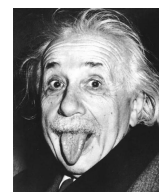


CHAPITRE 1

Révisions en analyse

Do not worry too much about your difficulties in mathematics, I can assure you that mine are still greater.

ALBERT EINSTEIN



- Les questions avec indications sont marquées par .
- Les exercices classiques à bien maîtriser sont repérés par .
- À l'inverse, les exercices « exotiques », réservés à une seconde lecture, sont repérés par .
- Le niveau de difficulté de l'exercice est repéré par les symboles $\diamond$, $\blacklozenge$, $\blacklozenge\blacklozenge$, $\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge$ (difficulté croissante).

1

Suites et séries

Exercice 1. Est-ce que les séries suivantes sont convergentes?

RA1

$$\sum \frac{1}{n^{1+1/n}}, \quad \sum \frac{\frac{\cos(1/n)^\pi}{\sin(\pi/n)} e^{\ln(n+666)-\ln(n)} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}}{7 \cdot n^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

>> Solution p. 10

Exercice 2. Soient x un nombre réel strictement positif et (u_n) la suite réelle ainsi définie :

d'après EMlyon # RA2

$$u_0 = x, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{2\sqrt{u_n}}$$

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 1$.
2.
 - a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est monotone et convergente.
 - b) Déterminer la limite de cette suite.
3. On suppose maintenant que $x \neq 1$ et on considère la série de terme général $v_n = -1 + u_n$.
 - a) Étudier la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de v_{n+1}/v_n .
 - b) Que peut-on conclure pour la série de terme général v_n ?
 - c) En déduire que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente où : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n = \prod_{k=0}^n u_k$.

>> Solution p. 10

Exercice 3. Règle de Raabe-Duhamel

d'après oral ESCP 2025 # RA10

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites strictement positives.

1. Montrer que si $(\ln(nu_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers une limite finie ou vers $+\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

2. 🐞 On suppose qu'il existe un rang n_0 à partir duquel :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \right).$$

Montrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

On suppose dans la suite que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. a) 🐞 Montrer que $\sum u_n$ diverge si $\lambda < 1$.
 b) Montrer que $\sum u_n$ converge si $\lambda > 1$.
Indication. On pourra poser $v_n = 1/n^\alpha$ pour un réel α bien choisi.
4. Application

Discuter en fonction de la valeur de $\gamma \in \mathbb{R}$ de la convergence absolue de la série de terme général

$$u_n = \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)\dots(\gamma-(n-2))(\gamma-(n-1))}{n!}.$$

>> Solution p. 11

Exercice 4. ♦ Suite de Sylvester

RA3

On définit la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation de récurrence

$$s_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad s_{n+1} = 1 + \prod_{k=0}^n s_k.$$

1. a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n(s_n - 1) + 1$ (*)
 b) Démontrer la relation de récurrence d'ordre 2 suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$s_{n+2} = s_{n+1}^2 - s_n(s_n - 1) \quad (**)$$

c) Préciser la limite de $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Python

- a) En utilisant la relation (*), écrire une fonction Python d'entête `Sylvester` d'argument n et qui renvoie le tableau unidimensionnel $[s_0 \ s_1 \ \dots \ s_n]$.
 b) Reprendre la question précédente en utilisant maintenant la relation (**).

3. Le code suivant permet de conjecturer la convergence d'une certaine série. Laquelle?

Editeur

```
n=10, indice=np.linspace(0,n,n+1)
A=sylvester(n)
B=np.zeros(n+1)
B[0]=1/A[0]
for i in range(1,n+1):
    B[i]=B[i-1]+1/A[i]

# résultat :
>>> B
array([0.5, 0.83333333, 0.97619048, 0.99944629, 0.99999969,
       1., 1., 1., 1., 1., 1.])
```

4. Prouver votre conjecture en montrant dans un premier temps que $1/(s_n - 1) - 1/(s_{n+1} - 1) = 1/s_n$.

Exercice 5. ♦♦♦ ⚙️ Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où c_n désigne le nombre de chiffres de l'entier n .

d'après oral HEC 2025 # RA47

1. Justifier la convergence de $\sum \frac{c_n}{n(n+1)}$
 2. Calculer la somme de cette série.

>> Solution p. 13

Exercice 6. ♦♦ 🎵 Pour tout réel a strictement positif et tout entier naturel n , on pose :

RA45

$$I_n(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at} (1 - e^{-t})^n dt.$$

- Justifier la convergence de l'intégrale généralisée définissant $I_n(a)$.
- Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_n(1) = 1/(n+1)$.
 - En déduire que, pour tout réel a vérifiant $a \geq 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(a) = 0$.
- Exprimer $I_{n+1}(a)$ en fonction de $I_n(a)$.
- Pour tout réel a vérifiant $a > 1$ et tout entier naturel n , on pose : $S_n(a) = \sum_{k=0}^n I_k(a)$.
 - Prouver l'égalité : $S_n(a) = \frac{1}{a-1} - \frac{n+1}{a-1} I_n(a)$.
 - Établir, pour tout réel a vérifiant $a > 1$, la convergence de la série $\sum I_k(a)$.
- Écrire une fonction Python qui prend en arguments a et n puis renvoie la valeur de $S_n(a)$.

Exercice 7. ♦ Le rêve du deuxième année

RA4

L'objectif de l'exercice est d'établir l'égalité suivante :

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-k} \quad (\bullet)$$

- Soit $h :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = -x \ln x$. Donner les variations de h . Que dire en 0^+ ?
- 🔑 Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence d'une fonction continue R_n telle que

$$\forall u \in \mathbb{R}^+, \quad e^u = \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} + R_n(u) \quad \text{et} \quad 0 \leq R_n(u) \leq \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} e^u.$$

- Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $J_k = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^k du$.
 - Justifier l'existence de J_k .
 - 🔑 Calculer J_k .
 - En déduire l'existence et le calcul de $I_k = \int_0^1 x^k (\ln x)^k dx$.
On pourra effectuer le changement de variable $u = -(k+1) \ln x$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} I_k + r_n$ avec $0 \leq r_n \leq \frac{e^{1/e}}{(n+1)! e^{n+1}}$.
 - En déduire l'égalité $(\bullet)$.

>> Solution p. 15

Exercice 8. ♦♦ 🎵 Soient $n \in \mathbb{N}$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

RA46

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x}.$$

- Écrire un programme Python qui prend en arguments n et x puis calcule « de manière économique » $f_n(x)$.
- Préciser f'_n , retrouver la valeur de $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a : $f_n(x) = \int_x^{+\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt$.
- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x} f_{n-k}(x) = f_n(2x)$.
- Vérifier que, pour tous $x \in \mathbb{R}_*^+$, $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} f_n(t) dt$ est convergente et vaut $\sum_{k=0}^n f_k(x)$.
- A-t-on l'égalité

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt \right) ?$$

Exercice 9. ♦♦

adapté de l'écrit EDHEC 93 # RA5

Pour tout entier naturel non nul n , on note

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

On introduit aussi les fonctions f_n et g_n définies sur $] -1; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{n!}{(x+1) \cdots (x+n)} = \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (x+k)}.$$

Enfin, on introduit les intégrales :

$$I_n = \int_0^1 g_n(x) dx, \quad U_n = \int_0^{1/\sqrt{H_n}} g_n(x) dx \quad \text{et} \quad V_n = \int_{1/\sqrt{H_n}}^1 g_n(x) dx.$$

Partie I

1. a) La suite de terme général H_n est-elle convergente? La suite de terme général S_n est-elle convergente?
- b) Pour tout nombre réel positif ou nul x , prouver les inégalités :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \quad (\bullet)$$

- c) En appliquant la double inégalité précédente à $x = \frac{1}{k}$ montrer que $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$.
2. a) Exprimer $g_n(x)$ à l'aide de $f_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- b) En déduire, à l'aide de la double inégalité $(\bullet)$, les inégalités :

$$\int_0^{1/\sqrt{H_n}} e^{-xH_n} dx \leq U_n \leq e^{\frac{S_n}{2H_n}} \int_0^{1/\sqrt{H_n}} e^{-xH_n} dx.$$

- c) En conclure que $U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{H_n}$.
- d) Montrer de façon analogue les inégalités : $0 \leq V_n \leq e^{-\sqrt{H_n}} e^{\frac{S_n}{2H_n}}$
- e) Démontrer que $V_n = o\left(\frac{1}{H_n}\right)$ quand n tend vers l'infini.
3. À l'aide des questions précédentes, établir que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln n}$.

Partie II

4. On considère la famille de polynômes $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ définie par :

$$\forall k \in [1; n], \quad e_k(x) = (x+1)(x+2) \cdots (x+k-1)(x+k+1) \cdots (x+n) = \prod_{\substack{i \neq k \\ 1 \leq i \leq n}} (x+i).$$

- a) Montrer que cette famille est libre. En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
- b) En déduire l'existence de coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad n! = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i(x).$$

- c) Calculer λ_k en fonction de n et du coefficient binomial $\binom{n-1}{k-1}$.
5. En déduire la formule :

$$I_n = n \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k-1} (\ln(k+1) - \ln(k)).$$

6. Utiliser cette égalité et l'équivalent de I_n obtenu dans la partie I pour justifier l'équivalent :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \ln(k+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln n}.$$

Exercice 10. ♦♦♦ Calcul de $\zeta(2)$

RA9

On pose, pour tout entier naturel n , $C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n} dx$ et $D_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (\cos x)^{2n} dx$.

- Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $C_n = (2n-1)(C_{n-1} - C_n)$.
On pourra écrire $\cos^2 x = \cos x \cos^{2n-1} x$.
- Établir, pour tout entier naturel n non nul, les égalités : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 (\cos x)^{2n-2} dx = \frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}$.
- Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $C_n = (2n-1)nD_{n-1} - 2n^2D_n$.
- En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\frac{1}{n^2} = 2\left(\frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \frac{D_n}{C_n}\right)$.
- a) Justifier, pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la minoration : $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$.
b) En déduire, pour tout entier naturel n , la majoration : $D_n \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{C_n}{2n+2}$.
- Prouver l'égalité : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

» Solution p. 19

Exercice 11. ♦♦

d'après Ecricome # RA6

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0, \frac{\pi}{4}]$ par : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ ainsi que la suite réelle $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivante :

$$I_0 = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x)]^n dx.$$

A - Étude de la bijection réciproque de f

- Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.
- Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1} .
- Justifier que :

$$\forall x \in J, \quad \cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}.$$

- Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et : $\forall x \in J \setminus \{1\}, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.
- En déduire le développement limité en $\sqrt{2}$ de f^{-1} à l'ordre 1.

B - Étude de la suite d'intégrales

- Justifier que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie. Calculer I_2 .
- Déterminer les réels a et b , tels que : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$.
- En posant $t = \sin x$, déterminer I_1 .
- Déterminer le sens de variation de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}, \quad I_n \geq \int_{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)^n} dx \geq \frac{1}{n^2} \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2})^n}$.
b) En déduire le comportement de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_n$.

» Solution p. 20

Exercice 12. ♦♦♦ Dans la suite, α désigne un nombre réel fixé supérieur ou égal à 1, et on pose :

d'après EDHEC # RA7

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^n dt.$$

- Montrer que l'intégrale I est absolument convergente.
- a) Calculer I_0 .

- b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que si I_{n-1} est convergente, il en est de même de I_n , et trouver une relation entre I_n et I_{n-1} .
- c) En déduire la convergence de I_n et la valeur de I_n en fonction de n et α .
3. a) Rappeler les formules de Taylor-Young et Taylor avec reste intégral. Préciser bien les hypothèses.
En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction sinus sur l'intervalle $[0, x]$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

- b) En déduire que :

$$\left| I - \left(I_0 - \frac{I_2}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{I_{2n}}{(2n+1)!} \right) \right| \leq K I_{2n+1},$$

K étant un nombre réel que l'on précisera en fonction de n .

- c) En déduire : $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\alpha^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\alpha^{2n+1}} \right)$.
4. a) Rappeler la définition de la fonction arctangente, préciser son graphe ainsi que l'équation de la tangente en 0. Enfin, vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

- b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [0, 1], \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$
- c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0, 1], \quad \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan(x) \right| \leq \frac{1}{2n+3}.$
- d) En déduire une expression très simple de I en fonction de α utilisant la fonction arctangente.

>> Solution p. 22

Exercice 13. ♦♦ Exemple d'intégrales à paramètres : lien entre les fonctions Beta et Gamma

RA8

A - Préliminaires

Soit Φ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \Phi(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt.$

Pour tout réel $x > 0$ fixé, on note $\varphi_x : t \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \ln(t) t^{x-1} e^{-t}$.

- Justifier que Φ est bien définie.
- Vérifier que la fonction Φ est croissante.
- Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad t \leq e^t - 1 \leq t e^t.$
- a) Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. Comparer $\Phi(x/2)$, $\Phi(x+h)$ et $\Phi(2x)$ pour tout $h \in [-x/2, x]$.
b) En déduire la valeur de $\lim_{h \rightarrow 0} h \Phi(x+h)$.

Dans la suite, on admet que la fonction Φ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.

B - La fonction Gamma

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_*^+$, on pose : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$

- En utilisant l'intégrale de Gauss $(I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi})$, donner la valeur de $\Gamma(1/2)$.
- Justifier que pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
- Dérivabilité

- a) Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. Montrer que :

$$\forall h \in [0; +\infty[, \quad h\Phi(x) \leq \Gamma(x+h) - \Gamma(x) \leq h\Phi(x+h).$$

- b) En déduire la dérivabilité de Γ sur $\mathbb{R}_*^+$ et préciser $\Gamma'(x)$.

- a) Comparer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$, en déduire qu'il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$.
b) En utilisant la question 2, donner un équivalent simple de $\Gamma(x)$ en 0^+ .
c) Préciser la convexité de Γ .
d) À l'aide des dernières questions, donner l'allure du graphe de Γ sur $]0; 2[$.

♦♦♦♦ C - La fonction Beta

Pour tous x et y réels strictement positifs, on pose : $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$

- Prouver la convergence de l'intégrale définissant $B(x, y)$.
- a) Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \forall y \in \mathbb{R}_*^+, B(x, y) = B(y, x).$

b)  Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \forall y \in \mathbb{R}_*^+, B(x+1, y) = \frac{x}{y} B(x, y+1)$.

3. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \forall y \in \mathbb{R}_*^+, \quad B(x, y+1) = B(x, y) - B(x+1, y).$$

En déduire que :

$$B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y).$$

4. Soient n un entier naturel non nul et x un réel strictement positif.

a)  À l'aide de l'inégalité de gauche de la question A-3, montrer que : $\forall t \in [0; n], \quad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$.

b)  Montrer que pour tout $t \in [0; n]$, on a $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$.

c)  En déduire que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

5.  Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$.

6. a)  Soit $y \in \mathbb{R}_*^+$. Justifier que : $B(n+1, y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{n^y}$ puis $B(x, y) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{x^y}$.

b) Soient x, y , deux réels strictement positifs.

i)  Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{B(x+n, y)}{B(x, y)} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x+k}{x+y+k} \right) \quad \text{puis} \quad \frac{B(x+n, y) n^y}{B(x, y)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}.$$

ii)  Conclure en montrant que $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

» Solution p. 23

Il n'y a pas de problème, il n'y a que des professeurs.

JACQUES PRÉVERT
Poète français (1900-1977).



Indications et solutions



Indication de l'exercice 1

p. 1

Pour la seconde série, déterminer un équivalent simple de chacun des facteurs pour appliquer le critère d'équivalence des séries à termes positifs.

Indication de l'exercice 2

p. 1

2.b) Soit ℓ , la limite. Passer à la limite dans la relation de récurrence pour obtenir une équation vérifiée par ℓ . Étudier ensuite la fonction :

$$f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto 2x\sqrt{x} - 1 - x$$

pour trouver l'unique réel ℓ tel que $f(\ell) = 0$.

3.a) Vérifier que

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\sqrt{u_n} - 1}{2\sqrt{u_n}(1 + \sqrt{u_n})}.$$

En déduire la limite du quotient.

3.b) Déduire de la limite précédente qu'il existe un entier N_0 tel que pour tout entier $n \geq N_0$,

$$0 \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2} v_n.$$

Conclure en comparant la suite $(v_n)_n$ à la suite géométrique $(1/2^n)_n$.

3.c) Considérer $\ln(P_n)$.

Indication de l'exercice 3

p. 1

On rappelle que pour deux suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ telles que

$$a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} b_n,$$

si $b_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors a_n est positif à partir d'un certain rang.

2. Justifier que pour $n \geq n_0$

$$u_n \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n.$$

3.a) À l'aide d'un équivalent, justifier que la suite $(\ln(nu_n))_n$ est croissante à partir d'un certain rang pour pouvoir appliquer la question 1.

Indication de l'exercice 7

p. 3

2. C'est une réécriture de la formule de Taylor-Lagrange.

3.b) Établir une relation entre J_k et J_{k-1} à l'aide d'une intégration par parties.

Indication de l'exercice 9

p. 4

1.a) Pour l'inégalité de droite, on peut penser à un argument de concavité. Pour l'inégalité de gauche, étudier la fonction

$$\varphi : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right).$$

2.a) Vérifier que $g_n = e^{-f_n}$.

4.a) Faire un test de liberté $\sum_{k=1}^n \mu_k e_k = 0$ et évaluer cette relation aux points $-1, -2, \dots, -n$.

4.c) Évaluer la relation précédente en $-k$ pour obtenir $\lambda_k = n(-1)^{k+1} \binom{n-1}{k-1}$.

Indication de l'exercice 11

p. 5

A.3. Pour $x \in J$, que dire de $f \circ f^{-1}(x)$?

Pour la seconde relation, on rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1.$$

A.4. Rappelons le théorème de dérivation de l'application réciproque.

Soient $f : I \rightarrow J$, $a \in I$ et $b = f(a)$.

→ f est bijective et

Si

→ f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$,

alors f^{-1} est dérivable en b avec

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

A.5. Pour une fonction g dérivable dans un voisinage de a , on dispose du DL à l'ordre 1 :

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + o_a(x-a).$$

B.1. Justifier que la fonction tangente est dérivable sur $[0; \pi/4]$ et

$$\tan' = \frac{1}{\cos^2}.$$

B.3. Effectuer un changement de variable

$$t = \sin(x), \quad dt = \cos(x) dx.$$

Ne pas oublier

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

pour pouvoir se ramener à la question précédente.

B.4. Vérifier que

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/4} f(x)^n (f(x) - 1) dx.$$

Puis étudier le signe de l'intégrande.

B.5.a) Poser $a_n = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}$ et justifier ensuite les inégalités

$$\int_0^{\pi/4} f(x)^n dx \geq \int_{a_n}^{\pi/4} f(x)^n dx \geq \int_{a_n}^{\pi/4} f(a_n)^n dx.$$

B.5.b) Justifier l'existence de $q \in]0; 1[$ tel que

$$I_n \geq \frac{1}{n^2 q^n}.$$

En déduire la limite.

B.6. Procéder par intégration par parties. Justifier de plus que :

$$\tan(x) f'(x) f(x)^{n-1} = f(x)^{n+2} - f(x)^n.$$

Indication de l'exercice 12

p. 6

1. Pour l'étude en $+\infty$, partir de l'inégalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad |\sin(t)| \leq t.$$

2.b) Intégrer par parties pour obtenir

$$I_n = \frac{n}{\alpha} I_{n-1}.$$

2.c) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

3.a) On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sin^{(2n)} = (-1)^n \sin \quad \text{et} \quad \sin^{(2n+1)} = (-1)^n \cos.$$

4.b) Reconnaître une somme géométrique.

Indication de l'exercice 13

p. 6

A.1. C'est une intégrale généralisée en 0 et $+\infty$. Pour tout $x > 0$, montrer que $\varphi_x(t)$ est :

- négligeable devant $1/t^2$ lorsque t tend vers $+\infty$,
- négligeable devant $t^{x/2-1}$ lorsque t tend vers 0^+ .

A.3. Pour l'inégalité de gauche, penser à un argument de convexité. Pour celle de droite, étudier la fonction $g : t \in \mathbb{R} \mapsto te^t - (e^t - 1)$.

B.1. Effectuer un changement de variable $u = \sqrt{t}$.

B.2. Faire une intégration par parties.

B.3.b) Revenir à la définition du nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement.
On trouve $\Gamma'(x) = \Phi(x)$.

B.4.b) Justifier que $\Gamma(x) \sim 1/x$ à l'aide de la question B.2.

C.1. Faire une comparaison avec des intégrales de Riemann.

C.2.a) Faire un changement de variable $u = 1 - t$.

C.2.b) Procéder par une intégration par parties.

C.4.a) Remplacer t par $-t/n$.

C.4.b) Que dire si $t \in [\sqrt{n}; n]$?

Étudier dans un second temps la fonction définie sur $[0, \sqrt{n}]$ par :

$$f : t \mapsto n \ln \left(1 - \frac{t}{n} \right) + t - \ln \left(1 - \frac{t^2}{n} \right).$$

C.4.c) Partir de l'encadrement

$$\left(1 - \frac{t^2}{n} \right) e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \leq e^{-t}$$

et de la limite

$$\int_0^n e^{-t} t^{x-1} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(x).$$

C.5. Justifier que

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n t^{x-1} dt = n^x B(n+1, x)$$

puis que

$$B(n+1, y) = \frac{n}{n+y} B(n, y) = \left(\prod_{k=1}^n \frac{k}{(k+y)} \right) B(1, y) \quad (\bullet)$$

C.6.a) Pour la première équivalence, utiliser la relation précédente $(\bullet)$.

Pour la seconde équivalence, utiliser le fait que la fonction

$$u \mapsto B(u, y)$$

est décroissante, pour écrire

$$B(n, y) \geq B(x, y) \geq B(n+1, y)$$

où $n = \lfloor x \rfloor$.

C.6.b)i) Pour la première égalité, ne pas oublier la question C.3.

Pour l'équivalent, utiliser la question C.5.

C.6.b)ii) Utiliser

$$B(x, y) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{x^y}$$

qui permet aussi d'avoir un équivalent simple de $B(x+n, y)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Puis utiliser aussi

$$\frac{B(x+n, y) n^y}{B(x, y)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}.$$

Exercice 1

p. 1

RA1

• *Remarque.* On évitera les raisonnements faux tels que :

$$\rightarrow 1 + 1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \text{ donc}$$

$$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \sim \frac{1}{n}$$

Il y a donc divergence par le critère d'équivalence.

→ Comme $\alpha = 1 + 1/n > 1$, par les séries de Riemann, la série converge. Ici le raisonnement est faux car α ne peut dépendre de n .

Le bon réflexe est d'exprimer le terme général sous forme

exponentielle.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot \exp(-\ln(n)/n)$$

Par les croissances comparées $\ln(n)/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, puis par continuité de l'exponentielle en 0

$$\exp(-\ln(n)/n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

On en déduit l'équivalent

$$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \sim \frac{1}{n}.$$

Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum 1/n^{1+\frac{1}{n}}$ est divergente car la série harmonique l'est.

- Par continuité de la fonction cosinus

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \cos(0) = 1.$$

Par équivalent usuel, $\pi/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n}$$

De plus,

$$e^{\ln(n+666)-\ln(n)} = e^{\ln(1+\frac{666}{n})} = 1 + \frac{666}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Or par équivalent usuel, on a aussi

$$2n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2n \cdot \left(-\frac{1}{n}\right) = -2.$$

Puis par continuité de la fonction exponentielle

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} = \exp\left(2n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-2}.$$

Par produit, le terme général est alors équivalent à

$$\frac{e^{-2}}{7\pi} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série de l'énoncé et la série $\sum 1/n^{\alpha-1}$ sont de même nature. Par les séries de Riemann, il y a convergence si et seulement si $\alpha - 1 > 1$, soit $\alpha > 2$.

Exercice 2

p. 1

RA2

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} u_n - 1 &= \frac{1 + u_{n-1}}{2\sqrt{u_{n-1}}} - 1 = \frac{1 - 2\sqrt{u_{n-1}} + u_{n-1}}{2\sqrt{u_{n-1}}} \\ &= \frac{(1 - \sqrt{u_{n-1}})^2}{2\sqrt{u_{n-1}}} \geq 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

- 2.a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1 + u_n}{2\sqrt{u_n}} - u_n = \frac{1 + u_n(1 - 2\sqrt{u_n})}{2\sqrt{u_n}}.$$

Or $1 - 2\sqrt{u_n} \leq 1 - 2\sqrt{1} \leq -1$ et

$$1 + u_n(1 - 2\sqrt{u_n}) \leq 1 - u_n \leq 0.$$

On en déduit que $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. Elle est aussi minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, la suite est convergente.

- 2.b) Soit ℓ , la limite. Comme

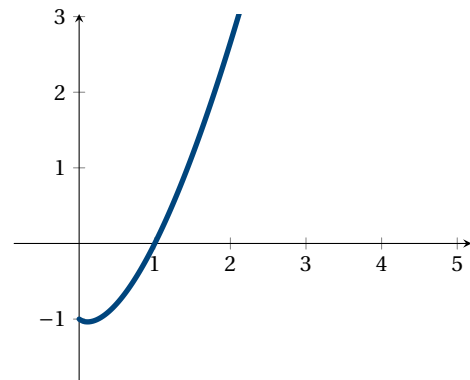
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{2\sqrt{u_n}},$$

on a par passage à la limite

$$\ell = \frac{1 + \ell}{2\sqrt{\ell}}.$$

Soit $2\sqrt{\ell} \cdot \ell = 1 + \ell$, puis $2\sqrt{\ell} \cdot \ell - 1 - \ell = 0$.

L'étude de la fonction continue $x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto 2\sqrt{x} \cdot x - 1 - x$ donne une unique solution positive (théorème de la bijection sur $[1; +\infty[$).



On constate que $\ell = 1$ est une solution « évidente ». Finalement

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

- 3.a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}} - 1}{u_n - 1} = \frac{(\sqrt{u_n} - 1)^2}{2\sqrt{u_n}(u_n - 1)} = \frac{\sqrt{u_n} - 1}{2\sqrt{u_n}(\sqrt{u_n} + 1)}.$$

Comme $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, on a maintenant

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- 3.b) En revenant à la définition de la limite d'une suite, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_0 \Rightarrow \left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

D'où pour $n \geq N_0$

$$0 \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2} v_n$$

Par récurrence, il vient :

$$0 \leq v_n \leq \frac{1}{2^{n-N_0}} \cdot v_{N_0}.$$

Autrement dit, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \geq N_0, \quad 0 \leq v_n \leq \frac{c}{2^n}.$$

La série géométrique $\sum 1/2^n$ est convergente $1/2 \in]-1; 1[$.
Par le critère de comparaison, $\sum v_n$ converge.

3.c) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\ln(P_n) = \sum_{k=0}^n \ln(u_k)$$

$$\text{Or } \ln(u_n) = \ln(1 + v_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n \quad \text{car } v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs (question 1, $v_n \geq 0$), la série $\sum \ln(u_n)$ converge. Par définition, la suite des sommes partielles de la série (c'est-à-dire la suite $(\ln(P_n))_n$) converge vers une limite finie. Enfin, par continuité de l'exponentielle, la suite $(P_n)_n$ converge.

Exercice 3

p. 1

RA10

Cet exercice propose d'affiner le cas particulier du critère de D'Alembert (hors-programme en ECG mais la démonstration est instructive).

1. • Rédaction 1. Dans les deux cas, la suite est minorée. Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(nu_n) \geq c,$$

$$\text{d'où } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq \frac{e^c}{n}.$$

Comme la série harmonique $\sum 1/n$ est divergente, la série $\sum u_n$ l'est aussi par le critère de comparaison.

• Rédaction 2.

On se place dans le cas d'une limite finie, le second cas étant similaire.

On pose ℓ , la limite de $(\ln(nu_n))$. Par continuité de la fonction exponentielle en ℓ

$$\ln(nu_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \ell \quad \text{puis} \quad nu_n = e^{\ln(nu_n)} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} e^\ell.$$

Comme $e^\ell \neq 0$, on obtient

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^\ell}{n}.$$

Par les critères de Riemann et d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

2. Posons $c_0 = u_{n_0}/v_{n_0}$. Pour tout entier $n \geq n_0$, on dispose des produits télescopiques

$$\frac{u_n}{u_{n_0}} = \prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{v_n}{v_{n_0}}.$$

Puis

$$0 \leq u_n \leq c_0 v_n.$$

Remarque. On aurait aussi pu établir cette inégalité par récurrence.

On conclut par le critère de majoration sachant que la série $\sum v_n$ converge.

3.a) On a

$$\begin{aligned} & \ln((n+1)u_{n+1}) - \ln(nu_n) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n} \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1-\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Pour $\lambda \neq 1$, on obtient

$$\ln((n+1)u_{n+1}) - \ln(nu_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1-\lambda}{n}.$$

En particulier, pour $\lambda < 1$, on en déduit qu'à partir d'un certain rang n_0

$$\ln((n+1)u_{n+1}) - \ln(nu_n) > 0.$$

La suite $(\ln(nu_n))_{n \geq n_0}$ est dès lors croissante. Par le théorème de convergence monotone $(\ln(nu_n))$ tend vers une limite finie ou vers une limite infinie. En reprenant la première question, on en déduit la divergence de la série $\sum u_n$.

• Remarque. Par le critère d'équivalence des séries à termes de signe constant, les séries

$$\sum \ln((n+1)u_{n+1}) - \ln(nu_n) \quad \text{et} \quad \sum \frac{1-\lambda}{n}$$

sont de même nature (donc ici divergente). Plus précisément, les termes sont positifs et donc les suites des sommes partielles tendent vers $+\infty$. Comme les sommes partielles se simplifient par télescopage, on peut donc même être plus précis : la suite $(\ln(nu_n))_{n \geq n_0}$ tend vers $+\infty$.

3.b) On a déjà vu que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donnons un développement similaire avec v_n .

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^{-\alpha}}{n^{-\alpha}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Par différence :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\alpha - \lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi pour $\alpha \neq \lambda$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\alpha - \lambda}{n}.$$

Si $\alpha < \lambda$, on constate qu'à partir d'un certain rang n_0

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

De plus si on choisit $\alpha > 1$ (c'est possible car $\lambda > 1$, par exemple $\alpha = (1 + \lambda)/2$), on a aussi la convergence de la série $\sum v_n$. On conclut alors avec la question 2 sur la convergence de la série $\sum u_n$.

4. Cette question n'était pas présente dans le sujet original de l'ESCP

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (\gamma - i)}{n!}.$$

Pour $n \geq \gamma$, on en déduit par télescopage

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \left| \frac{\prod_{i=0}^n (\gamma - i)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\prod_{i=0}^{n-1} (\gamma - i)} \right| = \frac{|\gamma - n|}{n+1} = \frac{n - \gamma}{n+1} \\ &= \frac{(n+1) - (\gamma + 1)}{n+1} = 1 - \frac{\gamma + 1}{n+1} = 1 - \frac{1 + \gamma}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

D'après le critère démontré à la question précédente appliquée à la suite $(|u_n|)_n$, il y a divergence pour $1 + \gamma < 1$ et convergence pour $1 + \gamma > 1$. De plus pour $\gamma = 1$, la suite est nulle à partir du rang 1 et la série associée est donc directement convergente. En résumé, il y a convergence absolue si et seulement si $\gamma \geq 0$.

Exercice 4

p. 2

RA3

1.a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$s_{n+1} - 1 = \prod_{k=0}^n s_k = s_n \prod_{k=0}^{n-1} s_k = s_n (s_n - 1).$$

D'où le résultat.

1.b)

$$\begin{aligned} s_{n+2} &= s_{n+1} (s_{n+1} - 1) + 1 \quad \text{d'après * au rang } n+1 \\ &= s_{n+1}^2 - s_{n+1} + 1 \\ s_{n+2} &= s_{n+1}^2 - s_n (s_n - 1). \end{aligned}$$

1.c) La suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive (réurrence immédiate à partir de la définition). Dès lors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$s_n = s_{(n-1)+1} = 1 + \prod_{k=0}^{n-1} s_k \geq 1$$

(relation valable pour $n = 0$). Puis

$$s_n = 1 + \prod_{k=0}^{n-1} s_k \geq 1 + \prod_{k=0}^{n-1} 1 \geq 2.$$

Et de nouveau

$$s_n = 1 + \prod_{k=0}^{n-1} s_k \geq 1 + \prod_{k=0}^{n-1} 2 \geq 1 + 2^n.$$

Par minoration

$$s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

2.a)

```
def sylvestre(n):
    S=np.zeros(n+1)
    S[0]=2
    for i in range(n):
        S[i+1]=S[i]*(S[i]-1)+1
    return S

# test
>>> sylvestre(4)
array([ 2.,  3.,  7., 43., 1807.])
```

2.b)

```
def sylvestre2(n):
    if n==0:
        return np.array([2])
    S=np.zeros(n+1)
    S[0]=2
    S[1]=3
    for i in range(n-1):
        S[i+2]=S[i+1]**2-S[i]*(S[i]-1)
    return S

# test
>>> sylvestre2(4)
array([ 2.,  3.,  7., 43., 1807.])
```

3.a) Si on note C_n la somme partielle de la série $\sum 1/s_n$

$$C_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{s_k}$$

alors le code nous renvoie le tableau unidimensionnel

$$[C_0 \quad C_1 \quad \dots \quad C_{10}].$$

On constate une convergence très rapide vers 1.

Il n'y a pas égalité avec 1 avec les erreurs d'arrondis. Noter aussi qu'on aurait pu directement calculer B via la ligne

$$B = \text{np.cumsum}(1/\text{sylvestre}(n))$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_n - 1} - \frac{1}{s_{n+1} - 1} &= \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n (s_n - 1)} \\ &= \frac{1}{s_{n-1}} \left(1 - \frac{1}{s_n} \right) \\ &= \frac{1}{s_{n-1}} \left(\frac{s_n - 1}{s_n} \right) = \frac{1}{s_n}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{1}{s_n} &= \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_{n+1} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{s_0 - 1} - \frac{1}{s_{N+1} - 1} = 1 - \frac{1}{s_{N+1} - 1}. \end{aligned}$$

Or la suite $(s_n)_n$ tend vers l'infini, $\sum_{n=0}^N \frac{1}{s_n}$ tend vers 1 lorsque $N \rightarrow +\infty$. On en déduit la convergence de la série $\sum 1/s_n$ et l'égalité

$$1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{s_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{1807} + \dots$$

La suite de Sylvester permet de décomposer en fraction égyptienne. L'égalité

$$1 = \sum_{n=0}^N \frac{1}{s_n} + \frac{1}{s_{N+1} - 1}$$

donne pour les valeurs de $N \in \{1, 2, 3\}$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}, \quad 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42}, \quad 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{1806}$$

Exercice 5

p. 2

RA47

1. Le plus petit nombre contenant c chiffres est 10^{c-1} . D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 10^{c_n-1} \leq n$$

puis $\ln(10^{c_n-1}) = (c_n - 1) \ln(10) \leq \ln(n)$

et $c_n \leq 1 + \frac{\ln(n)}{\ln(10)}$

On en déduit l'encadrement du terme général

$$0 \leq \frac{c_n}{n(n+1)} \leq \frac{1 + \ln(n)/\ln(10)}{n(n+1)}.$$

Par les croissances comparées (et par encadrement), on obtient

$$\frac{c_n}{n(n+1)} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

La série de Riemann $\sum 1/n^{3/2}$ est à termes positifs et convergente. Par le critère de négligeabilité, la série $\sum c_n/(n(n+1))$ converge.

2. Posons pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p = 10^p - 1$ de sorte que tous les entiers entre $a_p + 1$ et a_{p+1} contiennent exactement $p + 1$ chiffres. Posons aussi

$$S_p = \sum_{n=1}^{a_p} \frac{c_n}{n(n+1)}.$$

Comme la série est convergente, on a une suite extraite convergente vers la même limite

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} S_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n(n+1)}.$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} S_{k+1} - S_k &= \sum_{n=a_k+1}^{a_{k+1}} \frac{c_n}{n(n+1)} = \sum_{n=a_k+1}^{a_{k+1}} \frac{(k+1)}{n(n+1)} \\ &= (k+1) \sum_{n=a_k+1}^{a_{k+1}} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= (k+1) \sum_{n=a_k+1}^{a_{k+1}} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= (k+1) \left(\frac{1}{a_k+1} - \frac{1}{a_{k+1}+1} \right) && \text{télésopage} \\ &= (k+1) \left(\frac{1}{10^k} - \frac{1}{10^{k+1}} \right) \\ S_{k+1} - S_k &= \frac{9(k+1)}{10^{k+1}} \end{aligned}$$

puis pour $p \in \mathbb{N}$, par télescopage une nouvelle fois et à l'aide des résultats sur les séries géométriques dérivées

$$\begin{aligned} S_p &= S_0 + \sum_{k=0}^{p-1} S_{k+1} - S_k = S_0 + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{9(k+1)}{10^{k+1}} \\ &= 0 + \frac{9}{10} \sum_{i=1}^p i q^{i-1} \quad \text{où } q = 1/10 \\ &\xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \frac{9}{10} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{10}\right)^2} = \frac{10}{9}. \end{aligned}$$

En conclusion

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n(n+1)} = \frac{10}{9} = 1.111\dots$$

Il est possible de tester à l'aide d'un court programme Python qui calcule une somme partielle de la série à un ordre assez grand.

```
s=0
for n in range(1,10000):
    c=len(str(n)) # renvoie cn
    # car cela convertit n en chaîne de
    # caractères
    # puis compte le nombre de caractères
    # (hors-programme)
    s+=c/(n*(n+1))
print(s)

>>>
1.1106000000000007
```

Exercice 6

p. 3

RA45

1. L'intégrande est continue sur $[0; +\infty[$. On a une intégrale généralisée en $+\infty$. Or, au voisinage de $+\infty$, on a

$$e^{-at} (1 - e^{-t})^n \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-at}.$$

Comme $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ converge, par le critère d'équivalence des intégrales des fonctions positives, $I_n(a)$ converge.

- 2.a) Posons, pour $A > 0$,

$$J_n(A) = \int_0^A e^{-t} (1 - e^{-t})^n dt.$$

On a une primitive explicite, d'où

$$J_n(A) = \left[\frac{1}{n+1} (1 - e^{-t})^{n+1} \right]_0^A = \frac{1}{n+1} (1 - e^{-A})^{n+1}.$$

À la limite $I_n(1) = \lim_{A \rightarrow +\infty} J_n(A) = \frac{1}{n+1}.$

- 2.b) Pour tout réel $a \geq 1$, on a pour $t \geq 0$, $at \geq t$ donc $e^{-at} \leq e^{-t}$. Il en résulte que $0 \leq I_n(a) \leq I_n(1)$. Comme $I_n(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, par le théorème d'encadrement, $I_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

3. Posons $J_n(a, A) = \int_0^A e^{-at} (1 - e^{-t})^n dt$. Ainsi

$$\begin{aligned} J_n(a, A) - J_{n+1}(a, A) &= \int_0^A \left[e^{-at} (1 - e^{-t})^n - e^{-at} (1 - e^{-t})^{n+1} \right] dt \\ &= \int_0^A e^{-at} (1 - e^{-t})^n [1 - (1 - e^{-t})] dt \\ &= \int_0^A e^{-at} (1 - e^{-t})^n e^{-t} dt. \end{aligned}$$

On effectue une intégration par parties avec les fonctions, de classe $\mathcal{C}^1$, u et v définies par

$$u(t) = \frac{1}{n+1} (1 - e^{-t})^{n+1}, \quad u'(t) = e^{-t} (1 - e^{-t})^n$$

$$v(t) = e^{-at}, \quad v'(t) = -ae^{-at}.$$

$$J_n(a, A) - J_{n+1}(a, A) =$$

$$\left[\frac{1}{n+1} e^{-at} (1 - e^{-t})^{n+1} \right]_0^A + \frac{a}{n+1} \int_0^A e^{-at} (1 - e^{-t})^{n+1} dt.$$

En passant à la limite quand A tend vers $+\infty$, on obtient :

$$I_n(a) - I_{n+1}(a) = 0 + \frac{a}{n+1} I_{n+1}(a).$$

Et en réorganisant les termes

$$I_{n+1}(a) = \frac{n+1}{n+1+a} I_n(a).$$

4.a) Procéder par récurrence. C'est relativement clair pour l'initialisation, pour l'hérédité :

$$S_{n+1}(a) = S_n(a) + I_{n+1}(a) = \frac{1}{a-1} - \frac{n+1}{a-1} I_n(a) + I_{n+1}(a).$$

Or $I_n(a) = \frac{n+1+a}{n+1} I_{n+1}(a)$, donc

$$\begin{aligned} S_{n+1}(a) &= \frac{1}{a-1} - \frac{n+1+a}{a-1} I_{n+1}(a) + \frac{a-1}{a-1} I_{n+1}(a) \\ &= \frac{1}{a-1} - \frac{n+1+a-a+1}{a-1} I_{n+1}(a) \\ &= \frac{1}{a-1} - \frac{n+2}{a-1} I_{n+1}(a). \end{aligned}$$

4.b) Comme tous les termes de la somme $S_n(a)$ sont positifs, la suite de terme général $S_n(a)$ est croissante. Elle est majorée par $\frac{1}{a-1}$ d'après la question précédente, donc la suite est bien convergente. La série converge.

5. On découpe le programme en deux parties. La première calcule $I_n(a)$ à l'aide de la relation de récurrence de la question 3. La seconde applique la formule de la question 4.a). On obtient par exemple :

```
def calculIn(a,n):
    I= 1/a # valeur de I0
    for k in range(0,n):
        I=(k+1)/(k+1+a)*I
    return I
```

```
def calculSn(a,n):
    I=calculIn(n,a)
    return (1-(n+1)*I)/(a-1)
```

Exercice 7

p. 3

RA4

1. La fonction h est dérivable sur $]0; 1]$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0; 1]$. Pour tout $x \in]0; 1]$,

$$h'(x) = -\ln(x) - 1.$$

De plus

$$h'(x) \geq 0 \iff \ln(x) \leq -1 \iff x \leq \frac{1}{e}.$$

On en déduit que h est croissante sur $]0; 1/e]$ et décroissante sur $[1/e, 1]$. Précisons que $\lim_{0^+} h(x) = 0$ et $h(1) = 0$. La fonction h est donc prolongeable par continuité en 0^+ .

On notera $\tilde{h}$ ce prolongement avec

$$\tilde{h}(0) = 0.$$

Notons que $\tilde{h}$ a un maximum donné par $\tilde{h}(1/e) = 1/e$.

2. D'après la formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle (de classe $\mathcal{C}^{n+1}$) entre 0 et u :

$$\left| e^u - \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} (u-0)^k \right| \leq \max_{t \in I_u} \frac{|\exp^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!} (u-0)^{n+1}$$

où I_u est le segment dont les extrémités sont 0 et u .

On simplifie sachant que pour tout entier naturel k , $\exp^{(k)} = \exp$ et par croissance de l'exponentielle

$$\max_{t \in I_u} |\exp^{(n+1)}(t)| \leq \max_{t \in [0; u]} |\exp(t)| = e^u.$$

On obtient ainsi le résultat en posant R_n par

$$\forall u \in \mathbb{R}^+, \quad R_n(u) = e^u - \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!}.$$

La fonction R_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ par différence de fonctions continues.

3.a) L'intégrande $u \mapsto e^{-u} u^k$ est continue sur $[0; +\infty[$, on a donc une intégrale généralisée en $+\infty$. De plus, par les croissances comparées :

$$e^{-u} u^k = o_{+\infty} \left(\frac{1}{u^2} \right) \quad \left(\text{et } \frac{1}{u^2} \geq 0 \right).$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} 1/u^2 du$ est une intégrale de Riemann convergente. Par le critère de négligéabilité, J_k converge.

3.b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour $A \in \mathbb{R}_*^+$, on pose

$$J_{k,A} = \int_0^A e^{-u} u^k du.$$

Par intégration par parties (les fonctions sont $\mathcal{C}^1$)

$$J_{k,A} = \left[-e^{-u} u^k \right]_0^A + \int_0^A e^{-u} k \cdot u^{k-1} du.$$

Par passage à la limite, on constate que $J_k = kJ_{k-1}$. Précisons que $J_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (on intègre une fonction positive, continue et non nulle). Par produit télescopique

$$\frac{J_k}{J_0} = \prod_{i=1}^k \frac{J_i}{J_{i-1}} = \prod_{i=1}^k i = k!$$

Comme $J_0 = 1$, on obtient $J_k = k!$.

3.c) Le changement de variable est $\mathcal{C}^1$ strictement monotone sur $]0; 1]$ avec

$$\begin{cases} u = -(k+1) \ln x \\ x = e^{-\frac{u}{k+1}} \end{cases} \quad \frac{du}{dx} = -\frac{(k+1)}{x} = -\frac{(k+1)}{e^{-\frac{u}{k+1}}}.$$

Dès lors les intégrales I_k et

$$\begin{aligned} & \int_{+\infty}^0 \left(e^{-\frac{u}{k+1}} \right)^k \left(-\frac{u}{k+1} \right)^k \left(-\frac{e^{-\frac{u}{k+1}}}{k+1} \right) du \\ &= \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^k du = \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} J_k \end{aligned}$$

sont de même nature. Comme J_k converge, on a aussi l'égalité

$$I_k = \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} J_k.$$

4.a) On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{-x} dx &= \int_0^1 e^{-x \ln(x)} dx \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n \frac{(-x \ln(x))^k}{k!} + R_n(-x \ln(x)) dx \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n \frac{(-x \ln(x))^k}{k!} + R_n(\tilde{h}(x)) dx \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-x \ln(x))^k}{k!} dx + \int_0^1 R_n(\tilde{h}(x)) dx \end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale (et la continuité de $R_n \circ \tilde{h}$ sur $[0; 1]$). Or d'après la 3.c)

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 (x \ln(x))^k dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} I_k$$

et

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 R_n(\tilde{h}(x)) dx \leq \int_0^1 \frac{\tilde{h}(x)^{n+1} e^{\tilde{h}(x)}}{(n+1)!} dx \quad \text{question 2} \\ &\leq \int_0^1 \frac{(1/e)^{n+1} e^{1/e}}{(n+1)!} dx \\ 0 &\leq \int_0^1 R_n(\tilde{h}(x)) dx \leq \frac{(1/e)^{n+1} e^{1/e}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

D'où le résultat avec la 3.b)

$$r_n = \int_0^1 R_n(\tilde{h}(x)) dx.$$

4.b) On a aussi

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} I_k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^{k+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^k}$$

avec le changement d'indice $k \leftarrow k+1$.

De plus, par encadrement $r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. On conclut par passage à la limite $n \rightarrow +\infty$ dans l'égalité de la question 4.a).

Exercice 8

p. 3

RA46

1. Si on pose $u_k = x^k / k!$ alors on a la relation

$$f_n(x) = \left(\sum_{k=0}^n u_k \right) e^{-x}$$

et la relation de récurrence

$$u_k = \frac{x}{k} u_{k-1}.$$

On s'appuie sur ces formules pour construire le code :

```
def fn(n, x):
    u = 1
    s = u
    for k in range(1, n + 1):
        u = x / k * u
        s += u
    return s * np.exp(-x)
```

2.a) La fonction f_n est dérivable par produit d'une fonction polynomiale et exponentielle. Pour tout réel x

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-x} - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x} = -\frac{x^n}{n!} e^{-x}.$$

Soit $A \in \mathbb{R}_*^+$. On a une primitive avec $t \mapsto -n! f_n(t)$.

$$\int_0^A t^n e^{-t} dt = n! (f_n(0) - f_n(A)).$$

Par les croissances comparées f_n est de limite nulle en $+\infty$. De plus, $f_n(0) = 1$, il vient

$$I_n = n!$$

2.b) De même :

$$\int_x^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n! f_n(x).$$

3. D'après la question précédente

$$f_n(2x) = \int_{2x}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt.$$

Et, avec le changement de variable $t = u + x$ et la formule du binôme ensuite, on a

$$\begin{aligned} f_n(2x) &= \int_x^{+\infty} \frac{(u+x)^n}{n!} e^{-(u+x)} du \\ &= \int_x^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} x^k u^{n-k} e^{-x} e^{-u} du \\ &= e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \int_x^{+\infty} \frac{u^{n-k}}{(n-k)!} e^{-u} du \\ f_n(2x) &= e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f_{n-k}(x). \end{aligned}$$

4. Comme toutes les intégrales sont convergentes, par linéarité de l'intégrale, on peut intervertir la somme finie et l'intégrale pour obtenir

$$\int_x^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{k=0}^n \int_x^{+\infty} \frac{t^k}{k!} e^{-t} dt = \sum_{k=0}^n f_k(x).$$

5. L'égalité n'est pas vérifiée. D'une part

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = 0.$$

D'autre part

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Exercice 9

p. 4

RA5

1.a) D'après les résultats sur les séries de Riemann, on sait que

$$\sum \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{k^2}$$

sont respectivement divergente et convergente. En revenant à la définition avec les sommes partielles :

- $(H_n)_n$ diverge;
- $(S_n)_n$ converge.

1.b) Par concavité de $\ln$, on sait que

$$\ln(1+x) \leq x.$$

• Rédaction 1

Pour l'inégalité de gauche, on introduit la fonction

$$\varphi : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} \right).$$

La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ avec

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x$$

puis
$$\varphi''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + 1 \geq 0.$$

On en déduit que φ' est croissante. Comme $\varphi'(0) = 0$, φ' est positive sur $\mathbb{R}^+$. La fonction φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $\varphi(0) = 0$, on en déduit que φ est aussi positive sur $\mathbb{R}^+$. Ce qui conclut.

• Rédaction 2.

Posons $\psi : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \ln(1+x)$ de classe $\mathcal{C}^3$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\psi(x) = \psi(0) + \psi'(0)(x-0) + \frac{\psi''(0)}{2}(x-0)^2 + \int_0^x \frac{(x-t)^2 \psi^{(3)}(t)}{2!} dt.$$

Or on constate que $\psi^{(3)}(t) \geq 0$, l'intégrale est positive (les bornes sont dans le bon sens). On en déduit que :

$$\psi(x) \geq \psi(0) + \psi'(0)x + \frac{\psi''(0)}{2}x^2,$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad \ln(1+x) \geq 0 + x - \frac{1}{2}x^2.$$

Ce qui conclut.

1.c) L'inégalité précédente se réécrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \ln(1+x) \leq x \leq \ln(1+x) + \frac{x^2}{2}.$$

En évaluant en $1/k$ où $k \in \mathbb{N}^*$

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2k^2}.$$

En sommant :

$$\sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

On reconnaît une somme télescopique

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n+1) + \frac{1}{2}S_n.$$

Puis

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{S_n}{\ln(n)}.$$

Or
$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(1+1/n)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

et
$$\frac{S_n}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

car (S_n) tend vers une limite finie.

Par encadrement

$$\frac{H_n}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

D'où l'équivalent demandé.

2.a) Notons que

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \ln \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k} \right) \right) = \ln \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot \prod_{k=1}^n (k+x) \right) \\ &= \ln \left(\frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (k+x) \right) \\ &= -\ln \left(\frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)} \right) \\ f_n(x) &= -\ln(g_n(x)). \end{aligned}$$

Ainsi

$$g_n(x) = e^{-f_n(x)}.$$

2.b) En reprenant les inégalités de la question 1.b)

$$\frac{x}{k} - \frac{x^2}{2k^2} \leq \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) \leq \frac{x}{k}$$

puis par somme pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$xH_n - \frac{x^2}{2}S_n \leq f_n(x) \leq xH_n.$$

et
$$e^{\frac{x^2}{2}S_n - xH_n} \geq g_n(x) = e^{-f_n(x)} \geq e^{-xH_n}.$$

Pour $x \in [0; 1/\sqrt{H_n}]$, on obtient

$$e^{S_n/(2H_n) - xH_n} \geq g_n(x) \geq e^{-xH_n}.$$

D'où le résultat par intégration.

2.c) On a

$$\int_0^{1/\sqrt{H_n}} e^{-xH_n} dx = \left[-\frac{1}{H_n} e^{-xH_n} \right]_0^{1/\sqrt{H_n}} = \frac{1}{H_n} (1 - e^{-\sqrt{H_n}}) \leq \frac{1}{H_n}.$$

Dès lors

$$e^{S_n/(2H_n)} \cdot \frac{1}{H_n} \geq U_n \geq \frac{1}{H_n} (1 - e^{-\sqrt{H_n}}).$$

$$\text{et } e^{S_n/(2H_n)} \geq \frac{U_n}{1/H_n} \geq 1 - e^{-\sqrt{H_n}}.$$

Comme $H_n \sim \ln(n)$, on a en particulier $H_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ et

$$1 - e^{-\sqrt{H_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\frac{S_n}{2H_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad \exp\left(\frac{S_n}{2H_n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

((S_n) converge vers une limite finie et par composition). Par encadrement

$$\frac{U_n}{1/H_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{puis} \quad U_n \sim \frac{1}{H_n}.$$

2.d) On reprend l'encadrement (valable pour tout $x \in \mathbb{R}^+$)

$$e^{\frac{x^2}{2} S_n - xH_n} \geq g_n(x) \geq e^{-xH_n}$$

pour $x \in [1/\sqrt{H_n}; 1]$, on a :

$$e^{\frac{S_n}{2} - xH_n} \geq g_n(x) \geq 0$$

$$\text{puis} \quad e^{\frac{S_n}{2}} \int_{1/H_n}^1 e^{-xH_n} dx \geq V_n \geq 0$$

$$\text{et} \quad e^{S_n/2} \left[-\frac{1}{H_n} e^{-xH_n} \right]_{1/\sqrt{H_n}}^1 \geq V_n \geq 0.$$

$$\text{D'où} \quad \frac{e^{S_n/2}}{H_n} (e^{-\sqrt{H_n}} - e^{-H_n}) \geq V_n \geq 0.$$

$$\text{Finalement} \quad \frac{e^{S_n/2}}{H_n} e^{-\sqrt{H_n}} \geq V_n \geq 0.$$

2.e) Par encadrement

$$H_n V_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

D'où le résultat.

3. On a par la relation de Chasles

$$I_n = U_n + V_n.$$

Or on a vu que

$$V_n = o\left(\frac{1}{H_n}\right) = o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$$

$$\text{et} \quad U_n \sim \frac{1}{H_n} \sim \frac{1}{\ln(n)}$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad U_n = \frac{1}{\ln(n)} + o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right).$$

Par conséquent

$$I_n = \frac{1}{\ln(n)} + o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) \quad \text{soit} \quad I_n \sim \frac{1}{\ln(n)}.$$

4.a) Soient $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=1}^n \mu_i e_i = 0_{\mathbb{R}_{n-1}[x]} \quad (\star)$$

Soit $k_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Notons que $-k_0$ est racine de e_i pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{k_0\}$ mais n'est pas racine de e_{k_0} . Dès lors, en évaluant $-k_0$ dans l'égalité $(\star)$, on obtient

$$\mu_{k_0} \underbrace{e_{k_0}(-k_0)}_{\neq 0} = 0.$$

D'où $\mu_{k_0} = 0$. Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mu_k = 0$, la famille est libre. Comme la famille contient $\dim \mathbb{R}_{n-1}[x] = n$ vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

4.b) C'est une conséquence de fait que la famille est génératrice. Ainsi le polynôme constant égal à $n!$ s'écrit comme combinaison linéaire de la famille $(e_1, \dots, e_n)$.

4.c) Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On évalue la relation précédente en $-k$:

$$n! = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i(-k) = \lambda_k e_k(-k)$$

$$\text{Or} \quad e_k(-k) = \prod_{\substack{i \neq k \\ i \in \llbracket 1; n \rrbracket}} (i - k) = \prod_{i=1}^{k-1} (i - k) \cdot \prod_{i=k+1}^n (i - k).$$

On effectue le changement d'indice $j = k - i$ dans le premier produit

$$\prod_{i=1}^{k-1} (i - k) = \prod_{i=1}^{k-1} (-j) = (-1)^{k-1} \prod_{j=1}^{k-1} j = (-1)^{k-1} (k-1)!$$

puis le changement d'indice $j = i - k$ dans le second produit

$$\prod_{i=k+1}^n (i - k) = \prod_{j=1}^{n-k} j = (n-k)!$$

Finalement

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \frac{n!}{e_k(-k)} = \frac{n!}{(-1)^{k-1} (k-1)! (n-k)!} \\ &= n(-1)^{k-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-1-(k-1))!} \\ &= n(-1)^{k-1} \cdot \binom{n-1}{k-1}. \\ \lambda_k &= n(-1)^{k+1} \binom{n-1}{k-1}. \end{aligned}$$

5. On a par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (x+i)} dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_0^1 \frac{e_k(x)}{\prod_{i=1}^n (x+i)} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_0^1 \frac{1}{(x+k)} dx \\ I_n &= \sum_{k=1}^n \lambda_k (\ln(k+1) - \ln(k)). \end{aligned}$$

D'où le résultat avec ce qui précède.

6. On a vu que $I_n \sim 1/\ln(n)$. Le résultat s'en déduit en divisant par n .

Exercice 10

p. 5

RA9

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Effectuons une intégration par parties avec les choix

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin x & u'(x) &= \cos x \\ v(x) &= \cos^{2n-1} x & v'(x) &= -(2n-1) \sin x \cos^{2n-2} x \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} C_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos^{2n-1} x dx \\ &= [\sin x \cos^{2n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{2n-2} x dx \\ &\quad (\text{car } \sin^2 = 1 - \cos^2) \\ &= 0 + (2n-1) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n-2} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n} dx \right). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad C_n = (2n-1)(C_{n-1} - C_n).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le calcul précédent,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 (\cos x)^{2n-2} dx = C_{n-1} - C_n = \frac{C_n}{2n-1}$$

De plus, l'égalité trouvée au 1) entraîne

$$C_n = (2n-1)C_{n-1} - (2n-1)C_n$$

puis

$$C_n = \frac{2n-1}{2n} C_{n-1}.$$

Ainsi, en remplaçant :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 (\cos x)^{2n-2} dx = \frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Effectuons deux intégrations par parties successives. La première en posant :

$$\begin{aligned} u(x) &= \cos^{2n} x & u'(x) &= -2n \sin x \cos^{2n-1} x \\ v(x) &= x & v'(x) &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} C_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \cos^{2n} x dx \\ &= \left[x \cos^{2n} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos^{2n-1} x dx \\ &= n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x) \times (\sin x \cos^{2n-1} x) dx \end{aligned}$$

Puis la seconde intégration par parties avec :

$$\begin{cases} u = \sin \cos^{2n-1} & u' = \cos^{2n} - (2n-1) \sin^2 \cos^{2n-2} \\ v(x) = x^2 & v'(x) = 2x \end{cases}$$

Ce qui donne $C_n =$

$$\begin{aligned} &n \left[x^2 \sin x \cos^{2n-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (\cos^{2n} x - (2n-1) \sin^2 x \cos^{2n-2} x) dx \\ &= -n \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x dx - (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x \cos^{2n-2} x dx \right) \\ &= -n \left(D_n - (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (1 - \cos^2 x) \cos^{2n-2} x dx \right) \\ &= -n(D_n - (2n-1)(D_{n-1} - D_n)) \end{aligned}$$

On en déduit

$$C_n = (2n-1)nD_{n-1} - 2n^2 D_n.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Isolons le terme $\frac{1}{n^2}$: d'après la question 3,

$$\frac{C_n}{n^2} = \frac{(2n-1)nD_{n-1}}{n^2} - 2D_n$$

Comme $\cos^{2n}$ est positive, continue et non identiquement nulle sur $[0, \pi/2]$, l'intégrale C_n est non nulle :

$$\frac{1}{n^2} = \frac{(2n-1)nD_{n-1}}{n^2 C_n} - 2 \frac{D_n}{C_n}$$

D'après 2, $\frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}$, d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} &= \frac{2n-1}{C_n} \times \frac{nD_{n-1}}{n^2} - 2 \frac{D_n}{C_n} \\ &= \frac{2n}{C_{n-1}} \times \frac{nD_{n-1}}{n^2} - 2 \frac{D_n}{C_n} \\ &= 2 \frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - 2 \frac{D_n}{C_n} \end{aligned}$$

Il vient

$$\frac{1}{n^2} = 2 \left(\frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \frac{D_n}{C_n} \right)$$

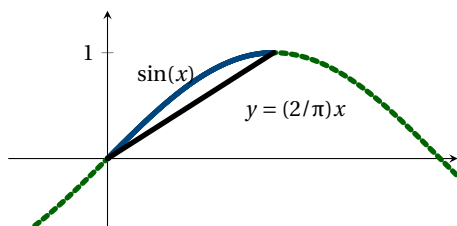
5.a) Rédaction 1

Posons, pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \sin x - \frac{2}{\pi} x$. La fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition, et $\forall x \in [0, \pi/2]$, $f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$. La fonction $\cos$ est continue strictement décroissante sur $[0, \pi/2]$, $\cos 0 = 1 > 2/\pi$ et $\cos \pi/2 = 0 < 2/\pi$. D'où le tableau de signe suivant pour f' , qui entraîne le tableau de variation de f : Ainsi, $f \geq 0$ sur $[0, \pi/2]$. Conclusion :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin x \geq \frac{2}{\pi} x$$

Rédaction 2.

La fonction sinus est concave sur $[0; \pi/2]$. La courbe représentative sur cet intervalle est donc au-dessus de la corde passant par les points d'abscisse 0 et $\pi/2$.



5.b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ci-dessus, pour tout $x \in [0, \pi/2]$,

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \sin x$$

D'où, par croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}^+$

$$x^2 \leq \frac{\pi^2}{4} \sin^2 x$$

En remplaçant, comme $\cos^{2n} \geq 0$ et par croissance de l'intégrale,

$$D_n \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^{2n} x, dx$$

Or d'après la questions 2.

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 (\cos x)^{2n-2} dx = \frac{C_{n-1}}{2n}$$

donc en décalant les indices :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D_n \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{C_n}{2n+2}$$

6. D'après la question 4), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &= 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{D_{k-1}}{C_{k-1}} - \frac{D_k}{C_k} \right) \\ &= 2 \left(\frac{D_0}{C_0} - \frac{D_n}{C_n} \right) \end{aligned}$$

Car on reconnaît une somme télescopique. Or

$$D_0 = \frac{1}{3} \left[x^3 \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24} \quad \text{et} \quad C_0 = \frac{\pi}{2},$$

donc

$$2 \frac{D_0}{C_0} = \frac{2\pi^3 \times 2}{24\pi} = \frac{\pi^2}{6}$$

D'après la question 5 avec $C_n > 0$

$$0 \leq \frac{D_n}{C_n} \leq \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{n+1}$$

Donc, par le théorème d'encadrement,

$$D_n/C_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Finalement

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 11

p. 5

RA6

A.1. La fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0; \pi/4]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$. La fonction inverse $x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto$

$1/x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$. Par composition, f est strictement croissante $[0; \pi/4]$.

De plus, f est continue et

$$f(0) = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \sqrt{2}.$$

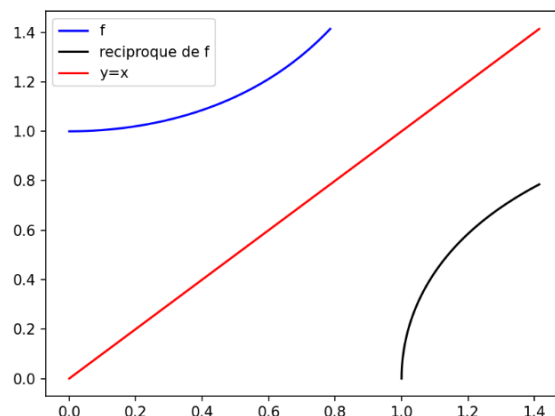
D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[0; \pi/4]$ dans

$$J = [1; \sqrt{2}].$$

A.2. Utilisons Python. On rappelle que le graphe de la réciproque s'obtient par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

plt.clf()
x=np.linspace(0,np.pi/4,200)
y=1/np.cos(x)
plt.plot(x,y,'b',label='f')
plt.plot(y,x,'k',label='réciproque de f')
plt.plot([0,2**(1/2)],[0,2**(1/2)],'r',
         label='y=x')
plt.legend()
plt.show()
```



A.3. Par construction de l'application réciproque, pour tout $x \in J$

$$f \circ f^{-1}(x) = x.$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\cos(f^{-1}(x))} = x.$$

On en déduit la première relation par passage à l'inverse. De plus

$$\begin{aligned} \sin^2(f^{-1}(x)) &= 1 - \cos^2(f^{-1}(x)) \\ &= 1 - \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Comme $f^{-1}(x) \in [0; \pi/4]$, $\sin(f^{-1}(x)) \geq 0$ et on a bien la seconde formule.

A.4. Par quotient, f est dérivable sur $[0; \pi/4]$ avec

$$\forall x \in [0; \pi/4], \quad f'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}.$$

Pour tout $x \in I \setminus \{0\}$, $f'(x) \neq 0$. Par le théorème de dérivation de l'application réciproque, f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{f(0)\} = J \setminus \{1\}$ avec :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{\cos^2(f^{-1}(x))}{\sin(f^{-1}(x))}.$$

On en déduit la formule demandée à l'aide des relations de la question précédente.

A.5. La fonction f^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$ donc il existe un DL en $\sqrt{2}$ à l'ordre 1 et :

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(\sqrt{2}) + (f^{-1})'(\sqrt{2})(x - \sqrt{2}) + o_{\sqrt{2}}(x - \sqrt{2}).$$

Or $f(\pi/4) = \sqrt{2}$, $\pi/4 = f^{-1}(\sqrt{2})$ et

$$(f^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'où

$$(f^{-1})(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + o_{\sqrt{2}}(x - \sqrt{2}).$$

B.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \in [0; \pi/4] \mapsto f(x)^n$ est continue, l'intégrale I_n est donc bien définie. De plus

$$I_2 = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos(x)^2} dx = [\tan(x)]_0^{\pi/4} = 1.$$

B.2. Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

$$\begin{aligned} \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} &= \frac{a(1+t) + b(1-t)}{(1-t)(1+t)} \\ &= \frac{(a+b) + (a-b)t}{1-t^2}. \end{aligned}$$

Par identification, on cherche a, b tels que

$$\begin{cases} a+b &= 1 \\ a-b &= 0 \end{cases}$$

On constate que le choix $a = b = 1/2$ convient.

B.3. Le changement de variable $t = \sin x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $dt = \cos(x) dx$. Ainsi

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos(x)} dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos(x)^2} \cdot \cos(x) dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1-\sin(x)^2} \cdot \cos(x) dx \\ I_1 &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{1-t^2} dt. \end{aligned}$$

On poursuit à l'aide de la question précédente

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} dt \\ &= \frac{1}{2} [-\ln(t-1) + \ln(1+t)]_0^{\sqrt{2}/2}. \end{aligned}$$

Après simplifications, il vient

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln(3+2\sqrt{2}).$$

B.4. Comme pour $x \in [0; \pi/4]$, $f(x) \geq 1$, on a

$$f(x)^n \leq f(x) \cdot f(x)^n = f(x)^{n+1}.$$

Par croissance de l'intégrale (avec les bornes dans le bon sens)

$$\int_0^{\pi/4} f(x)^n dx \leq \int_0^{\pi/4} f(x)^{n+1} dx.$$

C'est-à-dire $I_n \leq I_{n+1}$.

La suite $(I_n)_n$ est croissante.

B.5.a) Posons $a_n = \pi/4 - 1/n^2$. Comme f est une fonction positive

$$\int_0^{\pi/4} f(x)^n dx \geq \int_{a_n}^{\pi/4} f(x)^n dx.$$

De plus, f est croissante et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Ainsi f^n est croissante : elle est donc minorée sur $[a_n; \pi/4]$ par $f(a_n)^n$.

Par croissance de l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{a_n}^{\pi/4} f(x)^n dx &\geq \int_{a_n}^{\pi/4} f(a_n)^n dx \\ &\geq \left(\frac{\pi}{4} - a_n \right) f(a_n)^n \end{aligned}$$

D'où le résultat en remplaçant a_n et $f(a_n)$ par leurs expressions.

B.5.b) On peut poursuivre la minoration. Il existe $b \in [0; \pi/4]$ tel que pour tout $n \geq 2$

$$I_n \geq \frac{1}{n^2} \frac{1}{\cos(b)^n}.$$

Comme $1/\cos(b) > 1$, par les croissances comparées

$$\frac{1}{n^2} \frac{1}{\cos(b)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

Par minoration,

$$I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

B.6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Procédons par une intégration par parties sachant que les fonctions considérées sont de classe $\mathcal{C}^1$. Rappelons que sur $f^2 = \tan'$ sur $[0; \pi/4]$.

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/4} f(x)^{n+2} dx \\ &= \int_0^{\pi/4} f(x)^2 \cdot f(x)^n dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \tan'(x) \cdot f(x)^n dx \\ &= [\tan(x) \cdot f(x)^n]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan(x) n f'(x) f(x)^{n-1} dx. \end{aligned}$$

Or, on constate que

$$\begin{aligned} \tan(x) \cdot f'(x) &= \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^3} \\ &= \frac{1 - \cos(x)^2}{\cos(x)^3} \\ &= f(x)^3 - f(x). \end{aligned}$$

On a donc

$$\tan(x)f'(x)f(x)^{n-1} = f(x)^{n+2} - f(x)^n$$

puis

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)nf'(x)f(x)^{n-1} dx = n(I_{n+2} - I_n).$$

De plus, on a aussi

$$[\tan(x) \cdot f(x)^n]_0^{\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2})^n,$$

il vient $I_{n+2} = (\sqrt{2})^n - n(I_{n+2} - I_n).$

Ce qui donne le résultat.

Exercice 12

p. 6

RA7

1. La fonction

$$\varphi: t \mapsto \left| e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} \right|$$

est continue sur $]0, +\infty[$. On a une intégrale généralisée en 0 et $+\infty$.

• Étude en 0.

À partir de l'équivalent usuel de sinus en 0,

$$\sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t \quad \text{et} \quad \varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1.$$

La fonction φ est prolongeable par continuité en 0, l'intégrale est convergente au voisinage de 0 (on dit que l'intégrale est faussement impropre en 0).

• Étude en $+\infty$.

Comme :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad |\sin t| \leq t,$$

on a :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad 0 \leq \varphi(t) \leq e^{-\alpha t}.$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ est convergente, le critère de comparaison sur les intégrales des fonctions positives permet d'affirmer la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} \left| e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} \right| dt.$$

C'est-à-dire l'absolue convergence de l'intégrale I.

2.a) On a directement

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha}.$$

2.b) Si I_{n-1} est convergente et sachant que les fonctions $t \mapsto t^n$ et $t \mapsto -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, et le crochet ayant une limite finie, 0, en $+\infty$, on peut directement intégrer par parties sur $[0, +\infty[$, et les deux intégrales écrites seront de même nature.

$$I_n = \left[-\frac{1}{\alpha} t^n e^{-\alpha t} \right]_0^{+\infty} + \frac{n}{\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^{n-1} dt.$$

Dès lors, si (I_{n-1}) est convergente alors I_n est convergente et

$$I_n = \frac{n}{\alpha} I_{n-1}.$$

2.c) On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est convergente et

$$I_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

3.a) Soient $x \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$.

La fonction sinus est de classe $\mathcal{C}^{2n+2}$ sur $[0, x]$. On peut donc appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n+1$. De plus,

$$\sin^{(2k)}(0) = 0, \quad \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$$

$$\text{et} \quad \left| \sin^{(2n+2)}(t) \right| = \left| (-1)^{n+1} \sin t \right| \leq 1.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \right| \\ \leq \left(\max_{t \in (0, x]} \left| \sin^{(2n+2)}(t) \right| \right) \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \\ \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}. \end{aligned}$$

3.b) En renommant x en t et en multipliant les deux membres de l'inégalité précédente par $\frac{e^{-\alpha t}}{t} \geq 0$, il vient

$$\begin{aligned} \left| e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} - \left(e^{-\alpha t} - \frac{1}{3!} e^{-\alpha t} t^2 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} e^{-\alpha t} t^{2n} \right) \right| \\ \leq \frac{e^{-\alpha t} t^{2n+1}}{(2n+2)!}. \end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale (toutes les intégrales étant convergentes), on obtient finalement implique :

$$\left| I - \left(I_0 - \frac{I_2}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{I_{2n}}{(2n+1)!} \right) \right| \leq \frac{I_{2n+1}}{(2n+2)!} I_{2n+1}.$$

En particulier, on peut choisir

$$K = \frac{1}{(2n+2)!}.$$

3.c) On sait que

$$\frac{I_{2n+1}}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+2)\alpha^{2n+2}}.$$

Sachant que $\alpha \geq 1$, on peut affirmer par les croissances comparées que ce terme tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. En appliquant le théorème d'encadrement à partir de l'inégalité de la question précédente, on obtient

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_0 - \frac{I_2}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{I_{2n}}{(2n+1)!} \right).$$

Or, on a aussi

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad I_k = \frac{k!}{\alpha^{k+1}}.$$

Ce qui conclut.

4.a) Cours.

Comme la fonction arctangente est de classe $\mathcal{C}^1$, on a par le théorème fondamentale de l'analyse que

$$\arctan(x) - \arctan(0) = \int_0^x \arctan'(t) dt.$$

D'où le résultat.

4.b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in [0, 1]$. En utilisant une somme géométrique de raison $-t^2 \neq 1$, on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} &= \sum_{k=0}^n (-t^2)^k - \frac{1}{1+t^2} \\ &= \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2} \\ &= (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}. \end{aligned}$$

4.c) Soit $x \in [0, 1]$. En intégrant la relation précédente sur $[0; x]$

$$\sum_{k=0}^n \int_0^x (-1)^k t^{2k} dt - \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt,$$

d'où, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan x \right| &= \left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \\ &\leq \int_0^x t^{2n+2} dt \\ &\leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan(x) \right| \leq \frac{1}{2n+3}.$$

4.d) Comme $\frac{1}{2n+3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on en déduit par le théorème d'encadrement

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \arctan(x).$$

En particulier, pour $x = \frac{1}{\alpha}$ et avec **3.c**, on conclut :

$$I = \arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Remarque. On peut poursuivre la simplification en montrant que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan(x) = \begin{cases} +\pi/2 & \text{si } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Exercice 13

p. 6

RA8

A.1. Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$.

La fonction φ_x est continue sur $]0; +\infty[$, $\Phi(x)$ une intégrale généralisée en 0 et $+\infty$.

• *Étude en 0.*

Posons

$$\alpha = \frac{(1-x)+1}{2} = 1 - \frac{x}{2} \in]1-x; 1[.$$

Par les croissances comparées

$$t^\alpha \varphi_x(t) = t^\alpha t^{x-1} (\ln t) e^{-t} = t^{x/2} (\ln t) e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0.$$

Autrement dit

$$\varphi_x(t) = 0_{0^+} \left(\frac{1}{t^\alpha} \right).$$

Or $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est une intégrale de Riemann convergente car $\alpha < 1$. De plus $t \mapsto 1/t^\alpha$ est une fonction positive. Par le critère de négligeabilité. L'intégrale $\int_0^1 \varphi_x(t) dt$ est convergente.

• *Étude en $+\infty$.*

Par les croissances comparées $t^2 \varphi_x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ d'où

$$\varphi_x(t) = 0 \left(\frac{1}{t^2} \right).$$

En raisonnant comme précédemment ($\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente), on prouve la convergence de $\int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt$.

Finalement,

$\Phi(x)$ est convergente.

A.2. Soient $x, y \in \mathbb{R}_*^+$ avec $x \leq y$,

$$\begin{aligned} \Phi(x) - \Phi(y) &= \int_0^{+\infty} \ln t \times t^{x-1} (1 - t^{y-x}) e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Comme $y - x \geq 0$

$$\begin{aligned} 1 - t^{y-x} &\geq 0 \quad \text{si } t \in]0, 1] \\ 1 - t^{y-x} &\leq 0 \quad \text{si } t \in [1, +\infty[\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $t > 0$, les réels $\ln t$ et $1 - t^{y-x}$ sont de signe opposé. Donc la fonction

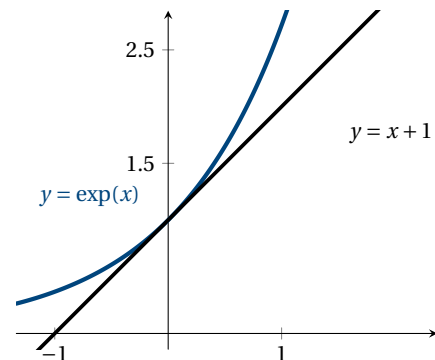
$$t \mapsto \ln(t) t^{x-1} (1 - t^{y-x}) e^{-t}$$

est négative sur $\mathbb{R}_*^+$. On en déduit que

$$\Phi(x) - \Phi(y) \leq 0, \quad \text{puis} \quad \Phi(x) \leq \Phi(y).$$

La fonction Φ est donc croissante.

A.3. L'inégalité de gauche résulte de la convexité de la fonction exponentielle. La courbe représentative est au-dessus de la tangente en 0.



$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^t \geq 1 + t.$$

Pour la seconde inégalité, en remplaçant t par $-t$ dans l'inéquation précédente, il vient

$$e^{-t} \geq 1 - t.$$

On multiplie par $e^t \geq 0$:

$$1 \geq -te^t + e^t.$$

On en déduit que :

$$e^t - 1 \leq te^t.$$

A.4.a) Soit $h \in [-x/2, x]$. Par croissance de Φ

$$\frac{x}{2} \leq x + h \leq 2x$$

$$\text{donne} \quad \Phi\left(\frac{x}{2}\right) \leq \Phi(x + h) \leq \Phi(2x).$$

A.4.b) On en déduit un encadrement du produit $h\Phi(x + h)$ en distinguant suivant le signe de h .

→ Si $h \geq 0$ alors :

$$h\Phi\left(\frac{x}{2}\right) \leq h\Phi(x + h) \leq h\Phi(2x).$$

Donc par encadrement

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} h\Phi(x + h) = 0.$$

→ Si $h \leq 0$ alors :

$$h\Phi\left(\frac{x}{2}\right) \geq h\Phi(x + h) \geq h\Phi(2x).$$

$$\text{Donc} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} h\Phi(x + h) = 0.$$

Comme les limites à droite et gauche existent et sont égales, il vient

$$\lim_{h \rightarrow 0} h\Phi(x + h) = 0.$$

B.1. Effectuons le changement de variable $u = \sqrt{t}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ strictement croissant.

$$u^2 = t, \quad du = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt.$$

L'intégrale de Gauss étant convergente, on a convergence de $\Gamma(1/2)$ avec l'égalité :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Or par parité de $u \mapsto e^{-u^2}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Finalement

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

B.2. Fixons $x \in \mathbb{R}_*^+$. Soient $A \in \mathbb{R}_*^+$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$. Procédons par intégration par parties en introduisant les fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur $\mathbb{R}_*^+$ par :

$$\begin{cases} u(t) &= t^x \\ v(t) &= -e^{-t} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(t) &= xt^{x-1} \\ v'(t) &= e^{-t} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^A t^x e^{-t} dt &= \int_\varepsilon^A u(t) v'(t) dt \\ &= [u(t) v(t)]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A u'(t) v(t) dt \\ &= [-t^x e^{-t}]_\varepsilon^A + x \int_\varepsilon^A t^{x-1} e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Passons à la limite avec $\varepsilon \rightarrow 0^+$, $A \rightarrow +\infty$

$$\varepsilon^x e^{-\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0, \quad A^x e^{-A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0.$$

Notons l'emploi des croissances comparées dans le second cas. Finalement,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

B.3.a) On a par linéarité de l'intégrale

$$\Gamma(x+h) - \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} (t^h - 1) t^x e^{-t} dt.$$

D'après l'encadrement de la question 4.a) appliquée au réel $h \ln t$ (où $t > 0$), on obtient

$$h \ln t \leq t^h - 1 \leq h \ln(t) t^h.$$

On multiplie par $t^x e^{-t}$ et on intègre, il vient :

$$h\Phi(x) \leq \Gamma(x+h) - \Gamma(x) \leq h\Phi(x+h).$$

B.3.b) En admettant que Φ est continue en x ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Phi(x+h) = \Phi(x).$$

On déduit alors de l'encadrement précédent avec $h \geq 0$ que :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Gamma(x+h) - \Gamma(x)}{h} = \Phi(x).$$

En adaptant l'argument, on a la même limite mais pour $h \leq 0$. Donc la fonction Γ est dérivable en x et $\Gamma'(x) = \Phi(x)$. Ce résultat étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, la fonction Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ avec

$$\Gamma' = \Phi.$$

Comme il est admis que Φ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$, la fonction Γ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

B.4.a) On vérifie que $\Gamma(1) = 1$ puis, avec la question B.2.

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1.$$

D'où $\Gamma(2) = \Gamma(1)$. La fonction Γ est continue sur $[1; 2]$, dérivable sur $]1; 2[$, le théorème de Rolle impose l'existence de $\alpha \in]1; 2[$ telle que $\Gamma'(\alpha) = 0$.

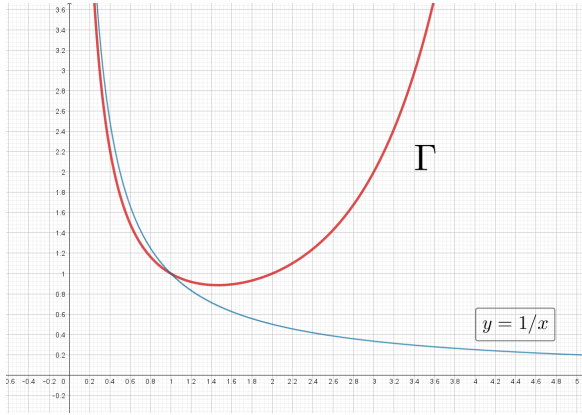
B.4.b) La fonction Γ est continue en 1 avec $\Gamma(1) = 1$. D'après la question B.2.

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \Gamma(1) = 1.$$

$$\text{D'où} \quad \Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

B.4.c) La dérivée de Γ est Φ qui est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_*^+$ (voir question A.2.), donc Γ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}_*^+$.

B.4.d) On obtient :



C.1 Soient $x, y \in \mathbb{R}_*^+$. La fonction

$$\varphi : t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$$

est continue sur $]0; 1[$, on a donc une intégrale généralisée en 0 et 1.

• *Étude en 0.*

$$\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_0^1 1/t^{1-x} dt$ est convergente ($1-x < 1$). Par le critère d'équivalence des intégrales de fonctions positives, l'intégrale de φ est convergente en 0.

• *Étude en 1.*

$$\varphi(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{(1-t)^{y-1}}.$$

Une comparaison avec une intégrale de Riemann justifie, comme précédemment, la convergence.

Finalement, l'intégrale $B(x, y)$ est convergente.

C.2.a) Effectuons le changement de variable $\mathcal{C}^1$, strictement décroissant $u = 1 - t$, $du = -dt$.

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \\ &= \int_1^0 (1-u)^{x-1} u^{y-1} (-du) \\ &= \int_0^1 (1-u)^{x-1} u^{y-1} du = B(y, x). \end{aligned}$$

C.2.b) Soient $\varepsilon, \eta \in]0; 1[$.

Intégrons par parties, (les fonctions considérées sont de classe $\mathcal{C}^1$)

$$\begin{aligned} &\int_{\varepsilon}^{\eta} t^x \cdot y(1-t)^{y-1} dt \\ &= [-t^x \cdot (1-t)^y]_{\varepsilon}^{\eta} + \int_{\varepsilon}^{\eta} x t^{x-1} \cdot (1-t)^y dt. \end{aligned}$$

Or

$$\rightarrow \int_{\varepsilon}^{\eta} t^x \cdot y(1-t)^{y-1} dt \xrightarrow[\eta \rightarrow 1^-]{\varepsilon \rightarrow 0^+} yB(x+1, y),$$

$$\rightarrow [-t(1-t)^y]_{\varepsilon}^{\eta} \xrightarrow[\eta \rightarrow 1^-]{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0,$$

$$\rightarrow \int_{\varepsilon}^{\eta} x t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \xrightarrow[\eta \rightarrow 1^-]{\varepsilon \rightarrow 0^+} xB(x, y+1).$$

D'où l'égalité demandée par passage à la limite.

C.3. Soient $x, y \in \mathbb{R}_*^+$. Par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} &B(x, y) - B(x+1, y) \\ &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} - t^x(1-t)^{y-1} dt \\ &= \int_0^1 (t^{x-1} - t^x)(1-t)^{y-1} dt \\ &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)(1-t)^{y-1} dt \\ &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt = B(x, y+1). \end{aligned}$$

À l'aide des relations précédentes

$$\begin{aligned} B(x+1, y) &= \frac{x}{y} B(x, y+1) \\ &= \frac{x}{y} (B(x, y) - B(x+1, y)). \end{aligned}$$

D'où la relation

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right) B(x+1, y) = \frac{x}{y} B(x, y)$$

Le résultat s'en déduit après simplifications.

C.4.a) Soit $t \in [0; n]$. On a vu à la question A.3. l'inégalité de convexité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1+x \leq e^x.$$

Appliquée à $x = -t/n$, il vient

$$1 - \frac{t}{n} \leq e^{-t/n}.$$

Comme $1 - t/n \geq 0$ et la fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, il vient

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \left(e^{-t/n}\right)^n = e^{-t}.$$

C.4.b) La relation à démontrer est claire lorsque $t \in [\sqrt{n}, n]$.

Considérons le cas $t \in [0, \sqrt{n}]$.

On définit sur $[0, \sqrt{n}]$ la fonction

$$f : t \mapsto n \ln \left(1 - \frac{t}{n}\right) + t - \ln \left(1 - \frac{t^2}{n}\right).$$

La fonction f est dérivable sur $[0, \sqrt{n}]$ avec

$$f'(t) = \frac{t((t-1)^2 + (n-1))}{(n-t)(n-t^2)} \geq 0.$$

Dès lors, pour tout $t \in [0, \sqrt{n}]$, $f(t) \geq f(0) = 0$.

On en déduit que

$$n \ln \left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq \ln \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) - t.$$

L'inégalité demandée s'en déduit par croissance de la fonction exponentielle.

C.4.c) On déduit des deux questions précédentes et par croissance de l'intégrale

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \leq \int_0^n e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Or, par définition,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n e^{-t} t^{x-1} dt = \Gamma(x).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} t^{x-1} dt \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-t} t^{x-1} dt - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n e^{-t} t^{x+1} dt \\ = \Gamma(x) - 0 \cdot \Gamma(x+2) = \Gamma(x). \end{aligned}$$

Le théorème d'encadrement permet alors de conclure.

C.5. Le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$, $u = t/n$ donne

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = n^x B(n+1, x).$$

Par récurrence à partir de la question C.3. ou par produit télescopique, il vient

$$B(n+1, y) = \frac{n}{n+y} B(n, y) = \left(\prod_{k=1}^n \frac{k}{(k+y)} \right) B(1, y).$$

Or
$$B(1, y) = \int_0^1 (1-t)^{y-1} dt = \frac{1}{y},$$

on en déduit que pour tous $n \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{R}_*^+$

$$B(n+1, y) = \frac{n!}{y(y+1) \dots (y+n)}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt &= n^x B(n+1, x) \\ &= n^x \frac{n!}{x(x+1) \dots (x+n)}. \end{aligned}$$

Il suffit alors de passer à la limite lorsque n tend vers l'infini et de reconnaître $\Gamma(x)$ dans le membre de gauche grâce à la question précédente.

C.6.a) En reprenant la relation de la question C.3.

$$\begin{aligned} \frac{B(n+1, y)}{B(1, y)} &= \prod_{k=1}^n \frac{B(k+1, y)}{B(k, y)} \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+y} \\ &= \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+y)}. \end{aligned}$$

Or

$$B(1, y) = \int_0^1 t^{y-1} dt = \left[\frac{1}{y} t^y \right]_0^1 = \frac{1}{y}.$$

D'où

$$B(n+1, y) = \frac{n!}{y \prod_{k=1}^n (k+y)} = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (k+y)}.$$

Expression que l'on peut réécrire par

$$B(n+1, y) = \left(\frac{n^y n!}{\prod_{k=0}^n (k+y)} \right) \cdot \frac{1}{n^y}.$$

On conclut en remarquant que d'après C.5. (avec $\Gamma(y) \neq 0$)

$$\frac{n^y n!}{\prod_{k=0}^n (k+y)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \Gamma(y).$$

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. Sachant que la fonction

$$u \mapsto B(u, y)$$

est décroissante, il vient pour $n = \lfloor x \rfloor$

$$B(n, y) \geq B(x, y) \geq B(n+1, y)$$

puis (les quantités sont positives)

$$B(n, y) \cdot x^y \geq B(x, y) \cdot x^y \geq B(n+1, y) \cdot x^y$$

ou encore

$$(B(n, y)(n-1)^y) \cdot \frac{x^y}{(n-1)^y} \geq B(x, y)x^y \geq (B(n+1, y)n^y) \cdot \frac{x^y}{n^y}.$$

On poursuit à partir de l'encadrement issu de la définition de la partie entière ($x-1 \leq n \leq x$)

$$(B(n, y)(n-1)^y) \cdot \left(\frac{x}{(x-1)} \right)^y \geq B(x, y)x^y \geq B(n+1, y)n^y.$$

Or, d'après ce qui précède

$$B(n+1, y)n^y \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(y), \quad B(n, y)(n-1)^y \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(y)/$$

Par le théorème d'encadrement

$$\frac{B(x, y)}{x^y} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \Gamma(y).$$

Ce qui conclut sachant que $\Gamma(y) \neq 0$.

C.6.b)i) Par produit télescopique

$$\begin{aligned} \frac{B(x+n, y)}{B(x, y)} &= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{B(x+k+1, y)}{B(x+k, y)} \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{x+k}{x+y+k}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{B(x+n, y)}{B(x, y)} &= \frac{x+y+n}{x+n} \prod_{k=0}^n \frac{x+k}{x+y+k} \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x+y+n}{x+n} \cdot \frac{n^x n!}{\Gamma(x)} \cdot \frac{\Gamma(x+y)}{n^{x+y} \cdot n!} \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)n^y}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

C.6.b)ii) On a d'une part

$$\frac{B(x+n, y)n^y}{B(x, y)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}$$

et d'autre part (deuxième point du 6.a))

$$B(x+n, y) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{(n+x)^y} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{n^y}.$$

Soit

$$\frac{B(x+n, y)n^y}{B(x, y)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{B(x, y)}.$$

Par unicité de la limite

$$\frac{\Gamma(y)}{B(x, y)} = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}.$$

D'où le résultat (aucune quantité n'est nulle).