

CHAPITRE 2

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

Un mathématicien est une machine à transformer le café en théorèmes.

PAUL ERDÖS

Mathématicien hongrois (1913-1996).

1

Rappels et compléments sur les espaces vectoriels

1.1 Rappels : e.v, s.e.v, familles de vecteurs

Pour résumer, un espace vectoriel E est un ensemble muni de deux lois « $+$ » et « $\cdot$ » telles que :

- E est stable par multiplication à gauche par un nombre : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E, \lambda \cdot u \in E$.
- E est stable par somme : $\forall u \in E, \forall v \in E, u + v \in E$.
- il y a de « bonnes règles de calcul » entre les lois « $+$ » et « $\cdot$ ».

Par exemple :

- $\forall u \in E, \quad 0 \cdot u = 0_E$ (le vecteur nul).
- $\forall u \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \times \mu) \cdot u$.
- $\forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v \quad \text{et} \quad (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot u = 0_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E$.
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (u, v) \in E^2 : \begin{cases} \text{Si } \lambda \neq 0 \text{ alors } \lambda \cdot u = \lambda \cdot v \Rightarrow u = v. \\ \text{Si } u \neq 0_E \text{ alors } \lambda \cdot u = \mu \cdot u \Rightarrow \lambda = \mu. \end{cases}$

Les éléments de E sont des **vecteurs**.

Exemples de référence.

- $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel avec les lois $+$ et $\cdot$ définies par $\forall u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot u = (\lambda \times x_1, \dots, \lambda \times x_n).$$

- L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices de taille (n, p) est un espace vectoriel pour les lois usuelles.
- Les ensembles $\mathbb{R}[x]$ et $\mathbb{R}_n[x]$, respectivement des applications polynomiales et des applications polynomiales de degré au plus n , sont des espaces vectoriels pour les lois usuelles.
- L'ensemble $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ des applications d'un ensemble I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel pour les lois usuelles.



Attention. Un espace vectoriel n'est jamais vide.

Combinaisons linéaires, sous-espaces vectoriels

Dans la suite, une famille finie de vecteurs de E est la donnée d'une liste finie $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de vecteurs de E . Le cardinal de la famille est alors le nombre de vecteurs.

DÉFINITION

combinaison linéaire

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille finie de vecteurs de E .

On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, \dots, u_n$, tout vecteur v s'écrivant

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_i \quad \text{avec pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

DÉFINITION

sous-espaces vectoriels

Soient E un espace vectoriel et F une partie de E . F est un **sous-espace vectoriel** de E si

- F est non vide.
- F est stable par somme, c'est-à-dire : $\forall (u, v) \in F^2, \quad u + v \in F$.
- F est stable par multiplication par un nombre, c'est-à-dire : $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot u \in F$.

Remarque. Les sous-espaces vectoriels sont les parties (non vides) de E stables par combinaisons linéaires.

Méthodes.

- Pour vérifier que F est un sous-espace vectoriel, on se contente de vérifier que pour tout nombre λ et tous vecteurs u, v de F , $\lambda \cdot u + v \in F$ et $F \neq \emptyset$. Pour le second point, il suffit d'exhiber un élément de F , le plus simple étant 0_E .
- De plus, on démontre que tout sous-espace vectoriel est un espace vectoriel. Donc, en pratique, lorsqu'on souhaite prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel, on montre que l'ensemble en question est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}[x], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \dots)$

Exercice 1



◇ Les ensembles suivants, munis des lois usuelles, sont-ils des espaces vectoriels?

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}, & E_2 &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = 2a + c\}, & E_3 &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - b = 2\}, \\ E_4 &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + c^2 = b\}, & E_5 &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid abc = 0\}, & E_6 &= \{P \in \mathbb{R}[x] \mid P(0) = 3\}, \\ E_7 &= \{P \in \mathbb{R}[x] \mid P(3) = 0\}, & E_8 &= \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq K\}, \\ E_9 &= \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq K\} \text{ où } K \in \mathbb{R}_*^+ \text{ est fixé}, & E_{10} &= \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est paire}\}. \end{aligned}$$

p. 34

CA1

PROPOSITION

intersection de sous-espaces

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

Alors l'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .



Attention. En général, c'est faux pour la réunion.

Exercice 2



◆◆ Soient E un espace vectoriel et E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E . On suppose que $E_1 \cup E_2$ est un sous-espace vectoriel de E . On veut montrer qu'alors $E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$. Si $E_1 \subset E_2$, alors la conclusion est vérifiée. Supposons donc que E_1 ne soit pas inclus dans E_2 . Montrer que nécessairement $E_2 \subset E_1$.

p. 35

CA2

DÉFINITION

sous-espace vectoriel engendré par une partie finie

Soient E un espace vectoriel et X une partie finie de E .

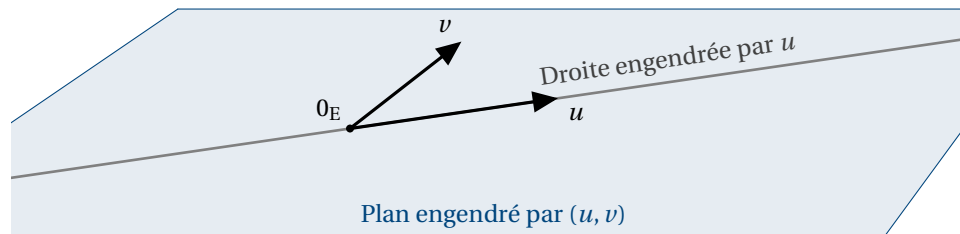
L'espace vectoriel engendré par X est défini par l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X . On le note $\text{Vect}(X)$. Autrement dit, si $X = \{u_1, \dots, u_n\}$, alors

$$\text{Vect}(X) = \left\{ v \in E \mid \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_i \right\}.$$

Remarque. Comme son nom l'indique, $\text{Vect}(X)$ est un sous-espace vectoriel de E . En particulier, il contient le vecteur nul.

Vocabulaire.

- Un espace vectoriel engendré par un vecteur non nul est une **droite vectorielle**.
- Un espace vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires est un **plan vectoriel**.



Pour rappel, deux vecteurs u, v sont **non colinéaires** s'ils sont non nuls et il n'existe pas de réel λ tel que $u = \lambda \cdot v$.

Familles génératrices, libres et bases

DÉFINITION

famille libre finie

Soient E un espace vectoriel et $m \in \mathbb{N}^*$, on dit que la famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_m)$ de vecteurs de E est une **famille libre** si la seule combinaison linéaire nulle est la combinaison linéaire à coefficients nuls. Autrement dit,

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m, \quad \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot u_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in [1, m], \quad \lambda_i = 0 \right).$$

Remarque. Soit $(u, v) \in E^2$. La famille (u, v) est libre si et seulement si les vecteurs u et v sont non colinéaires.

Exemple. Dans le cas des polynômes : une famille finie $(Q_1, \dots, Q_r)$ de $\mathbb{R}[x]$ est une famille libre si elle est de **degrés échelonnés**. C'est-à-dire,

$$0 \leq \deg(Q_1) < \deg(Q_2) < \dots < \deg(Q_r).$$

Exercice 3. ♦ Exemples

CA3

1. Dans $\mathbb{R}^4$: Montrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est libre où

$$\varepsilon_1 = (3, -1, 1, 0), \quad \varepsilon_2 = (1, 1, -1, 0), \quad \varepsilon_3 = (-1, 2, 1, 0) \quad \text{et} \quad \varepsilon_4 = (1, 1, 1, 1).$$

2. À quelle condition sur le polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$ la famille $(P^{(k)})_{k \in [0; n]}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[x]$?

3. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: Posons $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Justifier que la famille (A, B, C, D) est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Que dire de la liberté de la famille (A, B, C, D, I_2) ?

4. ♦♦ Dans les espaces fonctionnels : Étudier la liberté des familles suivantes.

- a) La famille formée de $f_1 = \ln$, $f_2 = \exp$ et $f_3 = \text{id}_{\mathbb{R}}$ dans $\mathcal{A}(\mathbb{R}_*, \mathbb{R})$.
- b) La famille $\mathcal{F} = (\tan, \tan^2, \dots, \tan^n)$ dans $\mathcal{A}([-\pi/2, \pi/2[, \mathbb{R})$.
- c) La famille $(f_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ où $f_i : x \in \mathbb{R} \mapsto |x - i| \in \mathbb{R}$ dans $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

DÉFINITION

famille génératrice finie

Soit $\mathcal{G} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille finie de vecteurs de E .

On dit que $\mathcal{G}$ est une **famille génératrice** de E , si tout vecteur de E peut s'obtenir comme combinaison linéaire à partir des vecteurs de $\mathcal{G}$. Autrement dit si,

$$\text{Pour tout vecteur } v \in E, \text{ il existe } \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \text{ tels que } v = \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot u_i.$$

Remarque. Sous forme condensée, $\mathcal{G}$ est génératrice de E si $\text{Vect}(\mathcal{G}) = E$.

Exercice 4



♦ Dans chacun des cas suivants, donner une famille génératrice de l'espace vectoriel.

1. $F = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = z\}$.
2. G : l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n et impairs.
3. H : l'espace des matrices symétriques de taille 3.

p. 36

CA4

DÉFINITION

base

On appelle **base** d'un espace vectoriel E , toute famille libre et génératrice de E .

Exemples. Les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- La famille $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ où $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ avec 1 en i -ème position est une base de $\mathbb{R}^n$.
- La famille $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
- La famille des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Pour rappel, la matrice élémentaire $E_{i,j}$ est la matrice ne contenant que des 0, sauf un 1 en position (i, j) .

PROPOSITION

coordonnées d'un vecteur dans une base

Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille finie de E à n éléments.

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i) La famille $\mathcal{B}$ est une base de E .
- ii) Pour tout vecteur v de E ,
il existe un unique n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $v = \sum_{i=1}^n x_i \cdot u_i$.

Dans ce cas, $(x_1, \dots, x_n)$ sont les **coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$** .

1.2 Rappels : sommes de deux s.e.v et supplémentaires

DÉFINITION

somme de sous-espaces, somme directe

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

- Le **sous-espace somme** est défini par $F + G = \{u + v \mid (u, v) \in F \times G\}$.
- On dit que F et G sont en **somme directe**, notée $F \oplus G$, si $F \cap G = \{0_E\}$.

Remarques.

- $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant F et G .
- On montre que F et G sont en somme directe si et seulement si

$$\forall u \in F, \quad \forall v \in G, \quad u + v = 0_E \Rightarrow u = v = 0_E.$$

PROPOSITION

unicité de la décomposition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i) Les sous-espaces F et G sont en somme directe.
- ii) Tout vecteur $u \in F + G$ s'écrit de manière unique sous la forme :
$$u = u_F + u_G \quad \text{avec} \quad u_F \in F, \quad u_G \in G.$$

Exercice 5



◆ Prouver cette équivalence.

p. 56

CA5

DÉFINITION

supplémentaire

Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

On dit que F et G sont **supplémentaires** si tout vecteur de E se décompose de façon unique en une somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G . C'est-à-dire

$$\forall w \in E, \quad \exists! (u, v) \in F \times G, \quad w = u + v.$$



Attention. Il n'y a pas unicité du supplémentaire. Il ne faut pas confondre supplémentaire et complémentaire.

Remarque. Le raisonnement par analyse-synthèse est particulièrement adapté à cette définition.

Exemple. Pour $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, posons

$$F = \{D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid D \text{ est diagonale}\}, \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(A_1, A_2) \quad \text{avec} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Montrons que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

→ Analyse (recherche des conditions nécessaires).

Supposons qu'il existe $M_F \in F$ et $M_G \in G$ telles que $M = M_F + M_G$. En particulier, il existe $d_1, d_2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$M_F = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_G = \lambda A_1 + \mu A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \lambda + \mu \\ -\mu & 0 \end{bmatrix}.$$

La condition $M = M_F + M_G$ se réécrit $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & \lambda + \mu \\ -\mu & d_2 \end{bmatrix}$ c'est-à-dire $\begin{cases} a = d_1 \\ b = \lambda + \mu \\ c = -\mu \\ d = d_2 \end{cases}$

Ainsi $d_1 = a$, $d_2 = d$, $\lambda = b + c$ et $\mu = -c$. Si une telle décomposition de M existe, elle est donc unique.

— Synthèse (recherche des conditions suffisantes).

Le calcul précédent suggère de poser $M_F = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ et $M_G = (b + c)A_1 - cA_2$.

Vérifions que cette décomposition convient :

- M_F est une matrice diagonale, donc $M_F \in F$.
- M_G est une combinaison linéaire de la famille (A_1, A_2) , donc $M_G \in G$.
- $M_F + M_G = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} + (b + c)A_1 - cA_2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = M$.

Le couple (M_F, M_G) est une solution du problème.

— Conclusion.

Toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice de F et d'une matrice de G . Par définition, F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 6



Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$, $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_2 = (1, 1, 1)$.
Montrer que $\text{Vect}(u_1)$ et $\text{Vect}(u_2)$ sont deux supplémentaires de F dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Notons $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ les sous-espaces vectoriels des matrices symétriques et antisymétriques de taille n . Justifier que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont supplémentaires.
Rappel : A est symétrique si ${}^tA = A$ et antisymétrique si ${}^tA = -A$.

p. 37

CA6

PROPOSITION

caractérisation des supplémentaires

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i) Les sous-espaces F et G sont supplémentaires.
- ii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$.

On a donc : F et G sont supplémentaires si et seulement si $F \oplus G = E$.

1.3 Rappels : précisions en dimension finie

Lorsqu'un espace vectoriel E est de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre est la dimension de E .

Exercice 7



Donner une base des espaces vectoriels suivants, préciser la dimension.

1. $E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a + b + c + d = 0 \right\}$.
2. $E_2 = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P'(1) = 0\}$.
3. $E_3 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ est diagonale}\}$.

p. 38

CA7

PROPOSITION

cardinal d'une famille libre/génératrice

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{L}, \mathcal{G}$ deux familles de E .

- Si** | $\rightarrow$ La famille $\mathcal{L}$ est libre.
 $\rightarrow$ La famille $\mathcal{G}$ est génératrice de E .

Alors $\text{Card}(\mathcal{L}) \leq \dim(E)$ et $\dim(E) \leq \text{Card}(\mathcal{G})$.

Remarque. La preuve du premier point est basée sur le *théorème de la base incomplète*. En dimension finie, on peut compléter toute famille libre de vecteurs de E en une base de E . Pour le second point, on montre que l'on peut extraire une base de E de n'importe quelle famille génératrice de E .

PROPOSITION

cas d'égalité

Soit E un espace de dimension finie.

- Une famille libre $\mathcal{L}$ de cardinal $\dim(E)$ est une base.
- Une famille génératrice $\mathcal{G}$ de cardinal $\dim(E)$ est une base.

Exercice 8**♦♦ Exemple d'application**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts deux à deux. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \neq i}} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}.$$

p. 38

1. En revenant à la définition, montrer que $(L_1, \dots, L_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
D'après l'énoncé précédent, cette famille est donc une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
2. En revenant à la définition, montrer que $(L_1, \dots, L_n)$ est génératrice de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
On retrouve le fait que la famille est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

CA8

PROPOSITION

existence d'un supplémentaire

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire.

Preuve. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Si $F = \{0_E\}$ (ou $F = E$), alors E (ou $\{0_E\}$) est un supplémentaire de F . Supposons donc que F n'est pas trivial.

Le sous-espace F étant de dimension finie, il admet une base $(e_1, e_2, \dots, e_p)$. Par le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $e_{p+1}, \dots, e_n$ tels que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base de E . On vérifie alors que le sous-espace $H = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est bien un supplémentaire de F .

Remarque. Concaténation de bases.

Soient $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_G = (f_1, \dots, f_r)$ des bases respectivement de F et G . On montre que si F et G sont en somme directe, alors $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r)$ est une base de $F \oplus G$.

On en déduit l'énoncé suivant.

PROPOSITION

cas de la somme directe

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

Si F et G sont en somme directe, alors

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G).$$

THÉORÈME

formule de Grassmann

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors,

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Exercice 9



◆ Preuve

1. Soit F_1 un supplémentaire de $F \cap G$ dans F . Montrer que $F_1 \oplus G = F + G$.
2. Conclure en prouvant la formule de Grassmann.

p. 38

CA9

PROPOSITION

caractérisation des supplémentaires

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Les trois énoncés suivants sont équivalents.

- i) F et G sont supplémentaires.
- ii) $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
- iii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Exercice 10



◆◆ Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. On considère $u = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et

$$F = \text{Vect}(u) \quad \text{et} \quad G = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n a_k x_k = 0 \right\}.$$

p. 39

1. F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, préciser les dimensions de F et G .
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.
3. Représenter dans le plan les sous-espaces vectoriels F et G lorsque $u = (1, 1)$.

CA10

1.4 Compléments : sommes de p sous-espaces vectoriels

Sommes de sous-espaces vectoriels

DÉFINITION

somme de s.e.v

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .

On appelle **somme** de $F_1, \dots, F_p$, notée $\sum_{i=1}^p F_i$, l'ensemble

$$\sum_{i=1}^p F_i = \left\{ u_1 + \dots + u_p \mid \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, u_i \in F_i \right\}.$$

Remarque. $\sum_{i=1}^p F_i$ est un s.e.v de E , c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les F_i .

Exemples.

- Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Notons $\mathcal{T}^+$, $\mathcal{T}^-$ et $\mathcal{D}$ respectivement l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes, inférieures strictes et diagonales de taille (n, n) . Ces trois ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{T}^+ + \mathcal{T}^- + \mathcal{D}.$$

En effet, pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket}$, on peut écrire

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\in \mathcal{T}^+} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\in \mathcal{T}^-} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}}_{\in \mathcal{D}}.$$

- Soit $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E .

$$\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p) = \text{Vect}(e_1) + \text{Vect}(e_2) + \dots + \text{Vect}(e_p).$$

Exercice 11



◇ Soient $F_1, \dots, F_p$, des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .

1. Montrer que $\sum_{i=1}^p F_i$ est bien un sous-espace vectoriel de E .
2. Soit H , un sous-espace vectoriel de E tel que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $F_i \subset H$.
Montrer que $\sum_{i=1}^p F_i \subset H$.

p. 39

CA11

PROPOSITION

somme et dimension

Soient $F_1, \dots, F_p$, des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .

Si les F_i sont tous de dimension finie, **alors** $\sum_{i=1}^p F_i$ est aussi de dimension finie avec

$$\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i).$$

Preuve. Rappelons que, d'après la formule de Grassmann, pour F, G deux s.e.v de E de dimension finie

$$\dim(F + G) \leq \dim(F) + \dim(G) \quad \text{car} \quad \dim(F \cap G) \geq 0.$$

La proposition s'en déduit par récurrence. ■

Sommes directes, généralisation à p sous-espaces vectoriels

DÉFINITION

somme directe

La somme de p sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \dots, F_p$ d'un espace vectoriel E est dite **directe** si

$$\forall (u_1, \dots, u_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, \quad u_1 + \dots + u_p = 0_E \Rightarrow u_1 = \dots = u_p = 0_E.$$

La somme directe des s.e.v $F_1, F_2, \dots, F_p$ est notée $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$.

Exemples.

- En reprenant l'exemple précédent, on a même $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{T}^+ \oplus \mathcal{T}^- \oplus \mathcal{D}$.
- Si pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $F_i = \text{Vect}(e_i)$ où e_i est un vecteur de E non nul alors la somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe si et seulement si la famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est libre.

Preuve. Raisonnons par double implication.

⇒ Supposons la famille libre et montrons que la somme est directe. Soit $(u_1, u_2, \dots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p$ tel que $\sum_{i=1}^p u_i = 0_E$.
Il existe donc $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ tels que $u_1 = \lambda_1 e_1, u_2 = \lambda_2 e_2, \dots, u_p = \lambda_p e_p$. On a donc

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_p e_p = 0_E.$$

Comme la famille est libre, chaque λ_i vaut 0, $u_i = \lambda_i e_i = 0_E$. La somme est directe.

⊞ Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\underbrace{\lambda_1 e_1}_{\in F_1} + \underbrace{\lambda_2 e_2}_{\in F_2} + \dots + \underbrace{\lambda_p e_p}_{\in F_p} = 0_E.$$

Si la somme est directe, chaque $\lambda_i e_i$ vaut 0_E . Comme $e_i \neq 0_E$, on a $\lambda_i = 0$. La famille est libre.

Exercice 12



♦ Soient F_1, F_2 et F_3 trois s.e.v de E tels que

$$F_1 \cap F_2 = \{0_E\}, \quad F_2 \cap F_3 = \{0_E\} \quad \text{et} \quad F_1 \cap F_3 = \{0_E\}.$$

p. 39

A-t-on nécessairement $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$?

CA12

PROPOSITION

somme directe et unicité

Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E . On a équivalence entre :

- i) La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe.
- ii) Tout vecteur de $F_1 + F_2 + \dots + F_p$ s'écrit d'une manière unique comme somme de vecteurs de $F_1, F_2, \dots, F_p$.

Autrement dit,

$$\forall u \in F_1 + F_2 + \dots + F_p, \quad \exists! (u_1, u_2, \dots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p \\ u = u_1 + u_2 + \dots + u_p.$$

Preuve. Raisonnons par double implication.

⇒ Supposons i). Soit $u \in F_1 + F_2 + \dots + F_p$. Par définition de la somme, u se décompose comme somme de vecteurs des F_i . Justifions l'unicité de la décomposition.

Soient $u_1 \in F_1, v_1 \in F_1, u_2 \in F_2, v_2 \in F_2, \dots, u_p \in F_p, v_p \in F_p$ tels que

$$u = \sum_{i=1}^p u_i \quad \text{et} \quad u = \sum_{i=1}^p v_i.$$

Par linéarité de la somme

$$\sum_{i=1}^p \underbrace{(u_i - v_i)}_{\in F_i} = \sum_{i=1}^p u_i - \sum_{i=1}^p v_i = u - u = 0_E.$$

Par définition de la somme directe, pour tout indice i , $u_i - v_i = 0_E$, puis $u_i = v_i$. Ceci prouve l'unicité de l'énoncé ii).

⇐ Réciproquement, supposons ii). Soit $(u_1, u_2, \dots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p$ tels que $0_E = u = \sum_{i=1}^p u_i$. On a donc

$$\underbrace{u_1}_{\in F_1} + \underbrace{0_E}_{\in F_2} + \dots + \underbrace{u_p}_{\in F_p} = 0_E \\ \underbrace{0_E}_{\in F_1} + \underbrace{0_E}_{\in F_2} + \dots + \underbrace{0_E}_{\in F_p} = 0_E.$$

Par unicité de la décomposition, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $u_i = 0_E$. La somme est directe.

Rappel sur la concaténation.

Lorsqu'on dispose de plusieurs familles de vecteurs de E , on peut les concaténer. C'est-à-dire qu'on les regroupe pour former une nouvelle famille.

THÉORÈME

caractérisation par concaténation de bases

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E .

Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_p$ des bases respectivement de $F_1, F_2, \dots, F_p$. Les énoncés suivants sont équivalents.

- i) La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe.
- ii) La famille $\mathcal{B}$, obtenue par concaténation des familles $\mathcal{B}_i$, est une base de $\sum_{i=1}^p F_i$.

Preuve. Raisonnons par double implication.

⇒ Supposons la somme $\sum_{i=1}^p F_i$ directe. Soit $u \in \sum_{i=1}^p F_i$. Le vecteur u s'écrit de manière unique sous la forme

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_p \quad \text{avec} \quad u_i \in F_i.$$

De plus, par définition d'une base, chaque u_i s'écrit de manière unique dans la base $\mathcal{B}_i$. Au final, u s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de la famille $\mathcal{B}$. Ceci étant vrai pour tout vecteur u arbitrairement choisi, $\mathcal{B}$ est donc une base de $\sum_{i=1}^p F_i$.

⇐ Réciproquement, supposons que $\mathcal{B}$ est une base de $\sum_{i=1}^p F_i$. Notons

$$\mathcal{B} = \underbrace{(e_1, e_2, \dots, e_{j_1})}_{\text{vecteurs de } \mathcal{B}_1}, \underbrace{(e_{j_1+1}, e_{j_1+2}, \dots, e_{j_2})}_{\text{vecteurs de } \mathcal{B}_2}, \dots, \underbrace{(e_{j_{p-1}+1}, e_{j_{p-1}+2}, \dots, e_{j_p})}_{\text{vecteurs de } \mathcal{B}_p}.$$

Soit $(u_1, u_2, \dots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p$ tel que $u_1 + u_2 + \dots + u_p = 0_E$. Or, pour tout indice i , le vecteur u_i se décompose dans la base $\mathcal{B}_i$ de F_i .

$$\exists (\lambda_k) \in \mathbb{R} \quad u_i = \sum_{k=j_{i-1}+1}^{j_i} \lambda_k e_k \quad (\text{avec la convention } j_0 = 0).$$

Puis par somme $\sum_{k=1}^{j_p} \lambda_k e_k = 0_E$. Comme la famille $\mathcal{B} = (e_k)_{k \in [1; j_p]}$ est libre, pour chaque indice k , $\lambda_k = 0$, puis pour chaque indice i , $u_i = 0_E$. On a vérifié la définition, la somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe. ■

Exercice 13



♦♦ **Exemple.** Dans $\mathbb{R}^4$, on pose

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = z + t = 0\}, \quad G = \text{Vect}(u), \quad H = \text{Vect}(v) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u = (1, 0, 1, 0) \\ v = (0, 1, 0, 1). \end{cases} \quad \text{p. 40}$$

1. Donner une base de F .
2. Vérifier que $F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}^4$ à l'aide du théorème précédent.

CA13

THÉORÈME

caractérisation en dimension finie

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E . On a l'équivalence entre les énoncés suivants.

- i) La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe.
- ii) $\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) = \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$.

Preuve. Raisonnons de nouveau par double implication.

⇒ Si la somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe alors la famille $\mathcal{B}$ obtenue par concaténation de différentes bases de F_i en est une base. Par définition de la dimension :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) = \text{Card}(\mathcal{B}) = \sum_{i=1}^p \text{Card}(\mathcal{B}_i) = \sum_{i=1}^p \dim(F_i).$$

L'énoncé ii) est prouvé.

⇐ Réciproquement, s'il y a égalité des dimensions.

- La famille $\mathcal{B}$ contient $\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right)$ vecteurs.
- Par définition de la somme, $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $\sum_{i=1}^p F_i$.

On sait alors (voir cas d'égalité page 7) que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\sum_{i=1}^p F_i$. D'après le théorème précédent, on conclut que la somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe. ■

Remarque. Donnons une seconde démonstration de cet énoncé.

Pour cela, rappelons un résultat sur les produits cartésiens d'espaces vectoriels. Si $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, alors $\prod_{i=1}^p F_i$ est un espace vectoriel de dimension finie avec

$$\dim\left(\prod_{i=1}^p F_i\right) = \sum_{i=1}^p \dim(F_i).$$

La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe si et seulement si l'application linéaire

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^p F_i & \rightarrow \sum_{i=1}^p F_i \\ (u_1, u_2, \dots, u_p) & \mapsto u_1 + u_2 + \dots + u_p \end{cases}$$

est injective. Comme l'application est toujours surjective par définition de la somme de sous-espaces vectoriels, la somme est directe si et seulement si cette application linéaire est un isomorphisme, si et seulement si on a l'égalité des dimensions.

Exemple. Reprenons l'exemple précédent.

$$\dim(\mathcal{T}^+) + \dim(\mathcal{T}^-) + \dim(\mathcal{D}) = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})).$$

Exercice 14



◆ Soient F_1, F_2 et F_3 trois sous-espaces vectoriels de E tels que

$$F_1 \cap F_2 = \{0_E\}, \quad F_2 \cap F_3 = \{0_E\}, \quad F_1 \cap F_3 = \{0_E\}$$

$$\text{et } \dim(F_1) + \dim(F_2) + \dim(F_3) = \dim(E).$$

A-t-on nécessairement $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = E$?

p. 40

CA14

◆◆◆ Exemple

Dans $\mathbb{R}_3[x]$, on pose :

$$\begin{aligned} F &= \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\}, & V &= \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(1) = P(2) = 0\}, \\ G &= \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}, & H &= \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(x) = P(-x)\}. \end{aligned}$$

p. 40

1. Préciser les dimensions de chacun de ces sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. ◆ Montrer que $V \oplus H = \mathbb{R}_3[x]$.
3. ◆ Justifier que $F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}_3[x]$.

CA15

2

Matrices et applications linéaires

2.1 Rappels : définitions et théorèmes

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base d'un espace vectoriel E , alors pour tout vecteur u de E , il existe un unique n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$u = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Dans ce cas, $(x_1, \dots, x_n)$ sont les **coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$** . On définit la **matrice colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$** par

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Exercice 16



Les questions sont indépendantes.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, posons $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3)$, $u_3 = (1, 1, 0)$.
Vérifier que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, et donner la matrice des coordonnées du vecteur $v = (0, 1, 0)$ dans cette base.
2. Donner la matrice des coordonnées de $(1 + x)^n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

p. 40

CA16

Généralisation. Soient $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E et $\mathcal{B}$ une base de E (de dimension n).

Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $(x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{n,k})$ les coordonnées de u_k dans la base $\mathcal{B}$.

On appelle **matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$** , notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$, la matrice dont les colonnes sont les matrices coordonnées des vecteurs de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,p} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,p} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

Autrement dit, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ s'obtient en concaténant les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs de la famille.

Remarque. On a l'équivalence entre les deux énoncés suivants :

- La famille $\mathcal{F}$ est une base de E ;
- La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible.

DÉFINITION

matrice d'une application linéaire

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathcal{B}_F$ deux bases respectives de E et F .

La matrice de $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est la matrice de la famille $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p))$ dans la base $\mathcal{B}_F$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)).$$

Elle est notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$.

Représentation

Notons $(e_1, \dots, e_p)$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ des bases de E et F . Une manière commode de se représenter la matrice est de placer en colonne les composantes des images de la base $(e_1, \dots, e_p)$ par φ dans la base d'arrivée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Le coefficient en position (i, j) de la matrice est la composante de $\varphi(e_j)$ suivant le vecteur ε_i .

$$\begin{array}{cccccc} & \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & & \varphi(e_p) & \\ \left[\begin{array}{ccccc} * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & * & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & * \end{array} \right] & \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array} \end{array}$$

Remarques.

- La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$ a $\dim(E)$ colonnes et $\dim(F)$ lignes.
- Dans le cas d'un endomorphisme ($E = F$), on peut choisir $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$. On note simplement $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\varphi)$ au lieu de $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E}(\varphi)$.

Exemples.

- La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\text{id}_E)$ de l'application identité est la matrice identité I_p où $p = \dim(E)$.
- La matrice de l'application nulle $u \in E \mapsto 0_F \in F$ est $0_{n,p}$ avec $n = \dim(F)$, $p = \dim(E)$.

THÉORÈME

isomorphisme

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie (de dimensions respectives p et n) et $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ deux bases respectives de E et F .

Alors l'application $\Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ \varphi & \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) \end{cases}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

En particulier, pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi + \psi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) + \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\psi) \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\lambda\varphi) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi).$$

Conséquences.

- À toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ correspond une unique application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ dont A soit la matrice dans les bases canoniques.

Elle est appelée **l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A** .

- En dimension finie, il ne peut y avoir d'isomorphisme si la dimension de l'espace de départ ne coïncide pas avec la dimension de l'espace d'arrivée. Ainsi, l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F est aussi de dimension finie et

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = pn = \dim(E) \times \dim(F).$$

THÉORÈME

image d'un vecteur

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$.

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u \in E$.

Si on note $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow U \text{ la matrice colonne des coordonnées de } u \text{ dans la base } \mathcal{B}_E. \\ \rightarrow V \text{ la matrice colonne des coordonnées de } \varphi(u) \text{ dans la base } \mathcal{B}_F. \\ \rightarrow A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi), \text{ la matrice de l'application } \varphi \text{ dans les bases } \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \end{array} \right.$

alors

$$AU = V.$$

Preuve. Posons $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et $u = \sum_{j=1}^p x_j e_j$, de sorte que $U = {}^t[x_1 \quad \dots \quad x_p]$.

Par définition :

$$\rightarrow A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad \text{où} \quad \forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \varepsilon_i.$$

$$\rightarrow AU = {}^t[y_1 \quad \dots \quad y_n], \quad \text{où} \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad y_i = \sum_{j=1}^p a_{i,j} x_j.$$

Alors
$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{j=1}^p x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^p x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n a_{i,j} x_j \varepsilon_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p a_{i,j} x_j\right) \varepsilon_i.$$

D'où le résultat car $V = {}^t[y_1 \quad \dots \quad y_n]$. ■

Remarques.

- Cette relation s'écrit directement

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u).$$

- Cette formule s'étend par concaténation aux matrices d'une famille de vecteurs.

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(u_1, \dots, u_q)$ une famille de vecteurs de E . Alors

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_q)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u_1, \dots, u_q)} \quad (\bullet)$$

THÉORÈME

produit matriciel et composition d'applications

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$.
Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_E}(\psi \circ \varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_F}(\psi) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi).$$

Preuve. Posons $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$. Par définition de la matrice de $\psi \circ \varphi$ dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$, on a

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_E}(\psi \circ \varphi) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_G}(\psi \circ \varphi(e_1), \dots, \psi \circ \varphi(e_p)) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_G}(\psi(\varphi(e_1)), \dots, \psi(\varphi(e_p))) \\ \text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_E}(\psi \circ \varphi) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_F}(\psi) \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)), \quad \text{d'après l'égalité } (\bullet). \end{aligned}$$

Or par définition, $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p))$,

donc finalement $\text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_E}(\psi \circ \varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_F}(\psi) \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$. ■

COROLLAIRE

inversibilité et isomorphisme

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ deux bases respectives de E et F . Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i) L'application linéaire φ est bijective.
- ii) La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$ est inversible.

Dans ce cas, $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)^{-1}$.

Exercice 17



- ◆ Prouver cet énoncé grâce au théorème précédent.
On pourra utiliser la caractérisation de la bijectivité.

p. 41

CA17

Exercice 18



- ◆◆ Les questions 1 et 2 sont indépendantes.
- 1. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $\varphi(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.
À quelle condition sur a, b, c et d , φ est bijective?
- 2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer A , la matrice de $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto P(x+1) \in \mathbb{R}_n[x]$ dans la base canonique.
- b) Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1} .

p. 41

CA18

2.2 Rappels : noyau, image et rang

Les définitions et le calcul

DÉFINITION

noyau, image et rang d'une matrice

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on définit :

Le noyau de A par $\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{n,1}\}.$

L'image de A par $\text{Im}(A) = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), AX = Y\} = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}.$

Le rang de A , noté $\text{rg}(A)$, est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Autrement dit, si $A = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_p]$ alors

$$\text{rg}(A) = \dim(\text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_p)).$$

• Propriétés de calcul.

→ Le rang est invariant par transposition, autrement dit

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad \text{rg}(A) = \text{rg}(A^t).$$

→ Le rang est invariant par les opérations élémentaires :

- L'échange de lignes ou de colonnes ($L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$).
- La multiplication d'une ligne ou d'une colonne par $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ($L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_i \leftarrow \lambda C_i$).
- L'addition d'une autre ligne ou colonne ($L_i \leftarrow L_i + L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + C_j$).

On peut fusionner les deux dernières opérations pour effectuer $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $i \neq j$ sans modifier le rang.

Remarque. Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a toujours $\text{rg}(A) \leq p$, puisqu'il y a au plus p colonnes. Comme le rang est invariant par transposition, on a aussi $\text{rg}(A) \leq n$. Retenons que

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad \text{rg}(A) \leq \min(n, p).$$

Exercice 19



♦ Calculer les noyaux des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B_\alpha = \begin{bmatrix} 2-\alpha & 3 & 1 \\ 5 & 6+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & -2-\alpha \end{bmatrix} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}. \quad \text{p. 42}$$

CA19

Exercice 20



♦ Calculer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 9 \\ -1 & 2 & 5 & -5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \alpha I_2 \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}. \quad \text{p. 43}$$

CA20

DÉFINITION

noyau, image et rang d'une application linéaire

Pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit :

Le noyau de φ par $\text{Ker}(\varphi) = \{u \in E \mid \varphi(u) = 0_F\}.$

L'image de φ par $\text{Im}(\varphi) = \{v \in F \mid \exists u \in E, \varphi(u) = v\} = \{\varphi(u) \mid u \in E\}.$

Le rang de φ , noté $\text{rg}(\varphi)$, est défini par $\text{rg}(\varphi) = \dim(\text{Im}(\varphi)).$

Exercice 21



♦ On admet que les applications suivantes sont linéaires. Déterminer leur noyau.

$$\begin{aligned}\varphi_1 : P \in \mathbb{R}[x] &\mapsto P'' \in \mathbb{R}[x], & \varphi_2 : P \in \mathbb{R}_2[x] &\mapsto (P(1), P(0), P(-1)) \in \mathbb{R}^3, \\ \varphi_3 : P \in \mathbb{R}[x] &\mapsto P - P' \in \mathbb{R}[x] & \text{et} & \varphi_4 : P \in \mathbb{R}[x] &\mapsto P(x+1) - P(x-1) \in \mathbb{R}[x].\end{aligned}$$

p. 43

CA21

Remarque. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$. Ainsi le rang de φ correspond au rang de la famille image $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$.

PROPOSITION

rang d'une matrice et d'une application linéaire

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ deux bases respectives de E et F .

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$. Alors,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(\varphi).$$

Formule du rang et conséquences

THÉORÈME

formule du rang

Soient E, F deux espaces vectoriels avec E de dimension finie et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\dim(\text{Ker}(\varphi)) + \text{rg}(\varphi) = \dim(E).$$

Rappels. L'application $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective si et seulement si $\text{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$.

L'application φ est surjective si et seulement si $\text{Im}(\varphi) = F$. Dans le cas où F est de dimension finie, on a aussi la surjectivité de φ si et seulement si $\text{rg}(\varphi) = \dim(F)$. À partir de la formule du rang, on montre les énoncés suivants :

• Version endomorphisme

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et φ un endomorphisme de E . On a équivalence entre :

- i) φ est injective ($\text{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$).
- ii) φ est surjective ($\text{rg}(\varphi) = n$).
- iii) φ est bijective.

• Version matricielle

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a équivalence entre :

- i) $\text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$.
- ii) $\text{rg}(A) = n$.
- iii) A est inversible.

Exercice 22



♦ Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

1. Montrer que $\text{rg}(g) \leq 2$.
2. En déduire que $g \circ f$ n'est ni injective, ni surjective.

p. 44

CA22

2.3 Compléments : matrices de passage

DÉFINITION

cas particulier des matrices de passage

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, deux bases de E .

La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est appelée **matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$** . On la note $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$.

Autrement dit, la j -ème colonne de $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ est la matrice-colonne des coordonnées du j -ème vecteur de $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple. Soient $u = (1, 2)$ et $v = (3, 4)$. On vérifie que la famille $\mathcal{C} = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. La matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ à la base $\mathcal{C}$ est

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

On vérifie que $e_1 = -2u + v$ et $e_2 = 3/2 u - 1/2 v$, d'où

$$P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

 **Attention.** On sera vigilant sur l'ordre.

Remarque. Pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, deux bases de E , on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\text{id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}.$$

En effet, si on note $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\text{id}_E) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & \text{id}(e_1) & \text{id}(e_2) & & \text{id}(e_n) \end{array} \\ \begin{bmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & * & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & * \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & e_1 & e_2 & & e_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & * & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & * \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}.$$

Remarque. Avec trois bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ de E , on a aussi

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{D}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \cdot P_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} \quad (\bullet)$$

Exercice 23



♦ On considère la base canonique $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$. On considère les familles de polynômes $\mathcal{C} = (1, x - a, (x - a)^2)$ et $\mathcal{D} = ((x - a)^2, (x - a)(x - b), (x - b)^2)$.

1. a) Justifier que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont deux autres bases de $\mathbb{R}_2[x]$.
b) Calculer $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$, $P_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}$ et $P_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}$. Vérifier par le calcul que $P_{\mathcal{B}, \mathcal{D}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \cdot P_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}$.
2. Prouver la relation $(\bullet)$ dans le cas général de trois bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ de E .

p. 44

CA23

PROPOSITION

coordonnées et changement de bases

Soient $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E .

Soit u un vecteur de E dont $U_{\mathcal{B}}$ et $U_{\mathcal{C}}$ sont les matrices-colonnes des coordonnées respectivement dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ alors

$$U_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} U_{\mathcal{C}}.$$

Preuve. L'énoncé est une conséquence du théorème page 14. Soit $u \in E$ tel que $U_{\mathcal{B}}$ (respectivement $U_{\mathcal{C}}$) est la matrice-colonne du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$). À partir de $u = \text{id}_E(u)$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\text{id}_E) \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u), \quad \text{puis} \quad U_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} U_{\mathcal{C}}.$$

Exercice 24



♦ Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, 2e_2 + e_3, 3e_3)$. Existe-t-il un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ ayant les mêmes coordonnées dans ces deux bases? On pourra dans un premier temps, traduire matriciellement le problème.

p. 44

CA24

PROPOSITION

inversibilité

Soient $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E . La matrice $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ est inversible avec

$$(P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}})^{-1} = P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}.$$

Autrement dit, l'inverse de la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.

Preuve. On a vu que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\text{id}_E)$. Comme $\text{id}_E \circ \text{id}_E = \text{id}_E$, on a

$$\begin{cases} \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\text{id}_E) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\text{id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\text{id}_E) = I_n \\ \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\text{id}_E) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\text{id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}}(\text{id}_E) = I_n. \end{cases}$$

Par définition, $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\text{id}_E)$ est inversible et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\text{id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\text{id}_E)^{-1}.$$

On en déduit le résultat. ■

Exemples. Vérifions la proposition précédente sur deux cas.

- On se place dans $\mathbb{R}^3$. Considérons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, la famille définie par

$$\varepsilon_1 = (1, 1, 1), \quad \varepsilon_2 = (2, 3, 2) \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 = (-1, -2, 0).$$

On vérifie que la famille $\mathcal{C}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$, elle contient exactement 3 vecteurs. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Il vient

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

D'après ce qui précède, $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ est inversible. On peut calculer l'inverse par un pivot de Gauss, on trouve

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On peut vérifier ce calcul, par exemple, à l'aide de la première colonne

$$e_1 = 4\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3 \iff (1, 0, 0) = 4(1, 1, 1) - 2(2, 3, 2) - (-1, -2, 0).$$

• Matrices de rotation

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^2$, notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique et la famille $\mathcal{C}$ composée des deux vecteurs

$$\varepsilon_1 = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = (-\sin(\alpha), \cos(\alpha)).$$

Les vecteurs ε_1 et ε_2 s'obtiennent par rotation d'angle α et de centre l'origine à partir des vecteurs e_1 et e_2 . La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est alors :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

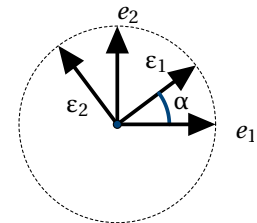
Cette matrice est de déterminant $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1 \neq 0$. La formule de l'inverse pour les matrices (2, 2) donne

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Or, les vecteurs e_1 et e_2 s'obtiennent aussi à partir de ε_1 et ε_2 par une rotation d'un angle $-\alpha$. La matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ s'obtient donc ici en remplaçant α par $-\alpha$ dans l'expression de $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$. En utilisant la parité du cosinus et l'imparité du sinus, il vient :

$$P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

On retrouve bien l'égalité $P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}})^{-1}$.



THÉORÈME

formule de changement de bases

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E . Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{-1} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}.$$

Preuve. Partons de l'égalité $\varphi = \text{id}_E \circ \varphi \circ \text{id}_E$. Matriciellement, on obtient

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) &= \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\text{id}_E) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\text{id}_E) \\ &= P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}. \end{aligned}$$

Enfin, la proposition précédente donne le résultat :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{-1} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}.$$

Remarque. On peut généraliser la formule de changement de bases. Si $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F , deux espaces de dimension finie. Si $\mathcal{B}_E, \mathcal{C}_E$ (resp. $\mathcal{B}_F, \mathcal{C}_F$) sont deux bases de E (resp. de F) alors on montre comme précédemment que

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}_F, \mathcal{C}_E}(\varphi) = P_{\mathcal{B}_F, \mathcal{C}_F}^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) P_{\mathcal{B}_E, \mathcal{C}_E}.$$

Exercice 25



♦ Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Posons de plus $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ avec

$$u_1 = e_1 - e_3, \quad u_2 = e_1 - 2e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad u_3 = e_1 + e_2 + e_3. \quad \text{p. 44}$$

1. On admet que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Préciser B , la matrice de φ dans la base $\mathcal{C}$.
2. Expliciter la relation entre A et B . À quelles conditions sur a et b , l'endomorphisme φ est un isomorphisme?

CA25

2.4 Compléments : matrices semblables

DÉFINITION

matrices semblables

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A est **semblable** à B s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Exercice 26



♦ **Vrai ou faux?** Pour tous $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. A est semblable à A .
2. Si A est semblable à B , alors B est semblable à A .
3. Si A est semblable à B , et B est semblable à C , alors A est semblable à C .
4. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, si A est semblable à B alors A^p est semblable à B^p .
5. Si A est semblable à B et A est inversible alors A^{-1} est semblable à B^{-1} .

✓ ×
✓ ×
✓ ×
✓ ×
✓ ×

p. 45

CA26

Exemple. Les matrices suivantes sont semblables :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Exercice 27



♦ Justifions l'exemple en considérant φ , l'endomorphisme canoniquement associé à M .

1. a) Prouver l'existence de $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $\text{Vect}(u) = \text{Ker}(\varphi - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$.
De même, on prouve que $v = (4, 3, -2)$, $w = (-2, 3, -2)$ vérifient

$$\text{Vect}(v) = \text{Ker}(\varphi - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3}) \quad \text{et} \quad \text{Vect}(w) = \text{Ker}(\varphi + 4\text{id}_{\mathbb{R}^3}).$$

p. 45

- b) Vérifier que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Démontrer que M et D sont semblables.

CA27

PROPOSITION

endomorphisme et similitude

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, deux matrices et E un espace vectoriel de dimension finie n .

Les matrices A et B sont semblables si et seulement si A et B représentent un même endomorphisme de E . C'est-à-dire il existe deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ de E et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \quad \text{et} \quad B = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi).$$

Preuve. C'est une conséquence du théorème de changement de base en précisant que toute matrice inversible peut être vue comme une matrice de changement de base.

Exemple. Pour trois réels a, b et c , on pose

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Justifions que A et B sont semblables. Soit φ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A . Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a

$$\varphi(e_1) = ae_1 \quad \text{et} \quad \varphi(e_2) = be_1 + ce_2.$$

La matrice B est semblable à A si l'on peut trouver une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ telle que

$$\varphi(\varepsilon_1) = c\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 \quad \text{et} \quad \varphi(\varepsilon_2) = a\varepsilon_2.$$

On constate que le choix $\varepsilon_1 = e_2$ et $\varepsilon_2 = e_1$ convient.

On peut vérifier par le calcul, si on pose

$$P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

on trouve que $PBP^{-1} = A$. Les matrices sont bien semblables.

COROLLAIRE

invariance du rang par similitude

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A et B sont semblables, **alors** elles ont même rang.

Preuve. Si A et B sont deux matrices semblables, alors elles représentent le même endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dans des bases différentes. Ainsi, avec la proposition précédente

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(\varphi) = \text{rg}(B).$$

Exercice 28



♦ La réciproque est fausse. Pouvez-vous donner un contre-exemple?

p. 45

CA28

DÉFINITION

trace

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit la **trace** de A , notée $\text{Tr}(A)$, comme la somme des coefficients diagonaux de A . Autrement dit, pour $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$,

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Exercice 29



◇ Calculer $\text{Tr}(I_n)$, $\text{Tr}(0_n)$, $\text{Tr}(J)$ et $\text{Tr}(K)$ où

$$J = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

p. 45

CA29

À partir des règles de calcul usuelles, on montre que :

PROPOSITION

forme linéaire

L'application trace $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire. C'est-à-dire, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) \quad \text{et} \quad \text{Tr}(\lambda A) = \lambda \text{Tr}(A).$$

Vocabulaire. Une forme linéaire est une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exercice 30



1. Donner la dimension de $\text{Ker}(\text{Tr})$. Préciser une base.
2. Expliciter un supplémentaire du noyau.

p. 45

CA30

Remarque. On peut aussi noter que la trace est invariante par transposition :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{Tr}({}^t A) = \text{Tr}(A).$$

PROPOSITION

trace et produit

Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

Exercice 31



1. Prouver cette proposition.
Si on note $[M]_{i,j}$, le coefficient en position (i, j) de la matrice M , on rappelle que pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^p [A]_{i,k} [B]_{k,j}$.
2. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Tr}((AB)^k) = \text{Tr}((BA)^k)$.
3. a) Écrire un programme **Tr3** qui prend en argument trois matrices A, B, C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et renvoie $\text{Tr}(ABC)$.
b) Tester et commenter avec **Tr3**(A,B,C) et **Tr3**(B,A,C) où

p. 45

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

CA31

COROLLAIRE

invariance par similitude

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible. Alors

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(P^{-1}AP).$$

Preuve. D'après la proposition précédente

$$\text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(P^{-1}(AP)) = \text{Tr}((AP)P^{-1}) = \text{Tr}(APP^{-1}) = \text{Tr}(AI_n) = \text{Tr}(A).$$



Remarque. Autrement dit, deux matrices semblables ont même trace. Cette propriété permet de définir la trace d'un endomorphisme (voir exercice 57). La réciproque est fautive, par exemple la matrice I_n et J (de taille (n, n) et ne contenant que des « 1 ») ont même trace; pourtant, elles ne sont pas semblables ($\text{rg}(J) = 1 \neq n = \text{rg}(I_n)$ pour $n > 1$).

Exercice 32



Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Que dire de A si $\text{Tr}(A^t A) = 0$?
2. Que dire de A et B si pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(AX) = \text{Tr}(BX)$?

p. 46

CA32

4

Compléments : les espaces stables

DÉFINITION

espace stable

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et F une partie de E . On dit que F est une **partie stable** par φ si

$$\forall u \in F, \quad \varphi(u) \in F.$$

Exemple. Soit $\varphi : f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mapsto f' \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Les espaces $\mathbb{R}[x]$ et $\text{Vect}(\cos, \sin)$ sont des parties stables de φ .

Exercice 33



Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que toute somme de s.e.v stables par φ reste stable par φ .
2. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Montrer que le noyau et l'image de ψ sont stables par φ .
3. ♦♦ Donner les sous-espaces stables de l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{R}[x]$.

p. 46

CA33

Remarques.

- Soit F un sous-espace vectoriel de E avec $(e_1, \dots, e_p)$ une famille génératrice de F . Alors F est une partie stable par φ si et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\varphi(e_i) \in F$.

Preuve. Supposons que pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\varphi(e_i) \in F$. Soit $u \in F$. La famille $(e_1, \dots, e_p)$ étant génératrice, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $u = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$. Comme φ est linéaire et F stable par combinaison linéaire

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \underbrace{\varphi(e_i)}_{\in F} \in F.$$

L'espace F est donc stable par φ . La réciproque est évidente. ■

- Si F est un sous-espace vectoriel stable par φ , on peut définir la restriction de φ à F par

$$\varphi|_F : \begin{cases} F & \rightarrow F \\ u & \mapsto \varphi(u). \end{cases}$$

L'application $\varphi|_F$ définit alors un endomorphisme de F .

Exercice 34



- ◇ Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ injectif et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E stable par φ . Montrer que l'endomorphisme induit par φ sur F est un isomorphisme.

p. 46

CA34

Exercice 35



- ◇ Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ et Φ l'application linéaire de $\mathbb{R}[x]$ vers lui-même définie par

$$\Phi(P)(x) = (a + bx)P(x) + x(1 - x)P'(x).$$

1. Justifier qu'il existe un entier n unique tel que $\mathbb{R}_n[x]$ soit stable par Φ .
2. Soit Φ_n l'endomorphisme restreint à $\mathbb{R}_n[x]$. Écrire la matrice A de Φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

p. 46

CA35



Exercices



- Le niveau de difficulté de l'exercice est repéré par les symboles $\diamond$, $\blacklozenge$, $\blacklozenge\blacklozenge$, $\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge$ (difficulté croissante).
- Les exercices classiques à bien maîtriser sont repérés par 🎵 .

Exercice 36. $\blacklozenge$ 🔑 Vrai ou faux?

CA36

1. La somme de deux matrices inversibles est inversible.
2. Toute matrice carrée est la somme de deux matrices inversibles.

✓ ×

✓ ×

>> Solution p. 47

Exercice 37. $\blacklozenge$ Soient E un espace vectoriel de dimension 2 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\text{id}_E$.

CA37

Soit u un vecteur non nul de E .

1. Est-ce que f est injective? surjective?
2. Justifier que $(u, f(u))$ est une base de E .
3. Donner la matrice de f dans cette base.
4. $\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge$ Généraliser le résultat précédent dans le cas où E est de dimension $2n$.

>> Solution p. 47

Exercice 38. $\blacklozenge\blacklozenge$ 🎵 On pose $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -10 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

CA38

1. 🔑 En examinant les instructions en Python suivantes, calculer les puissances de A .

Editeur

```
>>> import numpy as np
>>> A = np.array([-4, 0, 3], [0, 2, 0], [-10, 0, 7])
>>> P = np.array([1, 0, 3], [0, 1, 0], [2, 0, 5])
>>> P_inv = np.linalg.inv(P) # calcule l'inverse de la matrice
>>> P_inv
array([[ -5.,  0.,  3.],
       [ 0.,  1.,  0.],
       [ 2.,  0., -1.]])
>>> P_inv @ A @ P           # La commande @ effectue le produit matriciel
array([[2., 0., 0.],
       [0., 2., 0.],
       [0., 0., 1.]])
```

2. 🔑 Peut-on trouver $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$?

Exercice 39. $\blacklozenge$ Peut-on trouver deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$?

🔑 # CA39

>> Solution p. 48

Exercice 40. $\blacklozenge$ Liberté d'une famille d'applications de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

CA40

On pose $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)$, $f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 + \sin(x^2)$ et $f_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(2x)$.

1. Donner les développements limités de f_1, f_2 et f_3 en 0 à l'ordre 4.
2. En déduire que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

>> Solution p. 48

Exercice 41. $\blacklozenge$ 🎵 Rang et composition

CA41

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\text{rg}(g \circ f) \leq \min\{\text{rg}(f); \text{rg}(g)\}$.
2. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E, F)$. Justifier que $\text{Im}(\varphi + \psi) \subset \text{Im}(\varphi) + \text{Im}(\psi)$. Puis, en déduire que $\text{rg}(\varphi + \psi) \leq \text{rg}(\varphi) + \text{rg}(\psi)$.
3. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
 - a) Pour tout isomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E', E)$, on a $\text{rg}(f \circ \varphi) = \text{rg}(f)$.
 - b) Pour tout isomorphisme $\psi \in \mathcal{L}(F, F')$, on a $\text{rg}(\psi \circ f) = \text{rg}(f)$.

>> Solution p. 48

Exercice 42. ♦♦  Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que

CA42

$$E = \text{Im } f + \text{Im } g \quad \text{et} \quad E = \text{Ker } f + \text{Ker } g.$$

Montrer que ces sommes sont directes.

>> Solution p. 49

Exercice 43. ♦ On définit les matrices et l'application

CA43

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \varphi: \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto AMB. \end{cases}$$

1. Vérifier que φ est linéaire.
2. Justifier que φ est une application bijective et exprimer φ^{-1} .
3. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (I_2, A, B, AB)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis déterminer la matrice de φ dans $\mathcal{B}$.
Pour simplifier les calculs, on pourra utiliser ce script Python :

>> Solution p. 49

Editeur

```
import numpy as np
A=np.array([[2,1],[5,3]])
print(np.dot(A,A)-5*A+np.eye(2))

B=np.array([[4,1],[7,2]])
print(np.dot(B,B)-6*B+np.eye(2))
```

Console

```
>>> # script executed

[[0.  0.]
 [0.  0.]]
[[0.  0.]
 [0.  0.]]
```

Exercice 44. ♦♦  Soit φ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n . On suppose que φ est de rang 1.

CA44

1. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $\varphi^2 = \lambda\varphi$. Pour rappel φ^2 désigne $\varphi \circ \varphi$.
2.  Montrer que si $\lambda \neq 1$, $\varphi - \text{id}_E$ est bijective et exprimer son application réciproque à l'aide de φ .

>> Solution p. 49

Exercice 45. ♦♦♦ **Égalité de Bézout**

CA46

Soient $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_q$ des réels deux à deux distincts. On considère les polynômes

$$A(x) = \prod_{i=1}^p (x - a_i) \quad \text{et} \quad B(x) = \prod_{i=1}^q (x - b_i).$$

On note $n = p + q - 1$ et $E = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n . On introduit de plus,

$$F_A = \{P \in E \mid A \text{ divise } P\} \quad \text{et} \quad F_B = \{P \in E \mid B \text{ divise } P\}.$$

1. Montrer que F_A et F_B sont des sous-espaces vectoriels de E . Préciser les dimensions de F_A et F_B .
2. Vérifier que $E = F_A \oplus F_B$.
3. En déduire qu'il existe deux polynômes U et V tels que $UA + VB = 1$.

>> Solution p. 50

Exercice 46. ♦♦  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, les polynômes P_k définis par $P_k(x) = (1-x)^k x^{n-k}$.

CA47

1. Préciser le degré de P_k .
2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Simplifier $\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} P_i$.
3. En déduire que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

4. a) Montrer que pour $0 \leq i \leq n$, $\sum_{k=i}^n \binom{k}{i} = \binom{n+1}{i+1}$.
- b) Déterminer les coordonnées du polynôme $Q(x) = \sum_{j=0}^n x^j$ dans la base $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$.

>> Solution p. 51

Exercice 47. ♦♦ Produit cartésien et formule de Grassmann

CA48

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E . On rappelle que $F \times G$ est un espace vectoriel pour les lois définies par : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in F \times G$

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \quad \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

- Justifier que si F et G sont de dimensions finies, alors $F \times G$ est de dimension finie et $\dim(F \times G) = \dim(F) + \dim(G)$.
- a) Vérifier que l'application $f : F \times G \rightarrow E, (x, y) \mapsto x + y$ est linéaire.
- b) Déterminer $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$.
- c) Retrouver la formule de Grassmann : $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

>> Solution p. 51

Exercice 48. ♦♦♦ 🎵

d'après les oraux ESCP 2001 # CA49

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n ($n \geq 2$). On note S (respectivement A) le sous-espace vectoriel de E formé des matrices symétriques (respectivement antisymétriques).

Soient α, β deux réels donnés non nuls, et f l'application définie sur E par, pour tout $M \in E$: $f(M) = \alpha M + \beta^t M$

- Montrer que $E = S \oplus A$.
- Exprimer f à l'aide de p et q , où $q = \text{id}_E - p$, quand p désigne le projecteur sur S de direction A .
- Exprimer $f^2 = f \circ f$ en fonction de f et de id_E .
- Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un automorphisme de E . Exprimer alors f^{-1} en fonction de f et de id_E .
- Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f^k en fonction de p, q, α, β . En déduire la puissance k -ième de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha + \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + \beta \end{bmatrix}.$$

>> Solution p. 51

Exercice 49. ♦♦ Soit φ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de rang 1.

CA50

- On suppose que $\text{Im}(\varphi) \cap \text{Ker}(\varphi) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Justifier que $\text{Im}(\varphi) \subseteq \text{Ker}(\varphi)$, puis qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle φ est représenté par la matrice :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

- On suppose que $\text{Im}(\varphi) \cap \text{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle φ est représenté par la matrice :

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}^*.$$

- En déduire que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont la même trace.
- Bonus cube.** À quelle condition sur sa trace une matrice de rang 1 est diagonalisable?

>> Solution p. 52

Exercice 50. ♦♦ Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que

CA51

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f, g les applications linéaires canoniquement associées à A et B .

1. Vérifier que $g(e_2)$ et $g(e_3)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. Notons $\mathcal{C}$ cette base.
2. Expliciter la matrice de $g \circ f$ dans cette nouvelle base.
3. Calculer BA .

>> Solution p. 52

Exercice 51. ♦♦ 🎵 Variante sur les endomorphismes nilpotents

CA52

Soient E un espace vectoriel de dimension 4 et φ un endomorphisme de E tel que $\varphi^5 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Justifier que $\varphi^4 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. Dans la suite, on suppose de plus que $\varphi^3 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Peut-on avoir $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \varphi^2$? Même question avec $\text{Ker } \varphi^2 = \text{Ker } \varphi^3$.
3. En déduire que $\dim \text{Ker } \varphi^3 = 3$.
4. Conclure en montrant qu'il existe une base dans laquelle les coefficients de la matrice de φ dans cette base sont nuls partout, sauf éventuellement sur la diagonale située immédiatement sous la diagonale principale.

>> Solution p. 52

Exercice 52. ♦♦ Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et φ un endomorphisme de E tel que :

CA53

$$\exists p \in \mathbb{N}, \quad \varphi^p = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad \varphi^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

On dit que φ est un endomorphisme nilpotent d'indice p .

1. Montrer que $\text{Ker}(\varphi) \subset \text{Ker}(\varphi^2) \subset \dots \subset \text{Ker}(\varphi^p) = E$.
Vérifier que toutes ces inclusions sont strictes.
2. Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\text{Ker}(\varphi)$. On la complète en une base $\mathcal{B}_2$ de $\text{Ker}(\varphi^2)$. On continue le procédé en complétant, pour tout entier $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ une base $\mathcal{B}_k$ de $\text{Ker}(\varphi^k)$ en une base $\mathcal{B}_{k+1}$ de $\text{Ker}(\varphi^{k+1})$.
On trouve ainsi une succession de bases $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \dots \subset \mathcal{B}_p$, où $\mathcal{B}_p$ est une base de E .
Montrer que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}_p$ est triangulaire par blocs, avec une diagonale nulle.
3. En déduire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_n$, alors A est de trace nulle.
Que dire de $\text{Tr}(A^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$?

>> Solution p. 53

Exercice 53. ♦♦ Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

CA54

On suppose que, pour tout $u \in E$, il existe un entier $n_u \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n_u}(u) = 0_E$. Montrer qu'il existe un entier n tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

>> Solution p. 54

Exercice 54. ♦ Soient E un espace vectoriel et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

CA55

Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(\varphi)$, $\text{Ker}(\varphi - \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(\varphi + \text{id}_E)$ sont en somme directe.

>> Solution p. 54

Exercice 55. ♦ Somme directe dans $\mathbb{R}_n[x]$

CA56

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on définit $F_i = \{P \in \mathbb{R}_n[x] \mid \forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{i\}, P(j) = 0\}$.

1. Justifier que pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$,

$$F_i = \text{Vect}(L_i) \quad \text{où} \quad L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - j).$$

2. Vérifier que la somme $F_0 + F_1 + \dots + F_n$ est directe, puis l'égalité $\bigoplus_{i=0}^n F_i = \mathbb{R}_n[x]$.

>> Solution p. 54

Exercice 56. ♦ Soit A un élément donné de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non colinéaire à I_2 . On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont A est la matrice associée dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$. On pose : $w = e_1 + e_2$.

CA57

1. En considérant les trois vecteurs e_1, e_2 et w , montrer qu'il existe au moins un élément non nul x de $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $(x, \varphi(x))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la matrice M associée à φ dans la base $(x, \varphi(x))$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$$

où a et b sont deux réels, indépendants de la base $(x, \varphi(x))$, que l'on exprimera en fonction de $\det(A)$ et $\text{Tr}(A)$.
On pourra admettre que le déterminant est un invariant de similitude.

3. En déduire que la matrice A est semblable à sa transposée tA .

>> Solution p. 54

Exercice 57. ♦ ♪ Trace d'un endomorphisme

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E . On définit la trace de φ par

$$\text{Tr}(\varphi) = \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)).$$

1. Justifier que la trace de φ ne dépend pas du choix de la base.
2. Exemples
 - a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la trace de φ où $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto P - P' \in \mathbb{R}_n[x]$.
 - b) On pose $\varphi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - i) Justifier que le sous-espace des matrices symétriques de taille (n, n) (noté $\mathcal{S}_n$) et celui des matrices antisymétriques (noté $\mathcal{A}_n$) sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Préciser les dimensions.
 - ii) En déduire la trace de φ .
 - c) Soit p un projecteur de E . Vérifier que la trace de p est égale à son rang.

>> Solution p. 55

Exercice 58. ♦♦♦ ♪ Commutant d'une matrice nilpotente

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$.

1. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. En déduire la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{C}_B = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MB \right\}$ et celle de $\mathcal{C}_A$.

>> Solution p. 55

Exercice 59. ♦♦♦ Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'application $\Phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ par $\Phi_A(X) = \text{Tr}(AX)$.

1. Montrer que Φ_A est une forme linéaire.
2. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, justifier qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = \Phi_A$.

>> Solution p. 56

Exercice 60. ♦♦ ♪ Matrice de Vandermonde - Lien avec les polynômes de Lagrange

Soit $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On pose

$$V_a = \begin{bmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

1. Notons $C_0, C_1, \dots, C_n$ les $n+1$ colonnes de V_a . À quelle condition sur les réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ les colonnes de V_a forment une famille libre? En déduire une condition pour l'inversibilité de V_a .

On suppose cette condition vérifiée dans la suite.

Notons $\mathcal{B} = (1, x, \dots, x^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ et $(e_0, \dots, e_n)$, la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. a) Montrer que l'application suivante est un isomorphisme

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[x] & \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto (P(a_0), \dots, P(a_n)). \end{cases}$$

- b) Pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on définit le polynôme $L_i = \varphi^{-1}(e_i)$. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ et que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x], \quad P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i.$$

- c) Préciser $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{-1}$ où $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ désigne la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

>> Solution p. 57

Exercice 61. ♦♦♦ Vecteurs cycliques et espaces stables

CA62

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un vecteur $u \in E$ non nul est *cyclique* pour φ s'il existe un entier m non nul tel que la famille $\mathcal{B}_{u,m} = (u, \varphi(u), \varphi^2(u), \dots, \varphi^{m-1}(u))$ soit une famille génératrice de E .

Pour rappel, $\varphi^i(u) = \varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi(u)$ avec i compositions.

1. Comparer m et n .
2.  Montrer que si u est cyclique pour φ , alors $\mathcal{B}_{u,n}$ est une base de E .

3. Application

Dans la suite, on suppose que les seuls sous-espaces vectoriels stables par φ sont $\{0_E\}$ et E .

- a)  Justifier qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille $\mathcal{B}_{u,m}$ soit libre mais $\mathcal{B}_{u,m+1}$ n'est pas libre.
- b) Vérifier que $\text{Vect}(\mathcal{B}_{u,m})$ est un espace stable par φ .
- c) En déduire que tout vecteur $u \in E \setminus \{0_E\}$ est cyclique.
- d)  On note $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ les coordonnées de $\varphi^n(u)$ dans la base $\mathcal{B}_{u,n}$. Justifier que

$$\varphi^n = a_0 \cdot \text{id}_E + a_1 \cdot \varphi + \dots + a_{n-1} \cdot \varphi^{n-1}.$$

- e) Donner la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}_{u,n}$ à l'aide des réels a_i .

>> Solution p. 58

Exercice 62. ♦ Soient $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\text{Tr}(A) = 0$ et φ son endomorphisme canoniquement associé.

CA63

1.  Justifier qu'il existe $x \in \mathbb{R}^2$ tel que la famille $(x, \varphi(x))$ soit libre.
2.  En déduire que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

>> Solution p. 59

Exercice 63. ♦ On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on note $\mathcal{C}$, la base canonique. On considère $\mathcal{P}$ le plan vectoriel d'équation $2x - y - z = 0$, la droite vectorielle $\mathcal{D} = \text{Vect}(u)$ où $u = (1, -1, 1)$. # CA64

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$.
2. Soit $\mathcal{B}$, une base adaptée à la décomposition précédente et p le projecteur sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$. Préciser la matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$.
3. Expliciter la matrice de passage entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$. En déduire la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(p)$.

>> Solution p. ??

Exercice 64. ♦♦♦ Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E_1 \oplus \dots \oplus E_n = E$. On note p_i le projecteur sur E_i parallèlement à $\oplus_{j \neq i} E_j$. Montrer que $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$ si $i \neq j$ et que $p_1 + \dots + p_n = \text{id}_E$. # CA65

>> Solution p. ??

Exercice 65. ♦♦♦

d'après EDHEC 94, option scientifique # CA66

On étudie un sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles à indices dans $\mathbb{N}$:

$$\mathcal{E} = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = \frac{3}{2}u_{n+2} - \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{8}u_n \right\}$$

1. Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ est de dimension 3. (On pourra éventuellement considérer l'application linéaire φ de $\mathcal{E}$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(u) = (u_0, u_1, u_2)$.)
2. Montrer que si l'on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{2^n}, \quad b_n = \frac{n}{2^n}, \quad c_n = \frac{n^2}{2^n},$$

les trois suites a, b, c forment une base de $\mathcal{E}$.

3. Montrer que si u appartient à $\mathcal{E}$, la série de terme général u_n est convergente. On notera $s(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.
4. Calculer $s(a), s(b)$ et $s(c)$.
5. Montrer que $s : u \mapsto s(u)$ est une application linéaire de $\mathcal{E}$ vers $\mathbb{R}$; quelle est la dimension de $\text{Ker } s$?

6. Déterminer $\text{Ker } s$.

>> Solution p. ??

Exercice 66. ♦♦♦  Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$.

d'après l'oral HEC # CA67

1. On suppose que $u^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Déterminer alors les sous-espaces vectoriels F de $\mathbb{R}^3$ stables par u , c'est-à-dire tels que $u(F) \subset F$.

2. On suppose que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Déterminer alors les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par u .

>> Solution p. ??

Exercice 67. ♦ Écrire un programme Python qui compte le nombre de matrices non inversibles parmi les matrices de taille (25,25) : # CA68

$$M(a,b) = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{bmatrix} \quad \text{avec } a, b \in \llbracket -50; 50 \rrbracket.$$

Indication. On pourra utiliser les commandes `ones([n,p])` qui renvoie une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ne contenant que des 1, `eye(n)` pour la matrice I_n et `np.linalg.matrixrank(A)` pour le rang de la matrice A .

>> Solution p. 59

Exercice 68. ♦♦ **Antitransposée et matrices antidiagonales**

CA69

>> Solution p. 59

1. a) Compléter le programme suivant qui prend en argument une matrice A et renvoie sa transposée.

Editeur

```
import numpy as np

def transpo(A):
    [n,p]=np.shape(A)
    B=np.zeros( ... )
    for i in ... :
        for j in ... :
            B[...]=
    return B
```

- b) On définit l'antitransposée d'une matrice carrée A par la matrice C obtenue par symétrie par rapport à l'antidiagonale. Par exemple,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C_0 = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Comment modifier le programme précédent pour obtenir un nouveau programme qui prend en argument une matrice A et qui renvoie son antitransposée?

2. Une matrice T est dite antidiagonale si les coefficients situés en dehors de l'antidiagonale sont nuls. Par exemple,

$$T_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

À l'aide de Python, que peut-on conjecturer sur les puissances d'une matrice antidiagonale?

Indication. On pourra utiliser la commande `np.dot(A,B)` pour faire le produit AB .

3. Prouver votre résultat.

Indication. On pourra considérer TP_n où T est une matrice antidiagonale de taille (n, n) et P_n est la matrice construite sur le même modèle que P_3 .

4. À quelle condition sur ses coefficients, une matrice antidiagonale est inversible?

Exercice 69. ♦ 🎵 Montrer que toute matrice triangulaire supérieure stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice inférieur ou égal à n . # CA75



Indications et solutions



On étudie en vain si l'on ne réfléchit pas.
On réfléchit en vain si l'on n'étudie pas.

CONFUCIUS, *Entretiens*

Indication de l'exercice 1

p. 2

Vérifier que E_2 , E_7 , E_8 et E_{10} sont les seuls espaces vectoriels.

Indication de l'exercice 2

p. 2

Soit $u_1 \in E_1 \setminus E_2$. En considérant $u_1 + v \in E_1 \cup E_2$, montrer que pour tout vecteur $v \in E_2$, $v \in E_1$.

Indication de l'exercice 3

p. 3

2. Il faut et il suffit que P soit de degré n .

4.a) Utiliser les croissances comparées pour justifier que la famille est libre.

4.b) Utiliser un argument de dérivabilité. La fonction f_i n'est pas dérivable en i .

Indication de l'exercice 8

p. 7

2. Justifier que pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, on a $P = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i$.

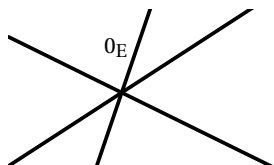
Indication de l'exercice 10

p. 8

1. Justifier que G est de dimension $n - 1$ en exhibant une base. On pourra supposer que $a_n \neq 0$.

Indication de l'exercice 11

p. 9



Indication de l'exercice 13

p. 11

Déterminer une base (w_1, w_2) de F . Vérifier ensuite que la famille (u, v, w_1, w_2) est une base de $\mathbb{R}^4$. Conclure avec la

proposition précédente.

Indication de l'exercice 14

p. 12

Adapter le schéma de l'indication 12 ci-dessus dans $\mathbb{R}^3$.

Indication de l'exercice 15

p. 12

2. Vérifier que

$$\dim V + \dim H = \dim(\mathbb{R}_3[x]) \quad \text{et} \quad V \cap H = \{0\}.$$

3. Il faut justifier que l'on peut retirer les parenthèses

$$(F \oplus G) \oplus H = F \oplus G \oplus H.$$

Indication de l'exercice 17

p. 15

Pour rappel :

Soit $f : E \rightarrow F$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

→ f est bijective.

→ Il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que : $f \circ g = \text{id}_F$ et $g \circ f = \text{id}_E$.

Dans ce cas, $g = f^{-1}$.

Indication de l'exercice 18

p. 15

1. Donner la matrice de l'application dans la base canonique puis conclure avec le déterminant.

2.b) Remarquer que φ est bijective avec $\varphi^{-1} : P \mapsto \dots$

Indication de l'exercice 26

p. 20

Tout est vrai !

Indication de l'exercice 28

p. 21

On pourra regarder les matrices semblables à I_n et les matrices de même rang que I_n .

Indication de l'exercice 36

p. 25

La première est fausse et la seconde est vraie (on pourra utiliser des matrices triangulaires).

Indication de l'exercice 38

p. 25

1. Écrire A sous la forme $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale. Exprimer

ensuite A^P à l'aide de P , D et P^{-1}
2. Partir d'une matrice S telle que $S^2 = D$.

Indication de l'exercice 39 p. 25

Pensez à la trace.

Indication de l'exercice 42 p. 26

Écrire les formules du rang pour f et g ainsi que la formule de Grassmann avec $\text{Im } f + \text{Im } g$ et $\text{Ker } f + \text{Ker } g$.

Indication de l'exercice 44 p. 26

2. Exprimer l'application réciproque sous la forme $\alpha\varphi + \beta \text{id}_E$.

Indication de l'exercice 56 p. 28

- 1.** Tester avec $x = e_1$, $x = e_2$ et enfin $x = e_1 + e_2$.
- 2.** Regarder la matrice de φ dans la base de $\mathbb{R}^2$, $(x, \varphi(x))$.

Indication de l'exercice 57 p. 29

- 1.** Appliquer la formule de changement de base et la relation $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
- 2.a)** Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
- 2.b)i.** Vérifier que $\dim \mathcal{S}_n = n(n+1)/2$ et $\dim \mathcal{A}_n = n(n-1)/2$.
- 2.b)ii.** Écrire la matrice de l'application φ dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition

$$\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

3.c) Raisonner par analyse-synthèse. Pour $u \in E$

$$u = \underbrace{p(u)}_{\in \text{Im } p} + \underbrace{(u - p(u))}_{\in \text{Ker } p}.$$

Indication de l'exercice 58 p. 29

- 1.** Justifier l'existence de $v \in \text{Ker } \varphi \setminus \text{Im } \varphi$ et $w \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{Ker } \varphi$. Montrer que la famille $(u, \varphi(w), w)$ est une base. Que dire de la matrice de φ dans cette base?
- 2.** Écrire $A = P^{-1}BP$. Justifier que $M \in \mathcal{C}_A$ si et seulement si $PMP^{-1} \in \mathcal{C}_B$. Que peut-on en déduire sur les dimensions de $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_A$? Calculer ensuite $\dim \mathcal{C}_B$ en déterminant les conditions sur les coefficients de

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

pour que $M \in \mathcal{C}_B$.

Indication de l'exercice 59 p. 29

- 2.** Pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, on pose $\Phi_{ij} = \Phi_{E_{ij}}$. Montrer que la famille (Φ_{ij}) est une base de l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Utiliser ensuite le fait que

$$\dim(\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})) = n^2$$

pour justifier que l'on obtient une base. Conclure.

Indication de l'exercice 60 p. 29

- 2.a)** Par un argument de dimension, il suffit de montrer que φ est injective. Montrer ensuite que si $P \in \text{Ker } \varphi$, P est nécessairement le polynôme nul.

Indication de l'exercice 61 p. 30

- 2.** Procéder par récurrence sur la propriété : la famille $\mathcal{B}_{u,k}$ est une famille libre (avec $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$).
- 3.a)** Que dire de la liberté de la famille

$$(\text{id}_E, \varphi, \dots, \varphi^p)$$

avec $p > \dim \mathcal{L}(E)$?

- 3.d)** Vérifier l'égalité pour tout vecteur de la base $\mathcal{B}_{u,n}$.

Exercice 1 p. 2
CA1

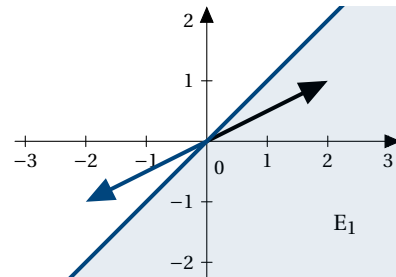
- Non, E_1 n'est pas un e.v.

Par exemple, E_1 n'est pas stable par multiplication par un réel.

$$(2, 1) \in E_1,$$

mais $-1 \cdot (2, 1) = (-2, -1) \notin E_1$.

Graphiquement, E_1 est un demi-plan.



- Afin de prouver que E_2 est un espace vectoriel, on peut prouver que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, on vérifie que E_2 est non vide et stable par combinaison linéaire.

→ E_2 est non vide car $(0, 0, 0) \in E_2$.
 → Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $X = (x, y, z) \in E_2$ et $X' = (x', y', z') \in E_2$. Par définition de E_2 , on a $2x + z = y$ et $2x' + z' = y'$.

Il vient

$$X + \lambda X' = (x, y, z) + \lambda(x', y', z') = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z').$$

Puis,

$$2(x + \lambda x') + (z + \lambda z') = (2x + z) + \lambda(2x' + z') = y + \lambda y'.$$

C'est-à-dire, $X + \lambda X' \in E_2$.

En conclusion, E_2 est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puis