

DM 1 - sujet A

THÈME : RÉVISIONS ANALYSE

Exercice 1
 Étude d'une suite

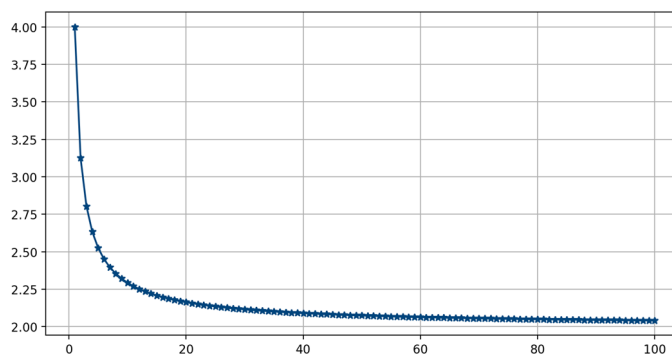
- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
- 1. a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$.
 b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \ln(n) + 1$.
- On considère une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.
- 2. Écrire un programme python qui prend en argument n et renvoie u_n . Adapter le code pour renvoyer la matrice

$$\begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix}.$$
- 3. Conjecturer un équivalent de u_n à l'aide du test suivant.

Editeur

```
n=100
U= suiteU(n)
V=np.zeros(n)
for i in range(1,n+1):
    V[i-1]=U[i]**2/i

X=np.linspace(1,n,n)
plt.grid()
plt.plot(X,V,'*-')
plt.show()
```



- 4. Vérifier que la suite u est croissante et de limite $+\infty$.
- 5. a) Pour tout entier naturel k , exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k^2 .
 b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \geq 2n.$$
- 6. a) Justifier que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}$.
 b) Établir que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$

- 7. Prouver la conjecture.

Exercice 2
Intégrales

Pour tout réel a strictement positif et tout entier naturel n , on pose :

$$I_n(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at} (1 - e^{-t})^n dt.$$

1. Justifier la convergence de l'intégrale généralisée définissant $I_n(a)$.
2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a

$$I_n(1) = \frac{1}{n+1}.$$

- b) En déduire que, pour tout réel a vérifiant $a \geq 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(a) = 0$.
3. a) Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}_*^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)(I_n(a) - I_{n+1}(a)) = aI_{n+1}(a).$$

- b) En déduire $I_{n+1}(a)$ en fonction de $I_n(a)$.
4. Pour tout réel a vérifiant $a > 1$ et tout entier naturel n , on pose : $S_n(a) = \sum_{k=0}^n I_k(a)$.

a) Prouver l'égalité : $S_n(a) = \frac{1}{a-1} - \frac{n+1}{a-1} I_n(a)$.

b) Montrer que, pour tout réel a vérifiant $a > 1$, la série $\sum I_k(a)$ converge.

5. Pour tous x et y réels strictement positifs, on pose

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad \text{et} \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

On a vu à l'exercice RA8 que

$$B(n+1, y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{n^y}$$

- a) Exprimer $I_n(a)$ sous la forme $B(\alpha, \beta)$ à l'aide du changement de variable $u = e^{-t}$.
- b) En déduire un équivalent de $I_n(a)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Retrouver et améliorer le résultat de la 4.b).
6. Écrire une fonction Python qui prend en arguments a et n puis renvoie la valeur de $S_n(a)$.

– FIN SUJET A –

DM 1 - sujet ♦

THÈME : RÉVISIONS EN ANALYSE

Problème

Espace $L^2(\mathbb{R}^+)$ et inégalités de Cauchy-Schwarz et de Carlson

Dans la suite, on pose E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$ converge.

1. Structure d'espace vectoriel

- a) Vérifier que si $f, g \in E$ alors $\int_0^{+\infty} f(t)g(t) dt$ converge.
 b) En déduire que E est un espace vectoriel.

2. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout $(f, g) \in E^2$, on pose : $\varphi(f, g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t) dt$ et $\Phi(f) = \varphi(f, f)$.

- a) Soient $f, g \in E$. Justifier que l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto \Phi(f + xg)$ est une fonction polynomiale de degré au plus 2.
 b) En déduire que pour tout $(f, g) \in E^2$

$$\varphi(f, g)^2 \leq \Phi(f)\Phi(g).$$

3. Calculer $\Phi(u)$ où $u : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

4. Inégalité de Carlson

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto tf(t) \in E$. L'objectif est d'établir

$$\left(\int_0^{+\infty} f(t) dt \right)^4 \leq \pi^2 \left(\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt \right) \left(\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt \right).$$

Pour simplifier les notations, on pose

$$I_f = \int_0^{+\infty} f(t) dt, \quad J_f = \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt \quad \text{et} \quad K_f = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt.$$

- a) Montrer que $f \in E$ et $I_f^2 \leq \frac{\pi}{2} (J_f + K_f)$.
 b) En appliquant l'inégalité précédente à une fonction auxiliaire, déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$

$$I_f^2 \leq \frac{\pi}{2} \left(\lambda J_f + \frac{1}{\lambda} K_f \right)$$

- c) Conclure sur l'inégalité.

5. On pose $h : t \in \mathbb{R} \mapsto 1/(1+t^2)$.

- a) Calculer I_h .
 b) Vérifier que pour tout $x \in [0; \pi/2[$, $h(\tan(x)) = \cos(x)^2$ et $\tan'(x) = 1/\cos(x)^2$. À l'aide d'un changement de variable, calculer J_h .
 c) Simplifier $K_h + J_h$. En déduire K_h .
 d) Vérifier qu'il y a égalité dans l'inégalité de Carlson avec h .

6. Application (facultatif)

Déterminer $C(a)$ tel que

$$\forall a > \frac{1}{2}, \quad \Gamma(a)^4 \leq C(a) \Gamma(2a-1) \Gamma(2a+1).$$

Pour rappel, la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$.

Exercice - informatique
Spirale de Cornu

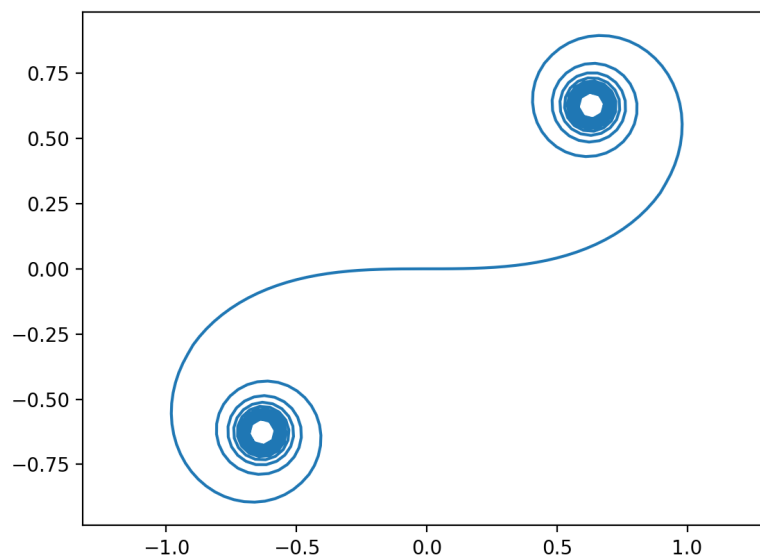
Pour tout réel t positif, on pose

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t \cos(s^2) \, ds \\ y(t) = \int_0^t \sin(s^2) \, ds \end{cases}$$

1. Écrire un programme qui prend en argument t et renvoie une approximation de $x(t)$ par la méthode des rectangles.
2. Proposer un programme python qui permet de représenter l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ donnés par :

$$\left\{ (x(t), y(t)) \mid t \in [-10; 10] \right\}.$$

Ci-dessous, le résultat que vous devez obtenir.



– FIN SUJET ♦ –

DM 1 - sujet Cube

THÈME : RÉVISIONS EN ANALYSE

Problème (version cube)

Espace $L^2(\mathbb{R}^+)$ et inégalités de Cauchy-Schwarz et de Carlson

Dans la suite, on pose E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $\int_0^{+\infty} f(x)^2 dx$ converge.

1. Structure d'espace vectoriel

- a) Vérifier que si $f, g \in E$ alors $\int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx$ converge.
- b) En déduire que E est un espace vectoriel.

2. Un produit scalaire

- a) Justifier que l'application $(f, g) \in E^2 \mapsto \langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx$ est un produit scalaire. On note $\|\cdot\|$, la norme associée.
- b) Calculer $\|u\|^2$ où $u : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. Inégalité de Carlson

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto xf(x) \in E$. L'objectif est d'établir

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x) dx \right)^4 \leq \pi^2 \left(\int_0^{+\infty} f(x)^2 dx \right) \left(\int_0^{+\infty} x^2 f(x)^2 dx \right).$$

Pour simplifier les notations, on pose

$$I_f = \int_0^{+\infty} f(x) dx, \quad J_f = \int_0^{+\infty} f(x)^2 dx \quad \text{et} \quad K_f = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)^2 dx.$$

- a) Montrer que $f \in E$ et

$$I_f^2 \leq \frac{\pi}{2} (J_f + K_f).$$

- b) En appliquant l'inégalité précédente à une fonction auxiliaire, déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$

$$I_f^2 \leq \frac{\pi}{2} \left(\lambda J_f + \frac{1}{\lambda} K_f \right)$$

- c) Conclure sur l'inégalité.

- d) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\gamma}{\alpha + \beta t^2}$ avec α et β strictement positifs et $\gamma \in \mathbb{R}$.

4. Application

Déterminer $C(a)$ tel que

$$\forall a > \frac{1}{2}, \quad \Gamma(a)^4 \leq C(a) \Gamma(2a-1) \Gamma(2a+1).$$

Pour rappel, la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$.

Exercice - informatique
Spirale de Cornu

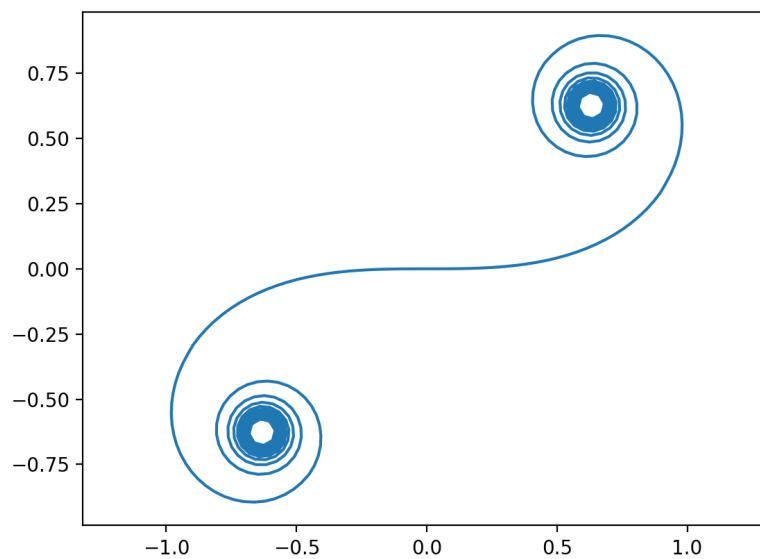
Pour tout réel t positif, on pose

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t \cos(s^2) \, ds \\ y(t) = \int_0^t \sin(s^2) \, ds \end{cases}$$

1. Écrire un programme qui prend en argument t et renvoie une approximation de $x(t)$ par la méthode des rectangles.
2. Proposer un programme python qui permet de représenter l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ donnés par :

$$\left\{ (x(t), y(t)) \mid t \in [-10; 10] \right\}.$$

Ci-dessous, le résultat que vous devez obtenir.



– FIN SUJET CUBE –