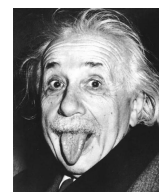


CHAPITRE 1

Révisions en analyse

Do not worry too much about your difficulties in mathematics, I can assure you that mine are still greater.

ALBERT EINSTEIN



- Les questions avec indications sont marquées par .
- Les exercices classiques à bien maîtriser sont repérés par .
- À l'inverse, les exercices « exotiques », réservés à une seconde lecture, sont repérés par .
- Le niveau de difficulté de l'exercice est repéré par les symboles $\diamond$, $\blacklozenge$, $\blacklozenge\blacklozenge$, $\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge$ (difficulté croissante).

1

Suites et séries

Exercice 1. Est-ce que les séries suivantes sont convergentes?

RA1

$$\sum \frac{1}{n^{1+1/n}}, \quad \sum \frac{\frac{\cos(1/n)^\pi}{\sin(\pi/n)} e^{\ln(n+666)-\ln(n)} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}}{7 \cdot n^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

>> Solution p. 10

Exercice 2. Soient x un nombre réel strictement positif et (u_n) la suite réelle ainsi définie :

d'après EMlyon # RA2

$$u_0 = x, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{2\sqrt{u_n}}$$

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 1$.
2.
 - a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est monotone et convergente.
 - b) Déterminer la limite de cette suite.
3. On suppose maintenant que $x \neq 1$ et on considère la série de terme général $v_n = -1 + u_n$.
 - a) Étudier la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de v_{n+1}/v_n .
 - b) Que peut-on conclure pour la série de terme général v_n ?
 - c) En déduire que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente où : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n = \prod_{k=0}^n u_k$.

>> Solution p. 10

Exercice 3. Règle de Raabe-Duhamel

d'après oral ESCP 2025 # RA10

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites strictement positives.

1. Montrer que si $(\ln(nu_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers une limite finie ou vers $+\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

2. 🐞 On suppose qu'il existe un rang n_0 à partir duquel :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \right).$$

Montrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

On suppose dans la suite que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. a) 🐞 Montrer que $\sum u_n$ diverge si $\lambda < 1$.
 b) Montrer que $\sum u_n$ converge si $\lambda > 1$.
Indication. On pourra poser $v_n = 1/n^\alpha$ pour un réel α bien choisi.
4. Application

Discuter en fonction de la valeur de $\gamma \in \mathbb{R}$ de la convergence absolue de la série de terme général

$$u_n = \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)\dots(\gamma-(n-2))(\gamma-(n-1))}{n!}.$$

>> Solution p. 11

Exercice 4. ♦ Suite de Sylvester

RA3

On définit la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation de récurrence

$$s_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad s_{n+1} = 1 + \prod_{k=0}^n s_k.$$

1. a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n(s_n - 1) + 1$ (*)
 b) Démontrer la relation de récurrence d'ordre 2 suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$s_{n+2} = s_{n+1}^2 - s_n(s_n - 1) \quad (**)$$

- c) Préciser la limite de $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Python

- a) En utilisant la relation (*), écrire une fonction Python d'entête `Sylvester` d'argument n et qui renvoie le tableau unidimensionnel $[s_0 \ s_1 \ \dots \ s_n]$.
 b) Reprendre la question précédente en utilisant maintenant la relation (**).

3. Le code suivant permet de conjecturer la convergence d'une certaine série. Laquelle?

Editeur

```
n=10, indice=np.linspace(0,n,n+1)
A=sylvester(n)
B=np.zeros(n+1)
B[0]=1/A[0]
for i in range(1,n+1):
    B[i]=B[i-1]+1/A[i]

# résultat :
>>> B
array([0.5, 0.83333333, 0.97619048, 0.99944629, 0.99999969,
       1., 1., 1., 1., 1., 1.])
```

4. Prouver votre conjecture en montrant dans un premier temps que $1/(s_n - 1) - 1/(s_{n+1} - 1) = 1/s_n$.

Exercice 5. ♦♦♦ ⚙️ Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où c_n désigne le nombre de chiffres de l'entier n .

d'après oral HEC 2025 # RA47

1. Justifier la convergence de $\sum \frac{c_n}{n(n+1)}$
 2. Calculer la somme de cette série.

>> Solution p. 13

Exercice 6. ♦♦ 🎵 Pour tout réel a strictement positif et tout entier naturel n , on pose :

RA45

$$I_n(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at} (1 - e^{-t})^n dt.$$

- Justifier la convergence de l'intégrale généralisée définissant $I_n(a)$.
- Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_n(1) = 1/(n+1)$.
 - En déduire que, pour tout réel a vérifiant $a \geq 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(a) = 0$.
- Exprimer $I_{n+1}(a)$ en fonction de $I_n(a)$.
- Pour tout réel a vérifiant $a > 1$ et tout entier naturel n , on pose : $S_n(a) = \sum_{k=0}^n I_k(a)$.
 - Prouver l'égalité : $S_n(a) = \frac{1}{a-1} - \frac{n+1}{a-1} I_n(a)$.
 - Établir, pour tout réel a vérifiant $a > 1$, la convergence de la série $\sum I_k(a)$.
- Écrire une fonction Python qui prend en arguments a et n puis renvoie la valeur de $S_n(a)$.

Exercice 7. ♦ 🎵 **Le rêve du deuxième année**

RA4

L'objectif de l'exercice est d'établir l'égalité suivante :

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-k} \quad (\bullet)$$

- Soit $h :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = -x \ln x$. Donner les variations de h . Que dire en 0^+ ?
- 🔑 Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence d'une fonction continue R_n telle que

$$\forall u \in \mathbb{R}^+, \quad e^u = \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} + R_n(u) \quad \text{et} \quad 0 \leq R_n(u) \leq \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} e^u.$$

- Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $J_k = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^k du$.
 - Justifier l'existence de J_k .
 - 🔑 Calculer J_k .
 - En déduire l'existence et le calcul de $I_k = \int_0^1 x^k (\ln x)^k dx$.
On pourra effectuer le changement de variable $u = -(k+1) \ln x$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} I_k + r_n$ avec $0 \leq r_n \leq \frac{e^{1/e}}{(n+1)! e^{n+1}}$.
 - En déduire l'égalité $(\bullet)$.

>> Solution p. 15

Exercice 8. ♦♦ 🎵 Soient $n \in \mathbb{N}$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

RA46

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x}.$$

- Écrire un programme Python qui prend en arguments n et x puis calcule « de manière économique » $f_n(x)$.
- Préciser f'_n , retrouver la valeur de $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a : $f_n(x) = \int_x^{+\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt$.
- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x} f_{n-k}(x) = f_n(2x)$.
- Vérifier que, pour tous $x \in \mathbb{R}_*^+$, $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} f_n(t) dt$ est convergente et vaut $\sum_{k=0}^n f_k(x)$.
- A-t-on l'égalité

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt \right) ?$$

Exercice 9. ♦♦

adapté de l'écrit EDHEC 93 # RA5

Pour tout entier naturel non nul n , on note

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

On introduit aussi les fonctions f_n et g_n définies sur $] -1; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (x+k)}.$$

Enfin, on introduit les intégrales :

$$I_n = \int_0^1 g_n(x) dx, \quad U_n = \int_0^{1/\sqrt{H_n}} g_n(x) dx \quad \text{et} \quad V_n = \int_{1/\sqrt{H_n}}^1 g_n(x) dx.$$

Partie I

1. a) La suite de terme général H_n est-elle convergente? La suite de terme général S_n est-elle convergente?
- b) Pour tout nombre réel positif ou nul x , prouver les inégalités :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \quad (\bullet)$$

- c) En appliquant la double inégalité précédente à $x = \frac{1}{k}$ montrer que $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$.
2. a) Exprimer $g_n(x)$ à l'aide de $f_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- b) En déduire, à l'aide de la double inégalité $(\bullet)$, les inégalités :

$$\int_0^{1/\sqrt{H_n}} e^{-xH_n} dx \leq U_n \leq e^{\frac{S_n}{2H_n}} \int_0^{1/\sqrt{H_n}} e^{-xH_n} dx.$$

- c) En conclure que $U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{H_n}$.
- d) Montrer de façon analogue les inégalités : $0 \leq V_n \leq e^{-\sqrt{H_n}} e^{\frac{S_n}{2H_n}}$
- e) Démontrer que $V_n = o\left(\frac{1}{H_n}\right)$ quand n tend vers l'infini.
3. À l'aide des questions précédentes, établir que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln n}$.

Partie II

4. On considère la famille de polynômes $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ définie par :

$$\forall k \in [1; n], \quad e_k(x) = (x+1)(x+2)\cdots(x+k-1)(x+k+1)\cdots(x+n) = \prod_{\substack{i \neq k \\ 1 \leq i \leq n}} (x+i).$$

- a) Montrer que cette famille est libre. En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
- b) En déduire l'existence de coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad n! = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i(x).$$

- c) Calculer λ_k en fonction de n et du coefficient binomial $\binom{n-1}{k-1}$.
5. En déduire la formule :

$$I_n = n \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k-1} (\ln(k+1) - \ln(k)).$$

6. Utiliser cette égalité et l'équivalent de I_n obtenu dans la partie I pour justifier l'équivalent :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \ln(k+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln n}.$$

Exercice 10. ♦♦♦ Calcul de $\zeta(2)$

On pose, pour tout entier naturel n , $C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n} dx$ et $D_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (\cos x)^{2n} dx$.

1. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $C_n = (2n-1)(C_{n-1} - C_n)$.
On pourra écrire $\cos^2 x = \cos x \cos^{2n-1} x$.
2. Établir, pour tout entier naturel n non nul, les égalités : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 (\cos x)^{2n-2} dx = \frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}$.
3. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $C_n = (2n-1)nD_{n-1} - 2n^2D_n$.
4. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\frac{1}{n^2} = 2\left(\frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \frac{D_n}{C_n}\right)$.
5. a) Justifier, pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la minoration : $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$.
b) En déduire, pour tout entier naturel n , la majoration : $D_n \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{C_n}{2n+2}$.
6. Prouver l'égalité : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

» Solution p. 19

Exercice 11. ♦♦

d'après Ecricome # RA6

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0, \frac{\pi}{4}]$ par : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ ainsi que la suite réelle $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivante :

$$I_0 = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x)]^n dx.$$

A - Étude de la bijection réciproque de f

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.
2. Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1} .
3. Justifier que :

$$\forall x \in J, \quad \cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}.$$

4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et : $\forall x \in J \setminus \{1\}, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.
5. En déduire le développement limité en $\sqrt{2}$ de f^{-1} à l'ordre 1.

B - Étude de la suite d'intégrales

1. Justifier que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie. Calculer I_2 .
2. Déterminer les réels a et b , tels que : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$.
3. En posant $t = \sin x$, déterminer I_1 .
4. Déterminer le sens de variation de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
5. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}, \quad I_n \geq \int_{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)^n} dx \geq \frac{1}{n^2} \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2})^n}$.
b) En déduire le comportement de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_n$.

» Solution p. 20

Exercice 12. ♦♦♦ Dans la suite, α désigne un nombre réel fixé supérieur ou égal à 1, et on pose :

d'après EDHEC # RA7

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^n dt.$$

1. Montrer que l'intégrale I est absolument convergente.
2. a) Calculer I_0 .

- b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que si I_{n-1} est convergente, il en est de même de I_n , et trouver une relation entre I_n et I_{n-1} .
- c) En déduire la convergence de I_n et la valeur de I_n en fonction de n et α .
3. a) Rappeler les formules de Taylor-Young et Taylor avec reste intégral. Préciser bien les hypothèses.
En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction sinus sur l'intervalle $[0, x]$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

- b) En déduire que :

$$\left| I - \left(I_0 - \frac{I_2}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{I_{2n}}{(2n+1)!} \right) \right| \leq K I_{2n+1},$$

K étant un nombre réel que l'on précisera en fonction de n .

- c) En déduire : $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\alpha^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\alpha^{2n+1}} \right)$.
4. a) Rappeler la définition de la fonction arctangente, préciser son graphe ainsi que l'équation de la tangente en 0. Enfin, vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

- b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [0, 1], \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$

- c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0, 1], \quad \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan(x) \right| \leq \frac{1}{2n+3}.$

- d) En déduire une expression très simple de I en fonction de α utilisant la fonction arctangente.

>> Solution p. 22

Exercice 13. ♦♦ Exemple d'intégrales à paramètres : lien entre les fonctions Beta et Gamma

RA8

A - Préliminaires

Soit Φ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \Phi(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt.$

Pour tout réel $x > 0$ fixé, on note $\varphi_x : t \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \ln(t) t^{x-1} e^{-t}$.

- Justifier que Φ est bien définie.
- Vérifier que la fonction Φ est croissante.
- Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad t \leq e^t - 1 \leq t e^t.$
- a) Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. Comparer $\Phi(x/2)$, $\Phi(x+h)$ et $\Phi(2x)$ pour tout $h \in [-x/2, x]$.
b) En déduire la valeur de $\lim_{h \rightarrow 0} h \Phi(x+h)$.

Dans la suite, on admet que la fonction Φ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.

B - La fonction Gamma

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_*^+$, on pose : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$

- En utilisant l'intégrale de Gauss $(I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi})$, donner la valeur de $\Gamma(1/2)$.
- Justifier que pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
- Dérivabilité

- a) Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. Montrer que :

$$\forall h \in [0; +\infty[, \quad h\Phi(x) \leq \Gamma(x+h) - \Gamma(x) \leq h\Phi(x+h).$$

- b) En déduire la dérivabilité de Γ sur $\mathbb{R}_*^+$ et préciser $\Gamma'(x)$.

- a) Comparer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$, en déduire qu'il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$.
b) En utilisant la question 2, donner un équivalent simple de $\Gamma(x)$ en 0^+ .
c) Préciser la convexité de Γ .
d) À l'aide des dernières questions, donner l'allure du graphe de Γ sur $]0; 2[$.

♦♦♦♦ C - La fonction Beta

Pour tous x et y réels strictement positifs, on pose : $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$

- Prouver la convergence de l'intégrale définissant $B(x, y)$.
- a) Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \forall y \in \mathbb{R}_*^+, B(x, y) = B(y, x).$

b)  Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \forall y \in \mathbb{R}_*^+, B(x+1, y) = \frac{x}{y} B(x, y+1)$.

3. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \forall y \in \mathbb{R}_*^+, \quad B(x, y+1) = B(x, y) - B(x+1, y).$$

En déduire que :

$$B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y).$$

4. Soient n un entier naturel non nul et x un réel strictement positif.

a)  À l'aide de l'inégalité de gauche de la question A-3, montrer que : $\forall t \in [0; n], \quad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$.

b)  Montrer que pour tout $t \in [0; n]$, on a $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$.

c)  En déduire que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

5.  Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$.

6. a)  Soit $y \in \mathbb{R}_*^+$. Justifier que : $B(n+1, y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{n^y}$ puis $B(x, y) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{x^y}$.

b) Soient x, y , deux réels strictement positifs.

i)  Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{B(x+n, y)}{B(x, y)} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x+k}{x+y+k} \right) \quad \text{puis} \quad \frac{B(x+n, y) n^y}{B(x, y)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}.$$

ii)  Conclure en montrant que $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

» Solution p. 23

Il n'y a pas de problème, il n'y a que des professeurs.

JACQUES PRÉVERT
Poète français (1900-1977).