de $\mathbb{R}_2[x]$. p. 42

   b) Calculer $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$, $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}$ et $\mathrm{P}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}$. Vérifier par le calcul que $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{D}} = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}} \cdot \mathrm{P}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}$.

2. Prouver la relation $(\bullet)$ dans le cas général de trois bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ de E.

PROPOSITION **coordonnées et changement de bases**

Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E.
Soit u un vecteur de E *dont* $\mathrm{U}_{\mathscr{B}}$ *et* $\mathrm{U}_{\mathscr{C}}$ *sont les matrices colonnes des coordonnées respectivement dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ alors*

$$\mathrm{U}_{\mathscr{B}} = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}} \mathrm{U}_{\mathscr{C}}.$$

Preuve. L'énoncé est une conséquence du théorème page 14. Soit $u \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{U}_{\mathscr{B}}$ (respectivement $\mathrm{U}_{\mathscr{C}}$) est respectivement la matrice colonne du vecteur u dans la base $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{C}$). À partir de $u = \mathrm{id}_E(u)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_E)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u), \quad \text{puis} \quad \mathrm{U}_{\mathscr{B}} = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}} \mathrm{U}_{\mathscr{C}}.$$

■

Exercice 24

✧ Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}' = (e_1 + e_2, 2e_2 + e_3, 3e_3)$.
Existe-t-il un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ ayant les mêmes coordonnées dans ces deux bases ? p. 43
On pourra dans un premier temps, traduire matriciellement le problème.

PROPOSITION **inversibilité**

Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E. *La matrice* $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ *est inversible avec*

$$\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\right)^{-1} = P_{\mathscr{C},\mathscr{B}}.$$

Autrement dit, l'inverse de la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$ est la matrice de passage de la base $\mathscr{C}$ à la base $\mathscr{B}$.

Preuve. On a vu que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_E)$. Comme $\mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E$, on a

$$\begin{cases} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_E)\cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) &= I_n \\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)\cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_E) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_E) &= I_n. \end{cases}$$

Par définition,$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_E)$ est inversible et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)^{-1}.$$

On en déduit le résultat. ■

Exemples. Vérifions la proposition précédente sur deux cas.

- On se place dans $\mathbb{R}^3$. Considérons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, la famille définie par

$$\varepsilon_1 = (1,1,1), \qquad \varepsilon_2 = (2,3,2) \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 = (-1,-2,0).$$

On vérifie que la famille $\mathscr{C}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$, elle contient exactement 3 vecteurs. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Il vient

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

D'après ce qui précède, $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ est inversible. On peut calculer l'inverse par un pivot de Gauss, on trouve

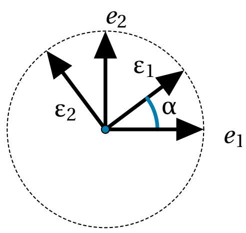
$$P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}{}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On peut vérifier ce calcul, par exemple, à l'aide de la première colonne

$$e_1 = 4\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3 \iff (1,0,0) = 4(1,1,1) - 2(2,3,2) - (-1,-2,0).$$

- *Matrices de rotation*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^2$, notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique et la famille $\mathscr{C}$ composée des deux vecteurs



$$\varepsilon_1 = \big(\cos(\alpha), \sin(\alpha)\big) \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = \big(-\sin(\alpha), \cos(\alpha)\big).$$

Les vecteurs ε_1 et ε_2 s'obtiennent par rotation d'un angle α de centre l'origine à partir des vecteurs e_1 et e_2. La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ est alors :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est de déterminant $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1 \neq 0$. La formule de l'inverse pour les matrices $(2,2)$ donne

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}{}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Or, les vecteurs e_1 et e_2 s'obtiennent aussi à partir de ε_1 et ε_2 par une rotation d'un angle $-\alpha$. La matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$ s'obtient donc ici en remplaçant α par $-\alpha$ dans l'expression de $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$. En utilisant la parité du cosinus et l'imparité du sinus, il vient :

$$P_{\mathscr{C},\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

On retrouve bien l'égalité $P_{\mathscr{C},\mathscr{B}} = \left(P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\right)^{-1}$.

THÉORÈME **formule de changement de bases**

Soient $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *avec* E *de dimension finie,* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{C}$ *deux bases de* E. *Alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi) = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}{}^{-1} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \cdot \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}.$$

Preuve. Partons de l'égalité $\varphi = \mathrm{id}_{\mathrm{E}} \circ \varphi \circ \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. Matriciellement, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}\left(\mathrm{id}_{\mathrm{E}}\right) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\left(\mathrm{id}_{\mathrm{E}}\right)\\ &= \mathrm{P}_{\mathscr{C},\mathscr{B}} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \cdot \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}.\end{aligned}$$

Enfin, la proposition précédente donne le résultat :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi) = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}{}^{-1} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \cdot \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}.$$

■

Remarque. On peut généraliser la formule de changement de bases. Si $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ avec E et F, deux espaces de dimension finie. Si $\mathscr{B}_{\mathrm{E}}$, $\mathscr{C}_{\mathrm{E}}$ (resp. $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$, $\mathscr{C}_{\mathrm{F}}$) sont deux bases de E (resp. de F) alors on montre qu'en précédemment

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_{\mathrm{F}},\mathscr{C}_{\mathrm{E}}}(\varphi) = \mathrm{P}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}},\mathscr{C}_{\mathrm{F}}}{}^{-1}\, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}},\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}(\varphi)\, \mathrm{P}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}},\mathscr{C}_{\mathrm{E}}}.$$

Exercice 25

✦ ✎ Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{bmatrix}$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3). Posons de plus $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ avec

$$u_1 = e_1 - e_3, \quad u_2 = e_1 - 2e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad u_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

On admet que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

1. Préciser B, la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.
2. Expliciter la relation entre A et B. À quelles conditions sur a et b, l'endomorphisme φ est un isomorphisme ?

p. 43

2.4 Compléments : matrices semblables

DÉFINITION **matrices semblables**

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que A *est* ***semblable*** *à* B *s'il existe une matrice inversible* P *telle que* $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{P}$.

Exercice 26

✦ **Vrai ou faux ?** Pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. A est semblable à A. ✓ ×
2. Si A est semblable à B, alors B est semblable à A. ✓ ×
3. Si A est semblable à B, et B est semblable à C, alors A est semblable à C. ✓ ×
4. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, si A est semblable à B alors A^p est semblable à B^p. ✓ ×
5. Si A est semblable à B et A est inversible alors A^{-1} est semblable à B^{-1}. ✓ ×

p. 43

Exemple. Les matrices suivantes sont semblables :

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1\\ 3 & -2 & 0\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}.$$

Exercice 27

✦ Justifions l'exemple en considérant φ, l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice M.

1. **a)** Prouver l'existence de $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{vect}(u) = \ker(\varphi - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.
De même, on prouve que $v = (4,3,-2)$, $w = (-2,3,-2)$ *vérifient*

$$\mathrm{Vect}(v) = \ker(\varphi - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \quad et \quad \mathrm{Vect}(w) = \ker(\varphi + 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}).$$

p. 43

b) Vérifier que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Démontrer que M et D sont semblables.

Proposition — endomorphisme et similitude

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *deux matrices et* E *un espace vectoriel de dimension finie* n.
Les matrices A *et* B *sont semblables si et seulement si* A *et* B *représentent un même endomorphisme de* E. *C'est-à-dire il existe deux bases* $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ *de* E *et* $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ *tels que*

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \quad et \quad B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi).$$

Preuve. C'est une conséquence du théorème de changement de base en précisant que toute matrice inversible peut être vue comme une matrice de changement de base. ■

Exemple. Pour trois réels a, b et c, on pose

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Justifions que A et B sont semblables. Soit φ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A. Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a

$$\varphi(e_1) = ae_1 \quad \text{et} \quad \varphi(e_2) = be_1 + ce_2.$$

La matrice B est semblable à A si l'on peut trouver une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ telle que

$$\varphi(\varepsilon_1) = c\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 \quad \text{et} \quad \varphi(\varepsilon_2) = a\varepsilon_2.$$

On constate que le choix $\varepsilon_1 = e_2$ et $\varepsilon_2 = e_1$ convient.
On peut vérifier par le calcul, si on pose

$$P = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

on trouve que $PBP^{-1} = A$. Les matrices sont bien semblables.

Corollaire — invariance du rang par similitude

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si A *et* B *sont semblables,* ***alors*** *elles ont même rang.*

Preuve. Si A et B sont deux matrices semblables, alors elles représentent le même endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dans des bases différentes. Ainsi, avec la proposition précédente

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}(B).$$

■

Exercice 28

✧ La réciproque est fausse. Pouvez-vous donner un contre exemple ?

p. 44

3 Compléments : trace d'une matrice

DÉFINITION **trace**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On définit la* ***trace*** *de* A, *notée* $\mathrm{Tr}(A)$, *comme la somme des coefficients diagonaux de* A. *Autrement dit, pour* $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$,

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Exercice 29

✧ Calculer $\mathrm{Tr}(I_n)$, $\mathrm{Tr}(0_n)$, $\mathrm{Tr}(J)$ et $\mathrm{Tr}(K)$ où

$$J = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

p. 44

À partir des règles de calculs usuelles, on montre que :

PROPOSITION **forme linéaire**

L'application trace $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *est une forme linéaire. C'est-à-dire, pour tous* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{Tr}(A).$$

Vocabulaire. Une forme linéaire est une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exercice 30

✦✦

1. Donner la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$. Préciser une base.
2. Expliciter un supplémentaire du noyau.

p. 44

Remarque. On peut aussi noter que la trace est invariante par transposition :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}(A).$$

PROPOSITION **trace et produit**

Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

Exercice 31

✦ Prouver cette proposition.

Si on note $[M]_{i,j}$, *le coefficient en position* (i,j) *de la matrice* M, *on rappelle que pour* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$

$$[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k}[B]_{k,j}.$$

p. 44

COROLLAIRE **invariance par similitude**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, inversible. Alors*

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}\left(P^{-1}AP\right).$$

Preuve. D'après la proposition précédente

$$\mathrm{Tr}\left(P^{-1}AP\right) = \mathrm{Tr}\left(P^{-1}(AP)\right) = \mathrm{Tr}\left((AP)P^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(APP^{-1}\right) = \mathrm{Tr}(AI_n) = \mathrm{Tr}(A).$$

■

Remarque. Autrement dit, deux matrices semblables ont même trace. Cette propriété permet de définir la trace d'un endomorphisme (voir exercice 58). La réciproque est fausse, par exemple la matrice I_n et J (de taille (n,n) et ne contenant que des "1") ont même trace pourtant elles ne sont pas semblables ($\mathrm{rg}(J) = 1 \neq n = \mathrm{rg}(I_n)$ pour $n > 1$).

Exercice 32

✦ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Que dire de A si $\mathrm{Tr}(A^tA) = 0$?
2. Que dire de A et B si pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(BX)$?

p. 44

4 Compléments : les espaces stables

DÉFINITION **espace stable**

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ *et* F *une partie de* E. *On dit que* F *est une* ***partie stable*** *par* φ *si*

$$\forall\, u \in F, \qquad \varphi(u) \in F.$$

Exemple. Soit $\varphi : f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mapsto f' \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Les espaces $\mathbb{R}[x]$ et Vect(cos, sin) sont des parties stables de φ.

Exercice 33

✦ *Les questions sont indépendantes.*

1. Montrer que toute somme de s.e.v stables par φ reste stable par φ.
2. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Montrer que le noyau et l'image de φ sont stables par ψ.

p. 44

Remarques.

- Soit F un sous-espace vectoriel de E avec $(e_1, \dots, e_p)$ une famille génératrice de F.
Alors F est une partie stable par φ si et seulement si, pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $\varphi(e_i) \in F$.

Preuve. Supposons que pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $\varphi(e_i) \in F$. Soit $u \in F$. La famille $(e_1, \dots, e_p)$ étant génératrice, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$. Comme φ est linéaire et F stable par combinaison linéaire

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \underbrace{\varphi(e_i)}_{\in F} \in F.$$

L'espace F est donc stable par φ. La réciproque est évidente.

■

- Si F est un sous-espace vectoriel stable par φ, on peut définir la restriction de φ à F par

$$\varphi|_F : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ u & \mapsto & \varphi(u). \end{array} \right.$$

L'application $\varphi\big|_F$ définit alors un endomorphisme de F.

Exercice 34

✧ Soient $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ injectif et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E stable par φ. Montrer que l'endomorphisme induit par φ sur F est un isomorphisme.

p. 44

Exercices

- *Le niveau de difficulté de l'exercice est repéré par les symboles ✧ , ✦ , ✦✦ , ✦✦✦ (difficulté croissante).*
- *Les exercices classiques à bien maîtriser sont repérés par ✎ .*
- *Les questions avec indications sont marquées par 🔑 .*
- *Enfin, l'icône ci-contre signifie que le code est disponible sur le site de classe dans l'onglet informatique. Dans la version numérique, il suffit de cliquer dessus pour ouvrir le lien.*

Révisions en algèbre linéaire

Exercice 35. ✦ **Vrai ou faux ?** 🔑

1. La somme de deux matrices inversibles est inversible. ✓ ×
2. Toute matrice carrée est la somme de deux matrices inversibles. ✓ ×

≫ Solution p. 44

Exercice 36. ✧ Soient E un espace vectoriel de dimension 2 et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $f \circ f = -\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.
Soit u, un vecteur non nul de E.

1. Justifier que $\left(u, f(u)\right)$ est une base de E.
2. Donner J la matrice de f dans cette base.
3. ✦✦✦ Généraliser le résultat précédent où E est de dimension $2n$.

≫ Solution p. 45

Exercice 37. ✦✦ ✎ On pose $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -10 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

1. En examinant les instructions en Python suivantes, calculer les puissances de A. 🔑

Editeur

```
>>> import numpy as np
>>> A = np.array(([-4, 0, 3], [0, 2, 0], [-10, 0, 7]))
>>> P = np.array(([1, 0, 3], [0, 1, 0], [2, 0, 5]))
>>> P_inv = np.linalg.inv(P)  # calcule l'inverse de la matrice
>>> P_inv
array([[-5.,  0.,  3.],
       [ 0.,  1.,  0.],
       [ 2.,  0., -1.]])
>>> P_inv @ A @ P             # La commande @ fait un produit matriciel
array([[2., 0., 0.],
       [0., 2., 0.],
       [0., 0., 1.]])
```

2. Peut-on trouver $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$? 🔑

Exercice 38. ✦ Peut-on trouver deux matrices $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$? 🔑

≫ Solution p. 45

Exercice 39. ✦ **Somme directe dans $\mathbb{R}_n[x]$**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout $i \in [\![0; n]\!]$, on définit $\mathrm{F}_i = \left\{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[x] \mid \forall\, j \in [\![0; n]\!] \setminus \{i\},\ \mathrm{P}(j) = 0\right\}$.

1. Justifier que pour tout $i \in [\![0; n]\!]$,

$$\mathrm{F}_i = \mathrm{Vect}(\mathrm{L}_i) \quad \text{où} \quad \mathrm{L}_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - j).$$

2. Vérifier que la somme $F_0 + F_1 + \cdots + F_n$ est directe, puis l'égalité $\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{n} F_i = \mathbb{R}_n[x]$.

≫ Solution p. 45

Exercice 40. ✦ **Liberté d'une famille d'applications de $\mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$**

On pose $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)$, $f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 + \sin(x^2)$ et $f_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(2x)$.

1. Donner les développements limités de f_1, f_2 et f_3 en 0 à l'ordre 4.
2. En déduire que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

≫ Solution p. 46

Exercice 41. ✦ ✎ **Rang et composition**

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\psi \in \mathscr{L}(F,G)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(\psi \circ \varphi) \leqslant \min\{\mathrm{rg}(\psi)\,;\,\mathrm{rg}(\varphi)\}$.
2. Justifier que $\mathrm{Im}(\varphi+\psi) \subset \mathrm{Im}(\varphi) + \mathrm{Im}(\psi)$. Puis, en déduire que $\mathrm{rg}(\varphi+\psi) \leqslant \mathrm{rg}(\varphi) + \mathrm{rg}(\psi)$.
3. Pour tout isomorphisme $\varphi \in \mathscr{L}(E', E)$, on a $\mathrm{rg}(f \circ \varphi) = \mathrm{rg}(f)$.
4. Pour tout isomorphisme $\psi \in \mathscr{L}(F, F')$, on a $\mathrm{rg}(\psi \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

≫ Solution p. 46

Exercice 42. ✦✦ Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f,\ g \in \mathscr{L}(E)$ tels que

$$E = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g \quad \text{et} \quad E = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g.$$

Montrer que ces sommes sont directes.

≫ Solution p. 46

Exercice 43. ✦✦ **Exemples de formes linéaires**

Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$, posons :

$$\varphi_1(P) = P(1), \quad \varphi_2(P) = P(0), \quad \varphi_3(P) = P(-1) \quad \text{et} \quad \psi(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,dt.$$

1. Justifier que φ_1 et ψ sont des formes linéaires de $\mathbb{R}_2[x]$.
   On admet que φ_2 et φ_3 sont elles-aussi des formes linéaires.
2. Justifier que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R})$.
3. **a)** Justifier l'existence de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$,

$$\int_{-1}^{1} P(t)\,dt = \lambda_1 P(1) + \lambda_2 P(0) + \lambda_3 P(-1)$$

   b) Préciser les valeurs de λ_1, λ_2 et λ_3.

≫ Solution p. 47

Exercice 44. ✦✦✦ ✎ **Caractérisation des homothéties** *Source : oraux HEC 2018*

Soit φ un endomorphisme de E.

1. Montrer que si pour tout vecteur $u \in E$, $(\varphi(u), u)$ sont colinéaires, alors φ est une homothétie.
2. On suppose φ un endomorphisme de dimension finie $n \geqslant 2$.
   Démontrer que, si φ n'est pas une homothétie, alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice M de φ a pour première colonne

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

≫ Solution p. 47

Exercice 45. ✦✦✦ **Égalité de Bézout**

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_q$ $p+q$ réels distincts. On considère les polynômes

$$A(x) = \prod_{i=1}^{p} (x - a_i) \quad \text{et} \quad B(x) = \prod_{i=1}^{q} (x - b_i).$$

On note $n = p + q - 1$ et $E = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On introduit de plus,

$$F_A = \{P \in E \mid A \text{ divise } P\} \quad \text{et} \quad F_B = \{P \in E \mid B \text{ divise } P\}.$$

1. Montrer que F_A et F_B sont des sous-espaces vectoriels de E. Préciser les dimensions de F_A et F_B.
2. Vérifier que $E = F_A \oplus F_B$.
3. En déduire qu'il existe deux polynômes U et V tels que $UA + VB = 1$.

≫ Solution p. 48

Exercice 46. ✦✦ ✎ *Source Oral HEC 2008*

Soit φ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$. On suppose que φ est de rang 1.

1. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $\varphi^2 = \lambda\varphi$.
   Pour rappel φ^2 *désigne* $\varphi \circ \varphi$.
2. Montrer que si $\lambda \neq 1$, $\varphi - \mathrm{id}_E$ est inversible et exprimer son application réciproque à l'aide de φ.

≫ Solution p. 48

Exercice 47. ✦✦ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère, pour $k \in [\![0, n]\!]$, les polynômes P_k définie par $P_k(x) = (1-x)^k x^{n-k}$.

1. Préciser le degré de P_k.
2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Simplifier $\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} P_i$.
3. En déduire que $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
4. a) Montrer que pour $0 \leqslant i \leqslant n$, $\sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} = \binom{n+1}{i+1}$.

   b) Déterminer les coordonnées du polynôme $Q(x) = \sum_{j=0}^{n} x^j$ dans la base $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$.

≫ Solution p. 49

Exercice 48. ✦ Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\ker(\varphi)$, $\ker(\varphi - \mathrm{id}_E)$ et $\ker(\varphi + \mathrm{id}_E)$ sont en somme directe.

≫ Solution p. 49

Exercice 49. ✦✦ **Variante sur les endomorphismes nilpotents**

Soit φ un endomorphisme sur E de dimension 4 tel que $\varphi^5 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Justifier que $\varphi^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
2. Dans la suite, on suppose de plus que $\varphi^3 \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   Peut-on avoir $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi^2$? Même question avec $\operatorname{Ker}\varphi^2 = \operatorname{Ker}\varphi^3$.
3. En déduire que $\dim \operatorname{Ker}\varphi^3 = 3$.
4. Conclure en montrant qu'il existe une base dans laquelle les coefficients de la matrice de φ sont nuls partout, sauf sur la deuxième diagonale inférieure.

≫ Solution p. 49

Exercice 50. ✦✦✦ Soient $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = E$. On note p_i le projecteur sur E_i parallèlement à $\oplus_{j \neq i} E_j$. Montrer que $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$ et que

$$p_1 + \cdots + p_n = \mathrm{id}_E.$$

≫ Solution p. ??

Exercice 51. ✦✦✦ *d'après oraux ESCP 2001*

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n ($n \geqslant 2$). On note S (respectivement A) le sous-espace vectoriel de E formé des matrices symétriques, (respectivement antisymétriques).

Soient (α, β) deux réels donnés non nuls, et f l'application définie sur E par, pour tout $M \in E$: $f(M) = \alpha M + \beta\, {}^t M$

1. Montrer que $E = S \oplus A$.
2. Exprimer f à l'aide de p et q, où $q = I - p$, quand p désigne le projecteur sur S de direction A.
3. Exprimer $f^2 = f \circ f$ en fonction de f et de I.
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un automorphisme de E. Exprimer alors f^{-1} en fonction de f et de I.

5. Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f^k en fonction de p, q, α, β. En déduire la puissance $k^{\text{ème}}$ de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha+\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+\beta \end{bmatrix}.$$

≫ Solution p. 50

Exercice 52. ✦ Soient $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Posons

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AMB. \end{array} \right.$$

1. Vérifier que φ est linéaire.
2. Montrer que φ est bijective et exprimer φ^{-1}.
3. Montrer que $\mathscr{B} = (I_2, A, B, AB)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, déterminer la matrice de φ dans $\mathscr{B}$.
   Pour simplifier les calculs, on pourra utiliser ce calcul Python :

≫ Solution p. 50

Editeur

```
import numpy as np
A=np.array([[2,1],[5,3]])
print(np.dot(A,A)-5*A+np.eye(2))

B=np.array([[4,1],[7,2]])
print(np.dot(B,B)-6*B+np.eye(2))
```

Console

```
>>> # script executed

[[0. 0.]
 [0. 0.]]
[[0. 0.]
 [0. 0.]]
```

Exercice 53. ✦✦✦ Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que, pour tout $u \in E$, il existe un entier $n_u \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n_u}(u) = 0_E$. Montrer qu'il existe un entier n tel que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

≫ Solution p. 51

Exercice 54. ✦✦ **Produit cartésien et formule de Grassmann**
Soient F, G deux espace vectoriels. $F \times G$ est un espace vectoriel pour les lois définies par : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in F \times G$

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \quad \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

1. Justifier que si F et G sont de dimensions finies, alors $F \times G$ est de dimension finie et

$$\dim(F \times G) = \dim(F) + \dim(G).$$

2. a) Vérifier que l'application $f : F \times G \to E, (x, y) \mapsto x + y$ est linéaire.
   b) Déterminer $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$.
   c) Retrouver la formule de Grassmann

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

≫ Solution p. 51

Compléments de deuxième année

Exercice 55. ✦ Soient P le plan vectoriel inclus dans $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x - y - z = 0$ et $D = \text{Vect}(u)$ où $u = (1, -1, 1)$.

1. Justifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$. Soit $\mathscr{B}$, une base adaptée à la décomposition précédente.
2. Préciser $M = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$.
3. Expliciter la matrices de passage entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{B}$. En déduire la matrice, dans la base canonique $\mathscr{C}$, de la projection p sur P parallèlement à D.

≫ Solution p. ??

Exercice 56. ✦✦ Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'objectif est de prouver que $BA = I_2$.
Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f, g les endomorphismes canoniquement associés à A et B.

1. Vérifier que $g(e_2)$ et $g(e_3)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. Notons $\mathscr{C}$ cette base.
2. Calculer la matrice de $g \circ f$ dans cette nouvelle base.
3. Conclure.

≫ Solution p. 51

Exercice 57. ✦ Soient $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et φ son endomorphisme canoniquement associé.

1. Justifier qu'il existe $x \in \mathbb{R}^2$ tel que la famille $(x, \varphi(x))$ soit libre.
2. En déduire que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

≫ Solution p. 52

Exercice 58. ✦ ✎ **Trace d'un endomorphisme**
Soient $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ avec E de dimension finie et $\mathscr{B}$ une base de E. On définit la trace de φ par

$$\mathrm{Tr}(\varphi) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)\right).$$

1. Justifier que la trace de φ ne dépend pas du choix de la base.
2. *Exemples*
   a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la trace de φ où $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto P - P' \in \mathbb{R}_n[x]$.
   b) On pose $\varphi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
      i) Justifier que le sous-espace des matrices symétriques de taille (n, n) (noté $\mathscr{S}_n$) et celui des matrices antisymétriques (noté $\mathscr{A}_n$) sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Préciser les dimensions.
      ii) En déduire la trace de φ.
   c) Soit p, un projecteur de E de dimension n.
      i) Justifier que $\ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$.
      ii) En déduire que la trace d'un projecteur d'un espace vectoriel de dimension finie est égale à son rang.

≫ Solution p. 52

Exercice 59. ✦✦✦ ✎ **Dimension du commutant** *Source : oraux HEC 2021*
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$.

1. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Déterminer la dimension de l'espace vectoriel $\mathscr{C}_A = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; AM = MA \right\}$.

≫ Solution p. 52

Exercice 60. ✦✦✦ Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'application $\Phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ par $\Phi_A(X) = \mathrm{Tr}(AX)$.

1. Montrer que Φ_A est une forme linéaire.
2. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, justifier qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = \Phi_A$.

≫ Solution p. 53

Exercice 61. ✦✦✦ ✎ **Base de polynômes de Lagrange**
Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts. Notons $\mathscr{B} = \left(1, x, \ldots, x^n\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ et $(e_0, \ldots, e_n)$, la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

1. Montrer que l'application suivante est un isomorphisme

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \big(\mathrm{P}(a_0), \dots, \mathrm{P}(a_n)\big). \end{cases}$$

2. Pour tout $i \in [\![0; n]\!]$, on définit le polynôme $\mathrm{L}_i = \varphi^{-1}(e_i)$. Montrer que la famille $\mathscr{C} = (\mathrm{L}_0, \dots, \mathrm{L}_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ et que

$$\forall\, \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[x], \qquad \mathrm{P} = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(a_i)\, \mathrm{L}_i.$$

3. Préciser ${\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}}^{-1}$.
Pour rappel, $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ désigne la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$.

≫ Solution p. 53

Exercice 62. ✦ *D'après HEC 2009 E*

Soit A un élément donné de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ non colinéaire à I_2. On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont A est la matrice associée dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ On pose : $w = e_1 + e_2$.

1. En considérant les trois vecteurs e_1, e_2 et w, montrer qu'il existe au moins un élément non nul x de $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $\big(x, \varphi(x)\big)$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la matrice M associée à φ dans la base $\big(x, \varphi(x)\big)$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$$

où a et b sont deux réels, indépendants de la base $\big(x, \varphi(x)\big)$, que l'on exprimera en fonction de det(A) et Tr(A).
On pourra admettre que le déterminant est un invariant de similitude.

3. En déduire que la matrice A est semblable à sa transposée ${}^t\mathrm{A}$.

≫ Solution p. 54

Exercice 63. ✦✦✦ ✎ **Vecteurs cycliques et espaces stables**

Soient E, un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On dit qu'un vecteur $u \in \mathrm{E}$ est *cyclique* pour φ s'il existe un entier m non nul tel que la famille $\mathscr{B}_{u,m} = \big(u, \varphi(u), \varphi^2(u), \dots, \varphi^{m-1}(u)\big)$ soit une famille génératrice de E.
Pour rappel, $\varphi^i(u) = \varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi(u)$ avec i compositions.

1. Comparer m et n.
2. Montrer que si u est cyclique pour φ, alors $\mathscr{B}_{u,n}$ est une base de E.
3. *Application*
Dans la suite, on suppose que les seuls sous-espaces vectoriels stables par φ sont $\{0_\mathrm{E}\}$ et E.
 a) Justifier qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que la famille $\mathscr{B}_{u,m}$ soit libre mais $\mathscr{B}_{u,m+1}$ n'est pas libre.
 b) Vérifier que $\mathrm{Vect}(\mathscr{B}_{u,m})$ est un espace stable par φ.
 c) En déduire que tout vecteur $u \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$ est cyclique.
 d) On note $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ les coordonnées de $\varphi^n(u)$ dans la base $\mathscr{B}_{u,n}$. Justifier que

$$\varphi^n = a_0 \cdot \mathrm{id}_\mathrm{E} + a_1 \cdot \varphi + \ldots + a_{n-1} \cdot \varphi^{n-1}.$$

 e) Donner la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}_{u,n}$ à l'aide des réels a_i.

≫ Solution p. 55

Python

Exercice 64. ✦

Écrire un programme Python qui compte le nombre de matrices non inversibles parmi les matrices de tailles $(25, 25)$:

$$\mathrm{M}(a,b) = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \qquad -50 \leqslant a, b \leqslant 50.$$

Indication. On pourra utiliser les commandes **ones([n,p])** qui renvoie une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ne contenant que des 1, **eye(n)** pour la matrice I_n et **np.linalg.matrixrank(A)** pour le rang de la matrice A.

≫ Solution p. 56

Exercice 65. ✦✦ **Antitransposée et matrices antidiagonales**

≫ Solution p. 56

1. a) Compléter le programme suivant qui prend en argument une matrice A et renvoie sa transposée.

Editeur

```
def transpo(A):
    [n,p]=np.shape(A)
    B=np.zeros( ... )
    for i in ... :
        for j in ... :
            B[...,...]=
    return B
```

b) On définit l'antitransposée d'une matrice carrée A par la matrice C obtenue par symétrie par rapport à l'antidiagonale. Par exemple,

$$\mathrm{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{C}_0 = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Comment modifier le programme précédent pour obtenir un nouveau programme qui prend en argument une matrice A et qui renvoie son antitransposée.

2. Une matrice T est dite antidiagonale si les coefficients situés en dehors de l'antidiagonale sont nuls. Par exemple,

$$\mathrm{T}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

À l'aide de Python, que peut-on conjecturer sur les puissances d'une matrice antidiagonale ?
Indication. On pourra utiliser la commande `np.dot(A,B)` *pour faire le produit* AB.

3. Prouver votre résultat.
Indication. On pourra considérer TP_n *où* T *est une matrice antidiagonale de taille* (n,n) *et* P_n *est la matrice construite sur le même modèle que* P_3.

4. À quelle condition sur ses coefficients, une matrice antidiagonale est inversible ?

Exercice 66. ✦✦✦ *d'après EDHEC 94, option scientifique*

Dans cet exercice, une suite réelle peut être désignée indifféremment par l'une ou l'autre des notations u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On étudie un sous-espace vectoriel $\mathscr{E}$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles à indices dans $\mathbb{N}$:

$$\mathscr{E} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = \frac{3}{2}u_{n+2} - \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{8}u_n\right\}$$

1. Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathscr{E}$ est de dimension 3. (On pourra éventuellement considérer l'application linéaire φ de $\mathscr{E}$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(u) = (u_0, u_1, u_2)$.)

2. Montrer que si l'on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \frac{1}{2^n}, \quad b_n = \frac{n}{2^n}, \quad c_n = \frac{n^2}{2^n},$$

les trois suites a, b, c forment une base de $\mathscr{E}$.

3. Montrer que si u appartient à $\mathscr{E}$, la série de terme général u_n est convergente. On notera

$$s(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

4. Calculer $s(a)$, $s(b)$ et $s(c)$.

5. Montrer que $s : u \mapsto s(u)$ est une application linéaire de $\mathscr{E}$ vers $\mathbb{R}$; quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} s$?

6. Déterminer $\operatorname{Ker} s$.

Indications et solutions

Indication de l'exercice 1 — p. 2

Vérifier que E_2, E_7, E_8 et E_{10} sont les seuls espaces vectoriels.

Indication de l'exercice 2 — p. 2

Soit $u_1 \in E_1 \setminus E_2$. En considérant $u_1 + v \in E_1 \cup E_2$, montrer que pour tout vecteur $v \in E_2$, $v \in E_1$.

Indication de l'exercice 3 — p. 4

2. Il faut et il suffit que P soit de degré n.
4.(a) Utiliser les croissances comparées pour justifier que la famille est libre.
4.(b) Utiliser un argument de dérivabilité. La fonction f_i n'est pas dérivable en i.

Indication de l'exercice 8 — p. 7

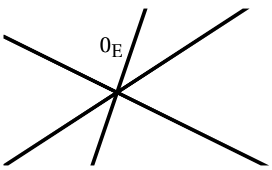
2. Justifier que pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, on a

$$P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i.$$

Indication de l'exercice 10 — p. 8

1. Justifier que G est de dimension $n-1$ en exhibant une base. On pourra supposer que $a_n \neq 0$.

Indication de l'exercice 12 — p. 10



Indication de l'exercice 13 — p. 11

Déterminer une base (w_1, w_2) de F. Vérifier ensuite que la famille (u, v, w_1, w_2) est une base de $\mathbb{R}^4$. Conclure avec la proposition précédente.

Indication de l'exercice 14 — p. 12

Adapter le schéma de l'indication 12 ci-dessus dans $\mathbb{R}^3$.

Indication de l'exercice 15 — p. 12

2. Vérifier que

$$\dim V + \dim H = \mathbb{R}_3[x] \quad \text{et} \quad V \cap H = \{0\}.$$

3. Il faut justifier que l'on peut retirer les parenthèses

$$(F \oplus G) \oplus H = F \oplus G \oplus H.$$

Indication de l'exercice 17 — p. 15

Pour rappel :
Soit $f : E \to F$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
→ f est bijective.
→ Il existe une application $g : F \to E$ telle que : $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$.
Dans ce cas, $g = f^{-1}$.

Indication de l'exercice 18 — p. 15

1. Donner la matrice de l'application dans la base canonique puis conclure avec le déterminant.
2.(b) Remarquer que φ est bijective avec $\varphi^{-1} : P \mapsto ...$

Indication de l'exercice 26 — p. 20

Tout est vrai !

Indication de l'exercice 28 — p. 21

On pourra regarder les matrices semblables à I_n et les matrices de même rang que I_n.

Indication de l'exercice 35 — p. 25

La première est fausse et la seconde est vraie (on pourra utiliser des matrices triangulaires).

Indication de l'exercice 37 — p. 25

1. Écrire A sous la forme $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale. Exprimer ensuite A^p à l'aide de P, D et P^{-1}
2. Partir d'une matrice S telle que $S^2 = D$.

Indication de l'exercice 38 — p. 25

Pensez à la trace.

Indication de l'exercice 42 — p. 26

Écrire les formules du rang pour f et g ainsi que la formule de Grassmann avec $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$.

Indication de l'exercice 44 — p. 26

1. Détaillons les différentes étapes de la question 1.
a. Montrer que si $u \neq 0_E$, il existe un unique scalaire λ_u tel que $\varphi(u) = \lambda_u u$. Que dire si $u = 0_E$?
b. Soit (u, v) une famille libre de vecteurs de E. Comparer λ_u et λ_v.
c. Montrer que φ est une homothétie.
2. Il existe $u \in E$ tel que $\big(\varphi(u), u\big)$ soit libre. Compléter en une base.

Indication de l'exercice 57 — p. 29

1. Tester avec $x = e_1$, $x = e_2$ et enfin $x = e_1 + e_2$.

2. Regarder la matrice de φ dans la base de $\mathbb{R}^2$, $\big(x, \varphi(x)\big)$.

Indication de l'exercice 58 p. 29

1. Appliquer la formule de changement de base et la relation $\mathrm{Tr(AB)} = \mathrm{Tr(BA)}$.

2.(a) Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

2.(b)i. Vérifier que $\dim \mathscr{S}_n = n(n+1)/2$ et $\dim \mathscr{A}_n = n(n-1)/2$.

2.(b)ii. Écrire la matrice de l'application φ dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition

$$\mathscr{S}_n \oplus \mathscr{A}_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

3.(b)i. Raisonner par analyse-synthèse. Pour $u \in \mathrm{E}$

$$u = \underbrace{p(u)}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{\big(u - p(u)\big)}_{\in \operatorname{Ker} p}.$$

Indication de l'exercice 59 p. 29

1. Justifier l'existence de $v \in \operatorname{Ker}\varphi \setminus \operatorname{Im}\varphi$ et $w \in \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{Ker}\varphi$. Montrer que la famille $(u, \varphi(w), w)$ est une base. Que dire de la matrice de φ dans cette base ?

2. Écrire $\mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$. Justifier que $\mathrm{M} \in \mathscr{C}_\mathrm{A}$ si et seulement si $\mathrm{PMP}^{-1} \in \mathscr{C}_\mathrm{B}$. Que peut-on en déduire sur les dimensions de $\mathscr{C}_\mathrm{B}$ et $\mathscr{C}_\mathrm{A}$?
Calculer ensuite $\dim \mathscr{C}_\mathrm{B}$ en déterminant les conditions sur les coefficients de

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

pour que $\mathrm{M} \in \mathscr{C}_\mathrm{B}$.

Indication de l'exercice 60 p. 29

2. Pour tout couple $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, on pose $\Phi_{ij} = \Phi_{\mathrm{E}_{ij}}$ Montrer que la famille (Φ_{ij}) est une base de l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Utiliser ensuite la dimension de

$$\dim\big(\mathscr{L}\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}\big)\big)$$

pour justifier que l'on obtient une base. Conclure.

Indication de l'exercice 61 p. 29

1. Par un argument de dimension, il suffit de montrer que φ est injective. Montrer ensuite que si $\mathrm{P} \in \operatorname{Ker}\varphi$, P est nécessairement le polynôme nul.

Indication de l'exercice 63 p. 30

2. Procéder par récurrence sur la propriété : la famille $\mathscr{B}_{u,k}$ est une famille libre (avec $k \in [\![1; n]\!]$).

3.(a) Que dire de la liberté de la famille

$$(\mathrm{id}_\mathrm{E}, \varphi, \ldots, \varphi^p)$$

avec $p > \dim \mathscr{L}(\mathrm{E})$?

3.(b) $\operatorname{Vect}\big(\mathscr{B}_{u,m}\big)$ est un espace stable par φ.

3.(c) Vérifier l'égalité pour tout vecteur de la base $\mathscr{B}_{u,n}$.