

CHAPITRE 2

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

Un mathématicien est une machine à transformer le café en théorèmes.

PAUL ERDÖS

Mathématicien hongrois (1913-1996).

1

Rappels et compléments sur les espaces vectoriels

1.1 Rappels : e.v, s.e.v, familles de vecteurs

Pour résumer, un espace vectoriel E est un ensemble muni de deux lois « $+$ » et « $\cdot$ » telles que :

- E est stable par multiplication à gauche par un nombre : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E, \lambda \cdot u \in E$.
- E est stable par somme : $\forall u \in E, \forall v \in E, u + v \in E$.
- il y a de « bonnes règles de calcul » entre les lois « $+$ » et « $\cdot$ ».

Par exemple :

- $\forall u \in E, \quad 0 \cdot u = 0_E$ (le vecteur nul).
- $\forall u \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \times \mu) \cdot u$.
- $\forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v \quad \text{et} \quad (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot u = 0_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E$.
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (u, v) \in E^2 : \begin{cases} \text{Si } \lambda \neq 0 \text{ alors } \lambda \cdot u = \lambda \cdot v \Rightarrow u = v. \\ \text{Si } u \neq 0_E \text{ alors } \lambda \cdot u = \mu \cdot u \Rightarrow \lambda = \mu. \end{cases}$

Les éléments de E sont des **vecteurs**.

Exemples de référence.

- $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel avec les lois $+$ et $\cdot$ définies par $\forall u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot u = (\lambda \times x_1, \dots, \lambda \times x_n).$$

- L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices de taille (n, p) est un espace vectoriel pour les lois usuelles.
- Les ensembles $\mathbb{R}[x]$ et $\mathbb{R}_n[x]$, respectivement des applications polynomiales et des applications polynomiales de degré au plus n , sont des espaces vectoriels pour les lois usuelles.
- L'ensemble $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ des applications d'un ensemble I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel pour les lois usuelles.



Attention. Un espace vectoriel n'est jamais vide.

Combinaisons linéaires, sous-espaces vectoriels

Dans la suite, une famille finie de vecteurs de E est la donnée d'une liste finie $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de vecteurs de E . Le cardinal de la famille est alors le nombre de vecteurs.

DÉFINITION

combinaison linéaire

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille finie de vecteurs de E .

On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, \dots, u_n$, tout vecteur v s'écrivant

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_i \quad \text{avec pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

DÉFINITION

sous-espaces vectoriels

Soient E un espace vectoriel et F une partie de E . F est un **sous-espace vectoriel** de E si

- F est non vide.
- F est stable par somme, c'est-à-dire : $\forall (u, v) \in F^2, \quad u + v \in F$.
- F est stable par multiplication par un nombre, c'est-à-dire : $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot u \in F$.

Remarque. Les sous-espaces vectoriels sont les parties (non vides) de E stables par combinaisons linéaires.

Méthodes.

- Pour vérifier que F est un sous-espace vectoriel, on se contente de vérifier que pour tout nombre λ et tous vecteurs u, v de F , $\lambda \cdot u + v \in F$ et $F \neq \emptyset$. Pour le second point, il suffit d'exhiber un élément de F , le plus simple étant 0_E .
- De plus, on démontre que tout sous-espace vectoriel est un espace vectoriel. Donc, en pratique, lorsqu'on souhaite prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel, on montre que l'ensemble en question est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}[x], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \dots)$

Exercice 1



◇ Les ensembles suivants, munis des lois usuelles, sont-ils des espaces vectoriels?

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}, & E_2 &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = 2a + c\}, & E_3 &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - b = 2\}, \\ E_4 &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + c^2 = b\}, & E_5 &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid abc = 0\}, & E_6 &= \{P \in \mathbb{R}[x] \mid P(0) = 3\}, \\ E_7 &= \{P \in \mathbb{R}[x] \mid P(3) = 0\}, & E_8 &= \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq K\}, \\ E_9 &= \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq K\} \text{ où } K \in \mathbb{R}_*^+ \text{ est fixé}, & E_{10} &= \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est paire}\}. \end{aligned}$$

p. 35

CA1

PROPOSITION

intersection de sous-espaces

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

Alors l'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .



Attention. En général, c'est faux pour la réunion.

Exercice 2



◆◆ Soient E un espace vectoriel et E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E . On suppose que $E_1 \cup E_2$ est un sous-espace vectoriel de E . On veut montrer qu'alors $E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$. Si $E_1 \subset E_2$, alors la conclusion est vérifiée. Supposons donc que E_1 ne soit pas inclus dans E_2 . Montrer que nécessairement $E_2 \subset E_1$.

p. 36

CA2

DÉFINITION

sous-espace vectoriel engendré par une partie finie

Soient E un espace vectoriel et X une partie finie de E .

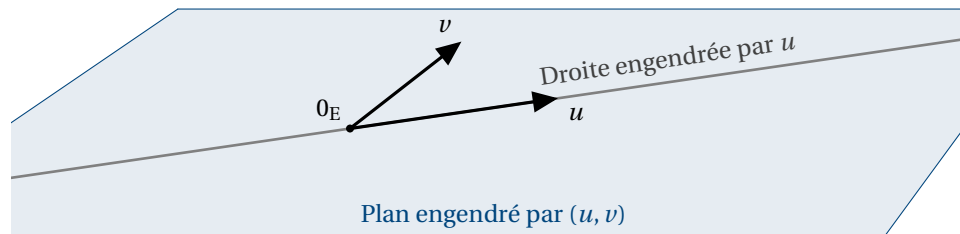
L'espace vectoriel engendré par X est défini par l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X . On le note $\text{Vect}(X)$. Autrement dit, si $X = \{u_1, \dots, u_n\}$, alors

$$\text{Vect}(X) = \left\{ v \in E \mid \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_i \right\}.$$

Remarque. Comme son nom l'indique, $\text{Vect}(X)$ est un sous-espace vectoriel de E . En particulier, il contient le vecteur nul.

Vocabulaire.

- Un espace vectoriel engendré par un vecteur non nul est une **droite vectorielle**.
- Un espace vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires est un **plan vectoriel**.



Pour rappel, deux vecteurs u, v sont **non colinéaires** s'ils sont non nuls et il n'existe pas de réel λ tel que $u = \lambda \cdot v$.

Familles génératrices, libres et bases

DÉFINITION

famille libre finie

Soient E un espace vectoriel et $m \in \mathbb{N}^*$, on dit que la famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_m)$ de vecteurs de E est une **famille libre** si la seule combinaison linéaire nulle est la combinaison linéaire à coefficients nuls. Autrement dit,

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m, \quad \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot u_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in [1, m], \quad \lambda_i = 0 \right).$$

Remarque. Soit $(u, v) \in E^2$. La famille (u, v) est libre si et seulement si les vecteurs u et v sont non colinéaires.

Exemple. Dans le cas des polynômes : une famille finie $(Q_1, \dots, Q_r)$ de $\mathbb{R}[x]$ est une famille libre si elle est de **degrés échelonnés**. C'est-à-dire,

$$0 \leq \deg(Q_1) < \deg(Q_2) < \dots < \deg(Q_r).$$

Exercice 3. ♦ Exemples

CA3

1. Dans $\mathbb{R}^4$: Montrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est libre où

$$\varepsilon_1 = (3, -1, 1, 0), \quad \varepsilon_2 = (1, 1, -1, 0), \quad \varepsilon_3 = (-1, 2, 1, 0) \quad \text{et} \quad \varepsilon_4 = (1, 1, 1, 1).$$

2. À quelle condition sur le polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$ la famille $(P^{(k)})_{k \in [0; n]}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[x]$?

3. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: Posons $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- a) Justifier que la famille (A, B, C, D) est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
b) Que dire de la liberté de la famille (A, B, C, D, I_2) ?

4. ♦♦ Dans les espaces fonctionnels : Étudier la liberté des familles suivantes.

- a) La famille formée de $f_1 = \ln$, $f_2 = \exp$ et $f_3 = \text{id}_{\mathbb{R}}$ dans $\mathcal{A}(\mathbb{R}_*, \mathbb{R})$.
- b) La famille $\mathcal{F} = (\tan, \tan^2, \dots, \tan^n)$ dans $\mathcal{A}([-\pi/2, \pi/2[, \mathbb{R})$.
- c) La famille $(f_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ où $f_i : x \in \mathbb{R} \mapsto |x - i| \in \mathbb{R}$ dans $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

DÉFINITION

famille génératrice finie

Soit $\mathcal{G} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille finie de vecteurs de E .

On dit que $\mathcal{G}$ est une **famille génératrice** de E , si tout vecteur de E peut s'obtenir comme combinaison linéaire à partir des vecteurs de $\mathcal{G}$. Autrement dit si,

$$\text{Pour tout vecteur } v \in E, \text{ il existe } \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \text{ tels que } v = \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot u_i.$$

Remarque. Sous forme condensée, $\mathcal{G}$ est génératrice de E si $\text{Vect}(\mathcal{G}) = E$.

Exercice 4



♦ Dans chacun des cas suivants, donner une famille génératrice de l'espace vectoriel.

1. $F = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = z\}$.
2. G : l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n et impairs.
3. H : l'espace des matrices symétriques de taille 3.

p. 37

CA4

DÉFINITION

base

On appelle **base** d'un espace vectoriel E , toute famille libre et génératrice de E .

Exemples. Les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- La famille $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ où $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ avec 1 en i -ème position est une base de $\mathbb{R}^n$.
- La famille $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
- La famille des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Pour rappel, la matrice élémentaire $E_{i,j}$ est la matrice ne contenant que des 0, sauf un 1 en position (i, j) .

PROPOSITION

coordonnées d'un vecteur dans une base

Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille finie de E à n éléments.

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i) La famille $\mathcal{B}$ est une base de E .
- ii) Pour tout vecteur v de E ,
il existe un unique n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $v = \sum_{i=1}^n x_i \cdot u_i$.

Dans ce cas, $(x_1, \dots, x_n)$ sont les **coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$** .

1.2 Rappels : sommes de deux s.e.v et supplémentaires

DÉFINITION

somme de sous-espaces, somme directe

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

- Le **sous-espace somme** est défini par $F + G = \{u + v \mid (u, v) \in F \times G\}$.
- On dit que F et G sont en **somme directe**, notée $F \oplus G$, si $F \cap G = \{0_E\}$.

Remarques.

- $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant F et G .
- On montre que F et G sont en somme directe si et seulement si

$$\forall u \in F, \quad \forall v \in G, \quad u + v = 0_E \Rightarrow u = v = 0_E.$$

PROPOSITION

unicité de la décomposition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i) Les sous-espaces F et G sont en somme directe.
- ii) Tout vecteur $u \in F + G$ s'écrit de manière unique sous la forme :
$$u = u_F + u_G \quad \text{avec} \quad u_F \in F, \quad u_G \in G.$$

Exercice 5



♦ Prouver cette équivalence.

p. 38

CA5

DÉFINITION

supplémentaire

Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

On dit que F et G sont **supplémentaires** si tout vecteur de E se décompose de façon unique en une somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G . C'est-à-dire

$$\forall w \in E, \quad \exists! (u, v) \in F \times G, \quad w = u + v.$$



Attention. Il n'y a pas unicité du supplémentaire. Il ne faut pas confondre supplémentaire et complémentaire.

Remarque. Le raisonnement par analyse-synthèse est particulièrement adapté à cette définition.

Exemple. Pour $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, posons

$$F = \{D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid D \text{ est diagonale}\}, \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(A_1, A_2) \quad \text{avec} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Montrons que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

→ Analyse (recherche des conditions nécessaires).

Supposons qu'il existe $M_F \in F$ et $M_G \in G$ telles que $M = M_F + M_G$. En particulier, il existe $d_1, d_2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$M_F = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_G = \lambda A_1 + \mu A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \lambda + \mu \\ -\mu & 0 \end{bmatrix}.$$

La condition $M = M_F + M_G$ se réécrit $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & \lambda + \mu \\ -\mu & d_2 \end{bmatrix}$ c'est-à-dire $\begin{cases} a = d_1 \\ b = \lambda + \mu \\ c = -\mu \\ d = d_2 \end{cases}$.

Ainsi $d_1 = a$, $d_2 = d$, $\lambda = b + c$ et $\mu = -c$. Si une telle décomposition de M existe, elle est donc unique.

— *Synthèse (recherche des conditions suffisantes).*

Le calcul précédent suggère de poser $M_F = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ et $M_G = (b + c)A_1 - cA_2$.

Vérifions que cette décomposition convient :

- M_F est une matrice diagonale, donc $M_F \in F$.
- M_G est une combinaison linéaire de la famille (A_1, A_2) , donc $M_G \in G$.
- $M_F + M_G = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} + (b + c)A_1 - cA_2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = M$.

Le couple (M_F, M_G) est une solution du problème.

— *Conclusion.*

Toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice de F et d'une matrice de G . Par définition, F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 6



Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$, $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_2 = (1, 1, 1)$.
Montrer que $\text{Vect}(u_1)$ et $\text{Vect}(u_2)$ sont deux supplémentaires de F dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Notons $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ les sous-espaces vectoriels des matrices symétriques et antisymétriques de taille n . Justifier que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont supplémentaires.
Rappel : A est symétrique si ${}^tA = A$ et antisymétrique si ${}^tA = -A$.

p. 38

CA6

PROPOSITION

caractérisation des supplémentaires

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i) Les sous-espaces F et G sont supplémentaires.
- ii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$.

On a donc : F et G sont supplémentaires si et seulement si $F \oplus G = E$.

1.3 Rappels : précisions en dimension finie

Lorsqu'un espace vectoriel E est de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre est la dimension de E .

Exercice 7



Donner une base des espaces vectoriels suivants, préciser la dimension.

1. $E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a + b + c + d = 0 \right\}$.
2. $E_2 = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P'(1) = 0\}$.
3. $E_3 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ est diagonale}\}$.

p. 39

CA7

PROPOSITION

cardinal d'une famille libre/génératrice

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{L}, \mathcal{G}$ deux familles de E .

- Si** | $\rightarrow$ La famille $\mathcal{L}$ est libre.
 $\rightarrow$ La famille $\mathcal{G}$ est génératrice de E .

Alors $\text{Card}(\mathcal{L}) \leq \dim(E)$ et $\dim(E) \leq \text{Card}(\mathcal{G})$.

Remarque. La preuve du premier point est basée sur le *théorème de la base incomplète*. En dimension finie, on peut compléter toute famille libre de vecteurs de E en une base de E . Pour le second point, on montre que l'on peut extraire une base de E de n'importe quelle famille génératrice de E .

PROPOSITION

cas d'égalité

Soit E un espace de dimension finie.

- Une famille libre $\mathcal{L}$ de cardinal $\dim(E)$ est une base.
- Une famille génératrice $\mathcal{G}$ de cardinal $\dim(E)$ est une base.

Exercice 8**♦♦ Exemple d'application**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts deux à deux. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \neq i}} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}.$$

p. 39

1. En revenant à la définition, montrer que $(L_1, \dots, L_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
D'après l'énoncé précédent, cette famille est donc une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
2. En revenant à la définition, montrer que $(L_1, \dots, L_n)$ est génératrice de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
On retrouve le fait que la famille est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

CA8

PROPOSITION

existence d'un supplémentaire

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire.

Preuve. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Si $F = \{0_E\}$ (ou $F = E$), alors E (ou $\{0_E\}$) est un supplémentaire de F . Supposons donc que F n'est pas trivial.

Le sous-espace F étant de dimension finie, il admet une base $(e_1, e_2, \dots, e_p)$. Par le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $e_{p+1}, \dots, e_n$ tels que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base de E . On vérifie alors que le sous-espace $H = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est bien un supplémentaire de F .

Remarque. Concaténation de bases.

Soient $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_G = (f_1, \dots, f_r)$ des bases respectivement de F et G . On montre que si F et G sont en somme directe, alors $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r)$ est une base de $F \oplus G$.

On en déduit l'énoncé suivant.

PROPOSITION

cas de la somme directe

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

Si F et G sont en somme directe, alors

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G).$$

THÉORÈME

formule de Grassmann

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors,

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Exercice 9



◆ Preuve

1. Soit F_1 un supplémentaire de $F \cap G$ dans F . Montrer que $F_1 \oplus G = F + G$.
2. Conclure en prouvant la formule de Grassmann.

p. 39

CA9

PROPOSITION

caractérisation des supplémentaires

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Les trois énoncés suivants sont équivalents.

- i) F et G sont supplémentaires.
- ii) $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
- iii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Exercice 10



◆◆ Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. On considère $u = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et

$$F = \text{Vect}(u) \quad \text{et} \quad G = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n a_k x_k = 0 \right\}.$$

p. 40

1. F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, préciser les dimensions de F et G .
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.
3. Représenter dans le plan les sous-espaces vectoriels F et G lorsque $u = (1, 1)$.

CA10

1.4 Compléments : sommes de p sous-espaces vectoriels

Sommes de sous-espaces vectoriels

DÉFINITION

somme de s.e.v

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .

On appelle **somme** de $F_1, \dots, F_p$, notée $\sum_{i=1}^p F_i$, l'ensemble

$$\sum_{i=1}^p F_i = \left\{ u_1 + \dots + u_p \mid \forall i \in [1, p], u_i \in F_i \right\}.$$

Remarque. $\sum_{i=1}^p F_i$ est un s.e.v de E , c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les F_i .

Exemples.

• Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Notons $\mathcal{T}^+$, $\mathcal{T}^-$ et $\mathcal{D}$ respectivement l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes, inférieures strictes et diagonales de taille (n, n) . Ces trois ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{T}^+ + \mathcal{T}^- + \mathcal{D}.$$

En effet, pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket}$, on peut écrire

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\in \mathcal{T}^+} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\in \mathcal{T}^-} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}}_{\in \mathcal{D}}.$$

- Soit $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E .

$$\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p) = \text{Vect}(e_1) + \text{Vect}(e_2) + \dots + \text{Vect}(e_p).$$

Exercice 11



◇ Soient $F_1, \dots, F_p$, des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .

1. Montrer que $\sum_{i=1}^p F_i$ est bien un sous-espace vectoriel de E .
2. Soit H , un sous-espace vectoriel de E tel que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $F_i \subset H$.
Montrer que $\sum_{i=1}^p F_i \subset H$.

p. 40

CA11

PROPOSITION

somme et dimension

Soient $F_1, \dots, F_p$, des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .

Si les F_i sont tous de dimension finie, **alors** $\sum_{i=1}^p F_i$ est aussi de dimension finie avec

$$\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i).$$

Preuve. Rappelons que, d'après la formule de Grassmann, pour F, G deux s.e.v de E de dimension finie

$$\dim(F + G) \leq \dim(F) + \dim(G) \quad \text{car} \quad \dim(F \cap G) \geq 0.$$

La proposition s'en déduit par récurrence. ■

Sommes directes, généralisation à p sous-espaces vectoriels

DÉFINITION

somme directe

La somme de p sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \dots, F_p$ d'un espace vectoriel E est dite **directe** si

$$\forall (u_1, \dots, u_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, \quad u_1 + \dots + u_p = 0_E \Rightarrow u_1 = \dots = u_p = 0_E.$$

La somme directe des s.e.v $F_1, F_2, \dots, F_p$ est notée $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$.

Exemples.

- En reprenant l'exemple précédent, on a même $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{T}^+ \oplus \mathcal{T}^- \oplus \mathcal{D}$.
- Si pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $F_i = \text{Vect}(e_i)$ où e_i est un vecteur de E non nul alors la somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe si et seulement si la famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est libre.

Preuve. Raisonnons par double implication.

⇒ Supposons la famille libre et montrons que la somme est directe. Soit $(u_1, u_2, \dots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p$ tel que $\sum_{i=1}^p u_i = 0_E$.
Il existe donc $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ tels que $u_1 = \lambda_1 e_1, u_2 = \lambda_2 e_2, \dots, u_p = \lambda_p e_p$. On a donc

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_p e_p = 0_E.$$

Comme la famille est libre, chaque λ_i vaut 0, $u_i = \lambda_i e_i = 0_E$. La somme est directe.

⊞ Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\underbrace{\lambda_1 e_1}_{\in F_1} + \underbrace{\lambda_2 e_2}_{\in F_2} + \dots + \underbrace{\lambda_p e_p}_{\in F_p} = 0_E.$$

Si la somme est directe, chaque $\lambda_i e_i$ vaut 0_E . Comme $e_i \neq 0_E$, on a $\lambda_i = 0$. La famille est libre.

Exercice 12



♦ Soient F_1, F_2 et F_3 trois s.e.v de E tels que

$$F_1 \cap F_2 = \{0_E\}, \quad F_2 \cap F_3 = \{0_E\} \quad \text{et} \quad F_1 \cap F_3 = \{0_E\}.$$

p. 40

A-t-on nécessairement $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$?

CA12

PROPOSITION

somme directe et unicité

Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E . On a équivalence entre :

- i) La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe.
- ii) Tout vecteur de $F_1 + F_2 + \dots + F_p$ s'écrit d'une manière unique comme somme de vecteurs de $F_1, F_2, \dots, F_p$.

Autrement dit,

$$\forall u \in F_1 + F_2 + \dots + F_p, \quad \exists! (u_1, u_2, \dots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p \\ u = u_1 + u_2 + \dots + u_p.$$

Preuve. Raisonnons par double implication.

⇒ Supposons i). Soit $u \in F_1 + F_2 + \dots + F_p$. Par définition de la somme, u se décompose comme somme de vecteurs des F_i . Justifions l'unicité de la décomposition.

Soient $u_1 \in F_1, v_1 \in F_1, u_2 \in F_2, v_2 \in F_2, \dots, u_p \in F_p, v_p \in F_p$ tels que

$$u = \sum_{i=1}^p u_i \quad \text{et} \quad u = \sum_{i=1}^p v_i.$$

Par linéarité de la somme

$$\sum_{i=1}^p \underbrace{(u_i - v_i)}_{\in F_i} = \sum_{i=1}^p u_i - \sum_{i=1}^p v_i = u - u = 0_E.$$

Par définition de la somme directe, pour tout indice i , $u_i - v_i = 0_E$, puis $u_i = v_i$. Ceci prouve l'unicité de l'énoncé ii).

⇐ Réciproquement, supposons ii). Soit $(u_1, u_2, \dots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p$ tels que $0_E = u = \sum_{i=1}^p u_i$. On a donc

$$\underbrace{u_1}_{\in F_1} + \underbrace{0_E}_{\in F_2} + \dots + \underbrace{u_p}_{\in F_p} = 0_E \\ \underbrace{0_E}_{\in F_1} + \underbrace{0_E}_{\in F_2} + \dots + \underbrace{0_E}_{\in F_p} = 0_E.$$

Par unicité de la décomposition, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $u_i = 0_E$. La somme est directe.

Rappel sur la concaténation.

Lorsqu'on dispose de plusieurs familles de vecteurs de E , on peut les concaténer. C'est-à-dire qu'on les regroupe pour former une nouvelle famille.

THÉORÈME

caractérisation par concaténation de bases

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E .

Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_p$ des bases respectivement de $F_1, F_2, \dots, F_p$. Les énoncés suivants sont équivalents.

- i) La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe.
- ii) La famille $\mathcal{B}$, obtenue par concaténation des familles $\mathcal{B}_i$, est une base de $\sum_{i=1}^p F_i$.

Preuve. Raisonnons par double implication.

⇒ Supposons la somme $\sum_{i=1}^p F_i$ directe. Soit $u \in \sum_{i=1}^p F_i$. Le vecteur u s'écrit de manière unique sous la forme

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_p \quad \text{avec} \quad u_i \in F_i.$$

De plus, par définition d'une base, chaque u_i s'écrit de manière unique dans la base $\mathcal{B}_i$. Au final, u s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de la famille $\mathcal{B}$. Ceci étant vrai pour tout vecteur u arbitrairement choisi, $\mathcal{B}$ est donc une base de $\sum_{i=1}^p F_i$.

⇐ Réciproquement, supposons que $\mathcal{B}$ est une base de $\sum_{i=1}^p F_i$. Notons

$$\mathcal{B} = \underbrace{(e_1, e_2, \dots, e_{j_1})}_{\text{vecteurs de } \mathcal{B}_1}, \underbrace{(e_{j_1+1}, e_{j_1+2}, \dots, e_{j_2})}_{\text{vecteurs de } \mathcal{B}_2}, \dots, \underbrace{(e_{j_{p-1}+1}, e_{j_{p-1}+2}, \dots, e_{j_p})}_{\text{vecteurs de } \mathcal{B}_p}.$$

Soit $(u_1, u_2, \dots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p$ tel que $u_1 + u_2 + \dots + u_p = 0_E$. Or, pour tout indice i , le vecteur u_i se décompose dans la base $\mathcal{B}_i$ de F_i .

$$\exists (\lambda_k) \in \mathbb{R} \quad u_i = \sum_{k=j_{i-1}+1}^{j_i} \lambda_k e_k \quad (\text{avec la convention } j_0 = 0).$$

Puis par somme $\sum_{k=1}^{j_p} \lambda_k e_k = 0_E$. Comme la famille $\mathcal{B} = (e_k)_{k \in [1; j_p]}$ est libre, pour chaque indice k , $\lambda_k = 0$, puis pour chaque indice i , $u_i = 0_E$. On a vérifié la définition, la somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe. ■

Exercice 13



♦♦ **Exemple.** Dans $\mathbb{R}^4$, on pose

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = z + t = 0\}, \quad G = \text{Vect}(u), \quad H = \text{Vect}(v) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u = (1, 0, 1, 0) \\ v = (0, 1, 0, 1). \end{cases} \quad \text{p. 41}$$

1. Donner une base de F .
2. Vérifier que $F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}^4$ à l'aide du théorème précédent.

CA13

THÉORÈME

caractérisation en dimension finie

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E . On a l'équivalence entre les énoncés suivants.

- i) La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe.
- ii) $\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) = \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$.

Preuve. Raisonnons de nouveau par double implication.

⇒ Si la somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe alors la famille $\mathcal{B}$ obtenue par concaténation de différentes bases de F_i en est une base. Par définition de la dimension :

$$\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) = \text{Card}(\mathcal{B}) = \sum_{i=1}^p \text{Card}(\mathcal{B}_i) = \sum_{i=1}^p \dim(F_i).$$

L'énoncé ii) est prouvé.

⇐ Réciproquement, s'il y a égalité des dimensions.

- La famille $\mathcal{B}$ contient $\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right)$ vecteurs.
- Par définition de la somme, $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $\sum_{i=1}^p F_i$.

On sait alors (voir cas d'égalité page 7) que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\sum_{i=1}^p F_i$. D'après le théorème précédent, on conclut que la somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe. ■

Remarque. Donnons une seconde démonstration de cet énoncé.

Pour cela, rappelons un résultat sur les produits cartésiens d'espaces vectoriels. Si $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, alors $\prod_{i=1}^p F_i$ est un espace vectoriel de dimension finie avec

$$\dim\left(\prod_{i=1}^p F_i\right) = \sum_{i=1}^p \dim(F_i).$$

La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe si et seulement si l'application linéaire

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^p F_i & \rightarrow \sum_{i=1}^p F_i \\ (u_1, u_2, \dots, u_p) & \mapsto u_1 + u_2 + \dots + u_p \end{cases}$$

est injective. Comme l'application est toujours surjective par définition de la somme de sous-espaces vectoriels, la somme est directe si et seulement si cette application linéaire est un isomorphisme, si et seulement si on a l'égalité des dimensions.

Exemple. Reprenons l'exemple précédent.

$$\dim(\mathcal{T}^+) + \dim(\mathcal{T}^-) + \dim(\mathcal{D}) = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})).$$

Exercice 14



◆ Soient F_1, F_2 et F_3 trois sous-espaces vectoriels de E tels que

$$F_1 \cap F_2 = \{0_E\}, \quad F_2 \cap F_3 = \{0_E\}, \quad F_1 \cap F_3 = \{0_E\}$$

$$\text{et } \dim(F_1) + \dim(F_2) + \dim(F_3) = \dim(E).$$

A-t-on nécessairement $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = E$?

p. 41

CA14

◆◆◆ Exemple

Dans $\mathbb{R}_3[x]$, on pose :

$$\begin{aligned} F &= \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\}, & V &= \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(1) = P(2) = 0\}, \\ G &= \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}, & H &= \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(x) = P(-x)\}. \end{aligned}$$

p. 41

1. Préciser les dimensions de chacun de ces sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. ◆ Montrer que $V \oplus H = \mathbb{R}_3[x]$.
3. ◆ Justifier que $F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}_3[x]$.

CA15

2

Matrices et applications linéaires

2.1 Rappels : définitions et théorèmes

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base d'un espace vectoriel E , alors pour tout vecteur u de E , il existe un unique n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$u = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Dans ce cas, $(x_1, \dots, x_n)$ sont les **coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$** . On définit la **matrice colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$** par

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Exercice 16



Les questions sont indépendantes.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, posons $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3)$, $u_3 = (1, 1, 0)$.
Vérifier que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, et donner la matrice des coordonnées du vecteur $v = (0, 1, 0)$ dans cette base.
2. Donner la matrice des coordonnées de $(1 + x)^n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

p. 41

CA16

Généralisation. Soient $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E et $\mathcal{B}$ une base de E (de dimension n).

Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $(x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{n,k})$ les coordonnées de u_k dans la base $\mathcal{B}$.

On appelle **matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$** , notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$, la matrice dont les colonnes sont les matrices coordonnées des vecteurs de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,p} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,p} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

Autrement dit, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ s'obtient en concaténant les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs de la famille.

Remarque. On a l'équivalence entre les deux énoncés suivants :

- La famille $\mathcal{F}$ est une base de E ;
- La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible.

Preuve. On note $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ et pour tout indice i , U_i la matrice colonne des coordonnées de u_i dans la base $\mathcal{B}$.

Pour prouver l'équivalence, commençons par 2 résultats intermédiaires.

- On peut supposer que $n = p$ car dans le cas contraire $\mathcal{F}$ ne peut être une base et la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ ne peut-être inversible (elle n'est pas carrée!).
- Soient $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0_E \iff \sum_{i=1}^n \lambda_i U_i = 0_{n,1} \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = 0_{n,1} \iff \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \text{Ker}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})).$$

On raisonne maintenant par équivalence :

La famille $\mathcal{F}$ est une base de E ;

ssi la famille $\mathcal{F}$ est une famille libre (car $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim E$);

ssi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{R}^n}$;

ssi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \text{Ker}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})) \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = 0_{n,1}$;

ssi le noyau est trivial : $\text{Ker}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})) = \{0_{n,1}\}$;

ssi la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible.

DÉFINITION

matrice d'une application linéaire

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathcal{B}_F$ deux bases respectives de E et F .

La matrice de $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est la matrice de la famille $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p))$ dans la base $\mathcal{B}_F$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)).$$

Elle est notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$.

Représentation

Notons $(e_1, \dots, e_p)$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ des bases de E et F . Une manière commode de se représenter la matrice est de placer en colonne les composantes des images de la base $(e_1, \dots, e_p)$ par φ dans la base d'arrivée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Le coefficient en position (i, j) de la matrice est la composante de $\varphi(e_j)$ suivant le vecteur ε_i .

$$\begin{array}{cccccc} & \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & & \varphi(e_p) & \\ \left[\begin{array}{ccccc} * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & * & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & * \end{array} \right] & \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array} \end{array}$$

Remarques.

- La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$ a $\dim(E)$ colonnes et $\dim(F)$ lignes.
- Dans le cas d'un endomorphisme ($E = F$), on peut choisir $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$. On note simplement $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\varphi)$ au lieu de $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E}(\varphi)$.

Exemples.

- La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\text{id}_E)$ de l'application identité est la matrice identité I_p où $p = \dim(E)$.
- La matrice de l'application nulle $u \in E \mapsto 0_F \in F$ est $0_{n,p}$ avec $n = \dim(F)$, $p = \dim(E)$.

THÉORÈME

isomorphisme

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie (de dimensions respectives p et n) et $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ deux bases respectives de E et F .

Alors l'application $\Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ \varphi & \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) \end{cases}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

En particulier, pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi + \psi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) + \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\psi) \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\lambda\varphi) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi).$$

Conséquences.

- À toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ correspond une unique application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ dont A soit la matrice dans les bases canoniques.

Elle est appelée **l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A** .

- En dimension finie, il ne peut y avoir d'isomorphisme si la dimension de l'espace de départ ne coïncide pas avec la dimension de l'espace d'arrivée. Ainsi, l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F est aussi de dimension finie et

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = pn = \dim(E) \times \dim(F).$$

THÉORÈME

image d'un vecteur

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$.

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u \in E$.

Si on note $\left| \begin{array}{l} \rightarrow U \text{ la matrice colonne des coordonnées de } u \text{ dans la base } \mathcal{B}_E. \\ \rightarrow V \text{ la matrice colonne des coordonnées de } \varphi(u) \text{ dans la base } \mathcal{B}_F. \\ \rightarrow A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi), \text{ la matrice de l'application } \varphi \text{ dans les bases } \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \end{array} \right.$

alors

$$AU = V.$$

Preuve. Posons $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et $u = \sum_{j=1}^p x_j e_j$, de sorte que $U = {}^t[x_1 \ \dots \ x_p]$.

Par définition :

$$\rightarrow A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad \text{où } \forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \varepsilon_i.$$

$$\rightarrow AU = {}^t[y_1 \ \dots \ y_n], \quad \text{où } \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad y_i = \sum_{j=1}^p a_{i,j} x_j.$$

$$\text{Alors} \quad \varphi(u) = \varphi\left(\sum_{j=1}^p x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^p x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n a_{i,j} x_j \varepsilon_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p a_{i,j} x_j\right) \varepsilon_i.$$

D'où le résultat car $V = {}^t[y_1 \ \dots \ y_n]$.

Remarques.

- Cette relation s'écrit directement

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u).$$

- Cette formule s'étend par concaténation aux matrices d'une famille de vecteurs.

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(u_1, \dots, u_q)$ une famille de vecteurs de E . Alors

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_q)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u_1, \dots, u_q)} \quad (\bullet)$$

THÉORÈME

produit matriciel et composition d'applications

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$.

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_E}(\psi \circ \varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_F}(\psi) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi).$$

Preuve. Posons $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$. Par définition de la matrice de $\psi \circ \varphi$ dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$, on a

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_E}(\psi \circ \varphi) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_G}(\psi \circ \varphi(e_1), \dots, \psi \circ \varphi(e_p)) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_G}(\psi(\varphi(e_1)), \dots, \psi(\varphi(e_p))) \\ \text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_E}(\psi \circ \varphi) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_F}(\psi) \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)), \quad \text{d'après l'égalité } (\bullet). \end{aligned}$$

Or par définition,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)),$$

donc finalement

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_E}(\psi \circ \varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_F}(\psi) \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi).$$

COROLLAIRE

inversibilité et isomorphisme

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ deux bases respectives de E et F . Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i) L'application linéaire φ est bijective.
- ii) La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$ est inversible.

Dans ce cas,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)^{-1}.$$

Exercice 17



- ◆ Prouver cet énoncé grâce au théorème précédent.
On pourra utiliser la caractérisation de la bijectivité.

p. 42

CA17

Exercice 18



- ◆◆ Les questions 1 et 2 sont indépendantes.
- ◆ Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $\varphi(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.
À quelle condition sur a, b, c et d , φ est bijective?
 - a) ◆ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer A , la matrice de $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto P(x+1) \in \mathbb{R}_n[x]$ dans la base canonique.
b) Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1} .

p. 42

CA18

2.2 Rappels : noyau, image et rang

Les définitions et le calcul

DÉFINITION

noyau, image et rang d'une matrice

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on définit :

Le noyau de A par $\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{n,1}\}.$

L'image de A par $\text{Im}(A) = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), AX = Y\} = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}.$

Le rang de A , noté $\text{rg}(A)$, est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Autrement dit, si $A = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_p]$ alors

$$\text{rg}(A) = \dim(\text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_p)).$$

• Propriétés de calcul.

- Le rang est invariant par transposition, autrement dit

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad \text{rg}(A) = \text{rg}(^tA).$$

- Le rang est invariant par les opérations élémentaires :

- L'échange de lignes ou de colonnes ($L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$).
- La multiplication d'une ligne ou d'une colonne par $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ($L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_i \leftarrow \lambda C_i$).
- L'addition d'une autre ligne ou colonne ($L_i \leftarrow L_i + L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + C_j$).

On peut fusionner les deux dernières opérations pour effectuer $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $i \neq j$ sans modifier le rang.

Remarque. Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a toujours $\text{rg}(A) \leq p$, puisqu'il y a au plus p colonnes. Comme le rang est invariant par transposition, on a aussi $\text{rg}(A) \leq n$. Retenons que

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad \text{rg}(A) \leq \min(n, p).$$

Exercice 19



- ◆ Calculer les noyaux des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B_\alpha = \begin{bmatrix} 2-\alpha & 3 & 1 \\ 5 & 6+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & -2-\alpha \end{bmatrix} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

p. 43

CA19

Exercice 20

- ♦ Calculer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 9 \\ -1 & 2 & 5 & -5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \alpha I_2 \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}. \quad \text{p. 44}$$

CA20

DÉFINITION**noyau, image et rang d'une application linéaire**

Pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit :

Le noyau de φ par $\text{Ker}(\varphi) = \{u \in E \mid \varphi(u) = 0_F\}.$

L'image de φ par $\text{Im}(\varphi) = \{v \in F \mid \exists u \in E, \varphi(u) = v\} = \{\varphi(u) \mid u \in E\}.$

Le rang de φ , noté $\text{rg}(\varphi)$, est défini par $\text{rg}(\varphi) = \dim(\text{Im}(\varphi)).$

Exercice 21

- ♦ On admet que les applications suivantes sont linéaires. Déterminer leur noyau.

$$\begin{aligned} \varphi_1 : P \in \mathbb{R}[x] &\mapsto P'' \in \mathbb{R}[x], & \varphi_2 : P \in \mathbb{R}_2[x] &\mapsto (P(1), P(0), P(-1)) \in \mathbb{R}^3, \\ \varphi_3 : P \in \mathbb{R}[x] &\mapsto P - P' \in \mathbb{R}[x] & \text{et} & \varphi_4 : P \in \mathbb{R}[x] &\mapsto P(x+1) - P(x-1) \in \mathbb{R}[x]. \end{aligned} \quad \text{p. 44}$$

CA21

Remarque. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$. Ainsi le rang de φ correspond au rang de la famille image $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$.

PROPOSITION**rang d'une matrice et d'une application linéaire**

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ deux bases respectives de E et F . Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$. Alors,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(\varphi).$$

Formule du rang et conséquences**THÉORÈME****formule du rang**

Soient E, F deux espaces vectoriels avec E de dimension finie et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\dim(\text{Ker}(\varphi)) + \text{rg}(\varphi) = \dim(E).$$

Rappels. L'application $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective si et seulement si $\text{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$.

L'application φ est surjective si et seulement si $\text{Im}(\varphi) = F$. Dans le cas où F est de dimension finie, on a aussi la surjectivité de φ si et seulement si $\text{rg}(\varphi) = \dim(F)$. À partir de la formule du rang, on montre les énoncés suivants :

• *Version endomorphisme*

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et φ un endomorphisme de E . On a équivalence entre :

- i) φ est injective ($\text{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$).
- ii) φ est surjective ($\text{rg}(\varphi) = n$).
- iii) φ est bijective.

• *Version matricielle*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a équivalence entre :

- i) $\text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$.
- ii) $\text{rg}(A) = n$.
- iii) A est inversible.

Exercice 22



♦ Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

1. Montrer que $\text{rg}(g) \leq 2$.
2. En déduire que $g \circ f$ n'est ni injective, ni surjective.

p. 45

CA22

2.3 Compléments : matrices de passage

DÉFINITION

cas particulier des matrices de passage

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, deux bases de E .

La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est appelée **matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$** . On la note $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$.

Autrement dit, la j -ème colonne de $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ est la matrice-colonne des coordonnées du j -ème vecteur de $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple. Soient $u = (1, 2)$ et $v = (3, 4)$. On vérifie que la famille $\mathcal{C} = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. La matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ à la base $\mathcal{C}$ est

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

On vérifie que $e_1 = -2u + v$ et $e_2 = 3/2 u - 1/2 v$, d'où

$$P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

⚠ Attention. On sera vigilant sur l'ordre.

Remarque. Pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, deux bases de E , on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\text{id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}.$$

En effet, si on note $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\text{id}_E) = \begin{bmatrix} \text{id}(e_1) & \text{id}(e_2) & & \text{id}(e_n) \\ * & \dots & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & * & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{matrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & & e_n \\ * & \dots & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & * & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{matrix} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}.$$

Remarque. Avec trois bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ de E , on a aussi

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{D}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \cdot P_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} \quad (\bullet)$$

Exercice 23



♦ On considère la base canonique $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$. On considère les familles de polynômes $\mathcal{C} = (1, x-a, (x-a)^2)$ et $\mathcal{D} = ((x-a)^2, (x-a)(x-b), (x-b)^2)$.

1. a) Justifier que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont deux autres bases de $\mathbb{R}_2[x]$.
b) Calculer $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$, $P_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}$ et $P_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}$. Vérifier par le calcul que $P_{\mathcal{B}, \mathcal{D}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \cdot P_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}$.
2. Prouver la relation $(\bullet)$ dans le cas général de trois bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ de E .

p. 45

CA23

PROPOSITION

coordonnées et changement de bases

Soient $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E .

Soit u un vecteur de E dont $U_{\mathcal{B}}$ et $U_{\mathcal{C}}$ sont les matrices-colonnes des coordonnées respectivement dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ alors

$$U_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} U_{\mathcal{C}}.$$

Preuve. L'énoncé est une conséquence du théorème page 14. Soit $u \in E$ tel que $U_{\mathcal{B}}$ (respectivement $U_{\mathcal{C}}$) est la matrice-colonne du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$). À partir de $u = \text{id}_E(u)$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\text{id}_E) \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u), \quad \text{puis} \quad U_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} U_{\mathcal{C}}.$$

Exercice 24



♦ Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, 2e_2 + e_3, 3e_3)$.

Existe-t-il un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ ayant les mêmes coordonnées dans ces deux bases?

On pourra dans un premier temps, traduire matriciellement le problème.

p. 45

CA24

PROPOSITION

inversibilité

Soient $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E . La matrice $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ est inversible avec

$$(P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}})^{-1} = P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}.$$

Autrement dit, l'inverse de la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.

Preuve. On a vu que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\text{id}_E)$. Comme $\text{id}_E \circ \text{id}_E = \text{id}_E$, on a

$$\begin{cases} \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\text{id}_E) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\text{id}_E) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\text{id}_E) &= I_n \\ \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\text{id}_E) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\text{id}_E) &= \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}}(\text{id}_E) &= I_n. \end{cases}$$

Par définition, $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\text{id}_E)$ est inversible et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\text{id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\text{id}_E)^{-1}.$$

On en déduit le résultat.

Exemples. Vérifions la proposition précédente sur deux cas.

- On se place dans $\mathbb{R}^3$. Considérons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, la famille définie par

$$\varepsilon_1 = (1, 1, 1), \quad \varepsilon_2 = (2, 3, 2) \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 = (-1, -2, 0).$$

On vérifie que la famille $\mathcal{C}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$, elle contient exactement 3 vecteurs. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Il vient

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

D'après ce qui précède, $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ est inversible. On peut calculer l'inverse par un pivot de Gauss, on trouve

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On peut vérifier ce calcul, par exemple, à l'aide de la première colonne

$$e_1 = 4\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3 \iff (1, 0, 0) = 4(1, 1, 1) - 2(2, 3, 2) - (-1, -2, 0).$$

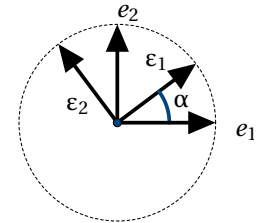
• *Matrices de rotation*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^2$, notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique et la famille $\mathcal{C}$ composée des deux vecteurs

$$\varepsilon_1 = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = (-\sin(\alpha), \cos(\alpha)).$$

Les vecteurs ε_1 et ε_2 s'obtiennent par rotation d'angle α et de centre l'origine à partir des vecteurs e_1 et e_2 . La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est alors :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$



Cette matrice est de déterminant $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1 \neq 0$. La formule de l'inverse pour les matrices $(2, 2)$ donne

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Or, les vecteurs e_1 et e_2 s'obtiennent aussi à partir de ε_1 et ε_2 par une rotation d'un angle $-\alpha$. La matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ s'obtient donc ici en remplaçant α par $-\alpha$ dans l'expression de $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$. En utilisant la parité du cosinus et l'impairité du sinus, il vient :

$$P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

On retrouve bien l'égalité $P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}})^{-1}$.

THÉORÈME

formule de changement de bases

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E . Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{-1} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}.$$

Preuve. Partons de l'égalité $\varphi = \text{id}_E \circ \varphi \circ \text{id}_E$. Matriciellement, on obtient

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) &= \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\text{id}_E) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\text{id}_E) \\ &= P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}. \end{aligned}$$

Enfin, la proposition précédente donne le résultat :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{-1} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}.$$

Remarque. On peut généraliser la formule de changement de bases. Si $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F , deux espaces de dimension finie. Si $\mathcal{B}_E, \mathcal{C}_E$ (resp. $\mathcal{B}_F, \mathcal{C}_F$) sont deux bases de E (resp. de F) alors on montre comme précédemment que

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}_F, \mathcal{C}_E}(\varphi) = P_{\mathcal{B}_F, \mathcal{C}_F}^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) P_{\mathcal{B}_E, \mathcal{C}_E}.$$

Exercice 25



♦ Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Posons de plus $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ avec

$$u_1 = e_1 - e_3, \quad u_2 = e_1 - 2e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad u_3 = e_1 + e_2 + e_3. \quad \text{p. 45}$$

1. On admet que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Préciser B , la matrice de φ dans la base $\mathcal{C}$.
2. Expliciter la relation entre A et B . À quelles conditions sur a et b , l'endomorphisme φ est un isomorphisme?

CA25

2.4 Compléments : matrices semblables

DÉFINITION

matrices semblables

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A est **semblable** à B s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Exercice 26



♦ **Vrai ou faux?** Pour tous $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. A est semblable à A . ✓ ×
2. Si A est semblable à B , alors B est semblable à A . ✓ ×
3. Si A est semblable à B , et B est semblable à C , alors A est semblable à C . ✓ ×
4. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, si A est semblable à B alors A^p est semblable à B^p . ✓ ×
5. Si A est semblable à B et A est inversible alors A^{-1} est semblable à B^{-1} . ✓ ×

p. 46

CA26

Exemple. Les matrices suivantes sont semblables :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Exercice 27



♦ Justifions l'exemple en considérant φ , l'endomorphisme canoniquement associé à M .

1. a) Prouver l'existence de $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $\text{Vect}(u) = \text{Ker}(\varphi - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$.
De même, on prouve que $v = (4, 3, -2)$, $w = (-2, 3, -2)$ vérifient

$$\text{Vect}(v) = \text{Ker}(\varphi - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3}) \quad \text{et} \quad \text{Vect}(w) = \text{Ker}(\varphi + 4\text{id}_{\mathbb{R}^3}). \quad \text{p. 46}$$

- b) Vérifier que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrer que M et D sont semblables.

CA27

PROPOSITION

endomorphisme et similitude

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, deux matrices et E un espace vectoriel de dimension finie n .

Les matrices A et B sont semblables si et seulement si A et B représentent un même endomorphisme de E . C'est-à-dire il existe deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ de E et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \quad \text{et} \quad B = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi).$$

Preuve. C'est une conséquence du théorème de changement de base en précisant que toute matrice inversible peut être vue comme une matrice de changement de base.

Exemple. Pour trois réels a, b et c , on pose

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Justifions que A et B sont semblables. Soit φ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A . Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a

$$\varphi(e_1) = ae_1 \quad \text{et} \quad \varphi(e_2) = be_1 + ce_2.$$

La matrice B est semblable à A si l'on peut trouver une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ telle que

$$\varphi(\varepsilon_1) = c\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 \quad \text{et} \quad \varphi(\varepsilon_2) = a\varepsilon_2.$$

On constate que le choix $\varepsilon_1 = e_2$ et $\varepsilon_2 = e_1$ convient.

On peut vérifier par le calcul, si on pose

$$P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

on trouve que $PBP^{-1} = A$. Les matrices sont bien semblables.

COROLLAIRE

invariance du rang par similitude

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A et B sont semblables, **alors** elles ont même rang.

Preuve. Si A et B sont deux matrices semblables, alors elles représentent le même endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dans des bases différentes. Ainsi, avec la proposition précédente

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(\varphi) = \text{rg}(B).$$

Exercice 28



❖ La réciproque est fautive. Pouvez-vous donner un contre-exemple?

p. 46

CA28

3

Compléments : trace d'une matrice

DÉFINITION

trace

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit la **trace** de A , notée $\text{Tr}(A)$, comme la somme des coefficients diagonaux de A .

Autrement dit, pour $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$,

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Exercice 29



❖ Calculer $\text{Tr}(I_n)$, $\text{Tr}(0_n)$, $\text{Tr}(J)$ et $\text{Tr}(K)$ où

$$J = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

p. 46

CA29

À partir des règles de calcul usuelles, on montre que :

PROPOSITION

forme linéaire

L'application trace $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire. C'est-à-dire, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) \quad \text{et} \quad \text{Tr}(\lambda A) = \lambda \text{Tr}(A).$$

Vocabulaire. Une forme linéaire est une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exercice 30

1. Donner la dimension de $\text{Ker}(\text{Tr})$. Préciser une base.
2. Expliciter un supplémentaire du noyau.

p. 46

CA30

Remarque. On peut aussi noter que la trace est invariante par transposition :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{Tr}({}^t A) = \text{Tr}(A).$$

PROPOSITION

trace et produit

Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

Exercice 31

1. Prouver cette proposition.
Si on note $[M]_{i,j}$, le coefficient en position (i, j) de la matrice M , on rappelle que pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^p [A]_{i,k} [B]_{k,j}$.

2. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Tr}((AB)^k) = \text{Tr}((BA)^k)$.

3. a) Écrire un programme **Tr3** qui prend en argument trois matrices A, B, C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et renvoie $\text{Tr}(ABC)$.

p. 46

- b) Tester et commenter avec **Tr3**(A,B,C) et **Tr3**(B,A,C) où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

CA31

COROLLAIRE

invariance par similitude

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible. Alors

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(P^{-1}AP).$$

Preuve. D'après la proposition précédente

$$\text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(P^{-1}(AP)) = \text{Tr}((AP)P^{-1}) = \text{Tr}(APP^{-1}) = \text{Tr}(AI_n) = \text{Tr}(A).$$

Remarque. Autrement dit, deux matrices semblables ont même trace. Cette propriété permet de définir la trace d'un endomorphisme (voir exercice 57). La réciproque est fautive, par exemple la matrice I_n et J (de taille (n, n) et ne contenant que des « 1 ») ont même trace; pourtant, elles ne sont pas semblables ($\text{rg}(J) = 1 \neq n = \text{rg}(I_n)$ pour $n > 1$).

Exercice 32



♦ ♪ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Que dire de A si $\text{Tr}(A^t A) = 0$?
2. Que dire de A et B si pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(AX) = \text{Tr}(BX)$?

p. 47

CA32

4

Compléments : les espaces stables

DÉFINITION

espace stable

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et F une partie de E . On dit que F est une **partie stable** par φ si

$$\forall u \in F, \quad \varphi(u) \in F.$$

Exemple. Soit $\varphi : f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mapsto f' \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Les espaces $\mathbb{R}[x]$ et $\text{Vect}(\cos, \sin)$ sont des parties stables de φ .

Exercice 33



♦ ♪

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que toute somme de s.e.v stables par φ reste stable par φ .
2. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Montrer que le noyau et l'image de ψ sont stables par φ .
3. ♦♦ Donner les sous-espaces stables de l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{R}[x]$.

p. 47

CA33

Remarques.

- Soit F un sous-espace vectoriel de E avec $(e_1, \dots, e_p)$ une famille génératrice de F . Alors F est une partie stable par φ si et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\varphi(e_i) \in F$.

Preuve. Supposons que pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\varphi(e_i) \in F$. Soit $u \in F$. La famille $(e_1, \dots, e_p)$ étant génératrice, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $u = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$. Comme φ est linéaire et F stable par combinaison linéaire

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \underbrace{\varphi(e_i)}_{\in F} \in F.$$

L'espace F est donc stable par φ . La réciproque est évidente. ■

- Si F est un sous-espace vectoriel stable par φ , on peut définir la restriction de φ à F par

$$\varphi|_F : \begin{cases} F & \rightarrow F \\ u & \mapsto \varphi(u). \end{cases}$$

L'application $\varphi|_F$ définit alors un endomorphisme de F .

Exercice 34



♦ Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ injectif et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E stable par φ . Montrer que l'endomorphisme induit par φ sur F est un isomorphisme.

p. 48

CA34

Exercice 35



◇ Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ et Φ l'application linéaire de $\mathbb{R}[x]$ vers lui-même définie par

$$\Phi(P)(x) = (a + bx)P(x) + x(1 - x)P'(x).$$

1. Justifier qu'il existe un entier n unique tel que $\mathbb{R}_n[x]$ soit stable par Φ .
2. Soit Φ_n l'endomorphisme restreint à $\mathbb{R}_n[x]$.
Écrire la matrice A de Φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

p. 48

CA35



Exercices



- Le niveau de difficulté de l'exercice est repéré par les symboles $\diamond$, $\blacklozenge$, $\blacklozenge\blacklozenge$, $\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge$ (difficulté croissante).
- Les exercices classiques à bien maîtriser sont repérés par 🎵 .

Exercice 36. $\blacklozenge$ 🔑 Vrai ou faux?

CA36

1. La somme de deux matrices inversibles est inversible.
2. Toute matrice carrée est la somme de deux matrices inversibles.

✓ ×

✓ ×

>> Solution p. 48

Exercice 37. $\blacklozenge$ Soient E un espace vectoriel de dimension 2 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\text{id}_E$.

CA37

Soit u un vecteur non nul de E .

1. Est-ce que f est injective? surjective?
2. Justifier que $(u, f(u))$ est une base de E .
3. Donner la matrice de f dans cette base.
4. $\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge$ Généraliser le résultat précédent dans le cas où E est de dimension $2n$.

>> Solution p. 48

Exercice 38. $\blacklozenge\blacklozenge$ 🎵 On pose $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -10 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

CA38

1. 🔑 En examinant les instructions en Python suivantes, calculer les puissances de A .

Éditeur

```
>>> import numpy as np
>>> A = np.array([-4, 0, 3], [0, 2, 0], [-10, 0, 7])
>>> P = np.array([1, 0, 3], [0, 1, 0], [2, 0, 5])
>>> P_inv = np.linalg.inv(P) # calcule l'inverse de la matrice
>>> P_inv
array([[ -5.,  0.,  3.],
       [ 0.,  1.,  0.],
       [ 2.,  0., -1.]])
>>> P_inv @ A @ P           # La commande @ effectue le produit matriciel
array([[2., 0., 0.],
       [0., 2., 0.],
       [0., 0., 1.]])
```

2. 🔑 Peut-on trouver $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$?

Exercice 39. $\blacklozenge$ Peut-on trouver deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$?

🔑 # CA39

>> Solution p. 49

Exercice 40. $\blacklozenge$ Liberté d'une famille d'applications de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

CA40

On pose $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)$, $f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 + \sin(x^2)$ et $f_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(2x)$.

1. Donner les développements limités de f_1, f_2 et f_3 en 0 à l'ordre 4.
2. En déduire que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

>> Solution p. 49

Exercice 41. $\blacklozenge$ 🎵 Rang et composition

CA41

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\text{rg}(g \circ f) \leq \min\{\text{rg}(f); \text{rg}(g)\}$.
2. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E, F)$. Justifier que $\text{Im}(\varphi + \psi) \subset \text{Im}(\varphi) + \text{Im}(\psi)$. Puis, en déduire que $\text{rg}(\varphi + \psi) \leq \text{rg}(\varphi) + \text{rg}(\psi)$.
3. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
 - a) Pour tout isomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E', E)$, on a $\text{rg}(f \circ \varphi) = \text{rg}(f)$.
 - b) Pour tout isomorphisme $\psi \in \mathcal{L}(F, F')$, on a $\text{rg}(\psi \circ f) = \text{rg}(f)$.

>> Solution p. 49

Exercice 42. ♦♦ Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que

CA42

$$E = \text{Im } f + \text{Im } g \quad \text{et} \quad E = \text{Ker } f + \text{Ker } g.$$

Montrer que ces sommes sont directes.

>> Solution p. 50

Exercice 43. ♦ On définit les matrices et l'application

CA43

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \varphi: \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto AMB. \end{cases}$$

1. Vérifier que φ est linéaire.
2. Justifier que φ est une application bijective et exprimer φ^{-1} .
3. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (I_2, A, B, AB)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis déterminer la matrice de φ dans $\mathcal{B}$.
Pour simplifier les calculs, on pourra utiliser ce script Python :

>> Solution p. 50

Editeur

```
import numpy as np
A=np.array([[2,1],[5,3]])
print(np.dot(A,A)-5*A+np.eye(2))

B=np.array([[4,1],[7,2]])
print(np.dot(B,B)-6*B+np.eye(2))
```

Console

```
>>> # script executed

[[0.  0.]
 [0.  0.]]
[[0.  0.]
 [0.  0.]]
```

Exercice 44. ♦♦ Soit φ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n . On suppose que φ est de rang 1.

CA44

1. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $\varphi^2 = \lambda\varphi$. Pour rappel φ^2 désigne $\varphi \circ \varphi$.
2. Montrer que si $\lambda \neq 1$, $\varphi - \text{id}_E$ est bijective et exprimer son application réciproque à l'aide de φ .

>> Solution p. 51

Exercice 45. ♦♦♦ **Égalité de Bézout**

CA46

Soient $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_q$ des réels deux à deux distincts. On considère les polynômes

$$A(x) = \prod_{i=1}^p (x - a_i) \quad \text{et} \quad B(x) = \prod_{i=1}^q (x - b_i).$$

On note $n = p + q - 1$ et $E = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n . On introduit de plus,

$$F_A = \{P \in E \mid A \text{ divise } P\} \quad \text{et} \quad F_B = \{P \in E \mid B \text{ divise } P\}.$$

1. Montrer que F_A et F_B sont des sous-espaces vectoriels de E . Préciser les dimensions de F_A et F_B .
2. Vérifier que $E = F_A \oplus F_B$.
3. En déduire qu'il existe deux polynômes U et V tels que $UA + VB = 1$.

>> Solution p. 51

Exercice 46. ♦♦ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, les polynômes P_k définis par $P_k(x) = (1-x)^k x^{n-k}$.

CA47

1. Préciser le degré de P_k .
2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Simplifier $\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} P_i$.
3. En déduire que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

4. a) Montrer que pour $0 \leq i \leq n$, $\sum_{k=i}^n \binom{k}{i} = \binom{n+1}{i+1}$.
- b) Déterminer les coordonnées du polynôme $Q(x) = \sum_{j=0}^n x^j$ dans la base $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$.

>> Solution p. 52

Exercice 47. ♦♦ Produit cartésien et formule de Grassmann

CA48

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E . On rappelle que $F \times G$ est un espace vectoriel pour les lois définies par : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in F \times G$

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \quad \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

- Justifier que si F et G sont de dimensions finies, alors $F \times G$ est de dimension finie et $\dim(F \times G) = \dim(F) + \dim(G)$.
- a) Vérifier que l'application $f : F \times G \rightarrow E, (x, y) \mapsto x + y$ est linéaire.
- b) Déterminer $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$.
- c) Retrouver la formule de Grassmann : $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

>> Solution p. 52

Exercice 48. ♦♦♦ 🎵

d'après les oraux ESCP 2001 # CA49

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n ($n \geq 2$). On note S (respectivement A) le sous-espace vectoriel de E formé des matrices symétriques (respectivement antisymétriques).

Soient α, β deux réels donnés non nuls, et f l'application définie sur E par, pour tout $M \in E$: $f(M) = \alpha M + \beta^t M$

- Montrer que $E = S \oplus A$.
- Exprimer f à l'aide de p et q , où $q = \text{id}_E - p$, quand p désigne le projecteur sur S de direction A .
- Exprimer $f^2 = f \circ f$ en fonction de f et de id_E .
- Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un automorphisme de E . Exprimer alors f^{-1} en fonction de f et de id_E .
- Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f^k en fonction de p, q, α, β . En déduire la puissance k -ième de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha + \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + \beta \end{bmatrix}.$$

>> Solution p. 53

Exercice 49. ♦♦ Soit φ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de rang 1.

CA50

- On suppose que $\text{Im}(\varphi) \cap \text{Ker}(\varphi) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Justifier que $\text{Im}(\varphi) \subseteq \text{Ker}(\varphi)$, puis qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle φ est représenté par la matrice :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

- On suppose que $\text{Im}(\varphi) \cap \text{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle φ est représenté par la matrice :

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}^*.$$

- En déduire que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont la même trace.
- Bonus cube.** À quelle condition sur sa trace une matrice de rang 1 est diagonalisable?

>> Solution p. 53

Exercice 50. ♦♦ Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que

CA51

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f, g les applications linéaires canoniquement associées à A et B .

1. Vérifier que $g(e_2)$ et $g(e_3)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. Notons $\mathcal{C}$ cette base.
2. Expliciter la matrice de $g \circ f$ dans cette nouvelle base.
3. Calculer BA .

>> Solution p. 53

Exercice 51. ♦♦ 🎵 Variante sur les endomorphismes nilpotents

CA52

Soient E un espace vectoriel de dimension 4 et φ un endomorphisme de E tel que $\varphi^5 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Justifier que $\varphi^4 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. Dans la suite, on suppose de plus que $\varphi^3 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Peut-on avoir $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \varphi^2$? Même question avec $\text{Ker } \varphi^2 = \text{Ker } \varphi^3$.
3. En déduire que $\dim \text{Ker } \varphi^3 = 3$.
4. Conclure en montrant qu'il existe une base dans laquelle les coefficients de la matrice de φ dans cette base sont nuls partout, sauf éventuellement sur la diagonale située immédiatement sous la diagonale principale.

>> Solution p. 54

Exercice 52. ♦♦ Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et φ un endomorphisme de E tel que :

CA53

$$\exists p \in \mathbb{N}, \quad \varphi^p = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad \varphi^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

On dit que φ est un endomorphisme nilpotent d'indice p .

1. Montrer que $\text{Ker}(\varphi) \subset \text{Ker}(\varphi^2) \subset \dots \subset \text{Ker}(\varphi^p) = E$.
Vérifier que toutes ces inclusions sont strictes.
2. Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\text{Ker}(\varphi)$. On la complète en une base $\mathcal{B}_2$ de $\text{Ker}(\varphi^2)$. On continue le procédé en complétant, pour tout entier $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ une base $\mathcal{B}_k$ de $\text{Ker}(\varphi^k)$ en une base $\mathcal{B}_{k+1}$ de $\text{Ker}(\varphi^{k+1})$.
On trouve ainsi une succession de bases $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \dots \subset \mathcal{B}_p$, où $\mathcal{B}_p$ est une base de E .
Montrer que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}_p$ est triangulaire par blocs, avec une diagonale nulle.
3. En déduire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_n$, alors A est de trace nulle.
Que dire de $\text{Tr}(A^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$?

>> Solution p. 54

Exercice 53. ♦♦ Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

CA54

On suppose que, pour tout $u \in E$, il existe un entier $n_u \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n_u}(u) = 0_E$. Montrer qu'il existe un entier n tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

>> Solution p. 55

Exercice 54. ♦ Soient E un espace vectoriel et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

CA55

Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(\varphi)$, $\text{Ker}(\varphi - \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(\varphi + \text{id}_E)$ sont en somme directe.

>> Solution p. 55

Exercice 55. ♦ Somme directe dans $\mathbb{R}_n[x]$

CA56

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on définit $F_i = \{P \in \mathbb{R}_n[x] \mid \forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{i\}, P(j) = 0\}$.

1. Justifier que pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$,

$$F_i = \text{Vect}(L_i) \quad \text{où} \quad L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - j).$$

2. Vérifier que la somme $F_0 + F_1 + \dots + F_n$ est directe, puis l'égalité $\bigoplus_{i=0}^n F_i = \mathbb{R}_n[x]$.

>> Solution p. 55

Exercice 56. ♦ Soit A un élément donné de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non colinéaire à I_2 . On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont A est la matrice associée dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$. On pose : $w = e_1 + e_2$.

CA57

1. En considérant les trois vecteurs e_1, e_2 et w , montrer qu'il existe au moins un élément non nul x de $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $(x, \varphi(x))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la matrice M associée à φ dans la base $(x, \varphi(x))$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$$

où a et b sont deux réels, indépendants de la base $(x, \varphi(x))$, que l'on exprimera en fonction de $\det(A)$ et $\text{Tr}(A)$.
On pourra admettre que le déterminant est un invariant de similitude.

3. En déduire que la matrice A est semblable à sa transposée tA .

>> Solution p. 55

Exercice 57. ♦ 🎵 Trace d'un endomorphisme

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E . On définit la trace de φ par

$$\text{Tr}(\varphi) = \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)).$$

1. 🎯 Justifier que la trace de φ ne dépend pas du choix de la base.

2. Exemples

- a) 🎯 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la trace de φ où $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto P - P' \in \mathbb{R}_n[x]$.
- b) 🎯 On pose $\varphi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - i) Justifier que le sous-espace des matrices symétriques de taille (n, n) (noté $\mathcal{S}_n$) et celui des matrices antisymétriques (noté $\mathcal{A}_n$) sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Préciser les dimensions.
 - ii) En déduire la trace de φ .
- c) 🎯 Soit p un projecteur de E . Vérifier que la trace de p est égale à son rang.

>> Solution p. 56

Exercice 58. ♦♦♦ 🎵 Commutant d'une matrice nilpotente

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$.

1. 🎯 Montrer que la matrice A est semblable à la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. 🎯 En déduire la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{C}_B = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MB \right\}$ et celle de $\mathcal{C}_A$.

>> Solution p. 56

Exercice 59. ♦♦♦ Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'application $\Phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ par $\Phi_A(X) = \text{Tr}(AX)$.

1. Montrer que Φ_A est une forme linéaire.
2. 🎯 Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, justifier qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = \Phi_A$.

>> Solution p. 57

Exercice 60. ♦♦ 🎵 Matrice de Vandermonde - Lien avec les polynômes de Lagrange

Soit $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On pose

$$V_a = \begin{bmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

1. Notons $C_0, C_1, \dots, C_n$ les $n+1$ colonnes de V_a . À quelle condition sur les réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ les colonnes de V_a forment une famille libre? En déduire une condition pour l'inversibilité de V_a .

On suppose cette condition vérifiée dans la suite.

Notons $\mathcal{B} = (1, x, \dots, x^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ et $(e_0, \dots, e_n)$, la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. a) Montrer que l'application suivante est un isomorphisme

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[x] & \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto (P(a_0), \dots, P(a_n)). \end{cases}$$

- b) Pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on définit le polynôme $L_i = \varphi^{-1}(e_i)$. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ et que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x], \quad P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i.$$

- c) Préciser $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{-1}$ où $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ désigne la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

>> Solution p. 58

Exercice 61. ♦♦♦ Vecteurs cycliques et espaces stables

CA62

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un vecteur $u \in E$ non nul est *cyclique* pour φ s'il existe un entier m non nul tel que la famille $\mathcal{B}_{u,m} = (u, \varphi(u), \varphi^2(u), \dots, \varphi^{m-1}(u))$ soit une famille génératrice de E .

Pour rappel, $\varphi^i(u) = \varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi(u)$ avec i compositions.

1. Comparer m et n .
2.  Montrer que si u est cyclique pour φ , alors $\mathcal{B}_{u,n}$ est une base de E .

3. Application

Dans la suite, on suppose que les seuls sous-espaces vectoriels stables par φ sont $\{0_E\}$ et E .

- a)  Justifier qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille $\mathcal{B}_{u,m}$ soit libre mais $\mathcal{B}_{u,m+1}$ n'est pas libre.
- b) Vérifier que $\text{Vect}(\mathcal{B}_{u,m})$ est un espace stable par φ .
- c) En déduire que tout vecteur $u \in E \setminus \{0_E\}$ est cyclique.
- d)  On note $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ les coordonnées de $\varphi^n(u)$ dans la base $\mathcal{B}_{u,n}$. Justifier que

$$\varphi^n = a_0 \cdot \text{id}_E + a_1 \cdot \varphi + \dots + a_{n-1} \cdot \varphi^{n-1}.$$

- e) Donner la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}_{u,n}$ à l'aide des réels a_i .

>> Solution p. 58

Exercice 62. ♦ Soient $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\text{Tr}(A) = 0$ et φ son endomorphisme canoniquement associé.

CA63

1.  Justifier qu'il existe $x \in \mathbb{R}^2$ tel que la famille $(x, \varphi(x))$ soit libre.
2.  En déduire que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

>> Solution p. 60

Exercice 63. ♦ On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on note $\mathcal{C}$, la base canonique. On considère $\mathcal{P}$ le plan vectoriel d'équation $2x - y - z = 0$, la droite vectorielle $\mathcal{D} = \text{Vect}(u)$ où $u = (1, -1, 1)$. # CA64

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$.
2. Soit $\mathcal{B}$, une base adaptée à la décomposition précédente et p le projecteur sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$. Préciser la matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$.
3. Expliciter la matrice de passage entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$. En déduire la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(p)$.

>> Solution p. ??

Exercice 64. ♦♦♦ Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E_1 \oplus \dots \oplus E_n = E$. On note p_i le projecteur sur E_i parallèlement à $\oplus_{j \neq i} E_j$. Montrer que $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$ si $i \neq j$ et que $p_1 + \dots + p_n = \text{id}_E$. # CA65

>> Solution p. ??

Exercice 65. ♦♦♦

d'après EDHEC 94, option scientifique # CA66

On étudie un sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles à indices dans $\mathbb{N}$:

$$\mathcal{E} = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = \frac{3}{2}u_{n+2} - \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{8}u_n \right\}$$

1. Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ est de dimension 3. (On pourra éventuellement considérer l'application linéaire φ de $\mathcal{E}$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(u) = (u_0, u_1, u_2)$.)
2. Montrer que si l'on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{2^n}, \quad b_n = \frac{n}{2^n}, \quad c_n = \frac{n^2}{2^n},$$

les trois suites a, b, c forment une base de $\mathcal{E}$.

3. Montrer que si u appartient à $\mathcal{E}$, la série de terme général u_n est convergente. On notera $s(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.
4. Calculer $s(a), s(b)$ et $s(c)$.
5. Montrer que $s : u \mapsto s(u)$ est une application linéaire de $\mathcal{E}$ vers $\mathbb{R}$; quelle est la dimension de $\text{Ker } s$?

6. Déterminer $\text{Ker } s$.

>> Solution p. ??

Exercice 66. ♦♦♦  Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$.

d'après l'oral HEC # CA67

1. On suppose que $u^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Déterminer alors les sous-espaces vectoriels F de $\mathbb{R}^3$ stables par u , c'est-à-dire tels que $u(F) \subset F$.

2. On suppose que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Déterminer alors les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par u .

>> Solution p. ??

Exercice 67. ♦ Écrire un programme Python qui compte le nombre de matrices non inversibles parmi les matrices de taille (25, 25) : # CA68

$$M(a, b) = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{bmatrix} \quad \text{avec } a, b \in \llbracket -50; 50 \rrbracket.$$

Indication. On pourra utiliser les commandes `ones([n,p])` qui renvoie une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ne contenant que des 1, `eye(n)` pour la matrice I_n et `np.linalg.matrixrank(A)` pour le rang de la matrice A .

>> Solution p. 60

Exercice 68. ♦♦ Antitransposée et matrices antidiagonales

CA69

>> Solution p. 60

1. a) Compléter le programme suivant qui prend en argument une matrice A et renvoie sa transposée.

Editeur

```
import numpy as np

def transpo(A):
    [n,p]=np.shape(A)
    B=np.zeros( ... )
    for i in ... :
        for j in ... :
            B[...]=
    return B
```

- b) On définit l'antitransposée d'une matrice carrée A par la matrice C obtenue par symétrie par rapport à l'antidiagonale. Par exemple,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C_0 = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Comment modifier le programme précédent pour obtenir un nouveau programme qui prend en argument une matrice A et qui renvoie son antitransposée?

2. Une matrice T est dite antidiagonale si les coefficients situés en dehors de l'antidiagonale sont nuls. Par exemple,

$$T_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

À l'aide de Python, que peut-on conjecturer sur les puissances d'une matrice antidiagonale?

Indication. On pourra utiliser la commande `np.dot(A,B)` pour faire le produit AB .

3. Prouver votre résultat.

Indication. On pourra considérer TP_n où T est une matrice antidiagonale de taille (n, n) et P_n est la matrice construite sur le même modèle que P_3 .

4. À quelle condition sur ses coefficients, une matrice antidiagonale est inversible?

Exercice 69. ♦ 🎵 Montrer que toute matrice triangulaire supérieure stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice inférieur ou égal à n . # CA75



Indications et solutions



On étudie en vain si l'on ne réfléchit pas.
On réfléchit en vain si l'on n'étudie pas.

CONFUCIUS, *Entretiens*

Indication de l'exercice 1

p. 2

Vérifier que E_2 , E_7 , E_8 et E_{10} sont les seuls espaces vectoriels.

Indication de l'exercice 2

p. 2

Soit $u_1 \in E_1 \setminus E_2$. En considérant $u_1 + v \in E_1 \cup E_2$, montrer que pour tout vecteur $v \in E_2$, $v \in E_1$.

Indication de l'exercice 3

p. 3

2. Il faut et il suffit que P soit de degré n .

4.a) Utiliser les croissances comparées pour justifier que la famille est libre.

4.b) Utiliser un argument de dérivabilité. La fonction f_i n'est pas dérivable en i .

Indication de l'exercice 8

p. 7

2. Justifier que pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, on a $P = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i$.

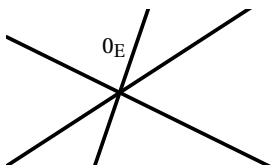
Indication de l'exercice 10

p. 8

1. Justifier que G est de dimension $n - 1$ en exhibant une base. On pourra supposer que $a_n \neq 0$.

Indication de l'exercice 11

p. 9



Indication de l'exercice 13

p. 11

Déterminer une base (w_1, w_2) de F . Vérifier ensuite que la famille (u, v, w_1, w_2) est une base de $\mathbb{R}^4$. Conclure avec la

proposition précédente.

Indication de l'exercice 14

p. 12

Adapter le schéma de l'indication 12 ci-dessus dans $\mathbb{R}^3$.

Indication de l'exercice 15

p. 12

2. Vérifier que

$$\dim V + \dim H = \dim(\mathbb{R}_3[x]) \quad \text{et} \quad V \cap H = \{0\}.$$

3. Il faut justifier que l'on peut retirer les parenthèses

$$(F \oplus G) \oplus H = F \oplus G \oplus H.$$

Indication de l'exercice 17

p. 16

Pour rappel :

Soit $f : E \rightarrow F$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

→ f est bijective.

→ Il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que : $f \circ g = \text{id}_F$ et $g \circ f = \text{id}_E$.

Dans ce cas, $g = f^{-1}$.

Indication de l'exercice 18

p. 16

1. Donner la matrice de l'application dans la base canonique puis conclure avec le déterminant.

2.b) Remarquer que φ est bijective avec $\varphi^{-1} : P \mapsto \dots$

Indication de l'exercice 26

p. 21

Tout est vrai !

Indication de l'exercice 28

p. 22

On pourra regarder les matrices semblables à I_n et les matrices de même rang que I_n .

Indication de l'exercice 36

p. 26

La première est fausse et la seconde est vraie (on pourra utiliser des matrices triangulaires).

Indication de l'exercice 38

p. 26

1. Écrire A sous la forme $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale. Exprimer

ensuite A^P à l'aide de P , D et P^{-1}
2. Partir d'une matrice S telle que $S^2 = D$.

Indication de l'exercice 39 p. 26

Pensez à la trace.

Indication de l'exercice 42 p. 27

Écrire les formules du rang pour f et g ainsi que la formule de Grassmann avec $\text{Im } f + \text{Im } g$ et $\text{Ker } f + \text{Ker } g$.

Indication de l'exercice 44 p. 27

2. Exprimer l'application réciproque sous la forme $\alpha\varphi + \beta \text{id}_E$.

Indication de l'exercice 56 p. 29

- 1.** Tester avec $x = e_1$, $x = e_2$ et enfin $x = e_1 + e_2$.
- 2.** Regarder la matrice de φ dans la base de $\mathbb{R}^2$, $(x, \varphi(x))$.

Indication de l'exercice 57 p. 30

- 1.** Appliquer la formule de changement de base et la relation $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
- 2.a)** Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
- 2.b)i.** Vérifier que $\dim \mathcal{S}_n = n(n+1)/2$ et $\dim \mathcal{A}_n = n(n-1)/2$.
- 2.b)ii.** Écrire la matrice de l'application φ dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition

$$\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

3.c) Raisonner par analyse-synthèse. Pour $u \in E$

$$u = \underbrace{p(u)}_{\in \text{Im } p} + \underbrace{(u - p(u))}_{\in \text{Ker } p}.$$

Indication de l'exercice 58 p. 30

- 1.** Justifier l'existence de $v \in \text{Ker } \varphi \setminus \text{Im } \varphi$ et $w \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{Ker } \varphi$. Montrer que la famille $(u, \varphi(w), w)$ est une base. Que dire de la matrice de φ dans cette base?
- 2.** Écrire $A = P^{-1}BP$. Justifier que $M \in \mathcal{C}_A$ si et seulement si $PMP^{-1} \in \mathcal{C}_B$. Que peut-on en déduire sur les dimensions de $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_A$? Calculer ensuite $\dim \mathcal{C}_B$ en déterminant les conditions sur les coefficients de

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

pour que $M \in \mathcal{C}_B$.

Indication de l'exercice 59 p. 30

- 2.** Pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, on pose $\Phi_{ij} = \Phi_{E_{ij}}$. Montrer que la famille (Φ_{ij}) est une base de l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Utiliser ensuite le fait que

$$\dim(\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})) = n^2$$

pour justifier que l'on obtient une base. Conclure.

Indication de l'exercice 60 p. 30

- 2.a)** Par un argument de dimension, il suffit de montrer que φ est injective. Montrer ensuite que si $P \in \text{Ker } \varphi$, P est nécessairement le polynôme nul.

Indication de l'exercice 61 p. 31

- 2.** Procéder par récurrence sur la propriété : la famille $\mathcal{B}_{u,k}$ est une famille libre (avec $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$).
- 3.a)** Que dire de la liberté de la famille

$$(\text{id}_E, \varphi, \dots, \varphi^p)$$

avec $p > \dim \mathcal{L}(E)$?

- 3.d)** Vérifier l'égalité pour tout vecteur de la base $\mathcal{B}_{u,n}$.

Exercice 1 p. 2
CA1

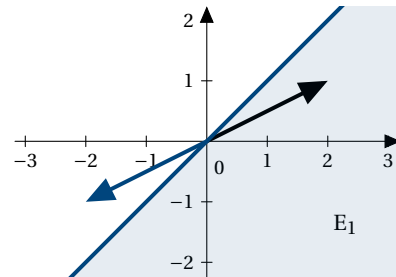
- Non, E_1 n'est pas un e.v.

Par exemple, E_1 n'est pas stable par multiplication par un réel.

$$(2, 1) \in E_1,$$

mais $-1 \cdot (2, 1) = (-2, -1) \notin E_1$.

Graphiquement, E_1 est un demi-plan.



- Afin de prouver que E_2 est un espace vectoriel, on peut prouver que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, on vérifie que E_2 est non vide et stable par combinaison linéaire.

→ E_2 est non vide car $(0, 0, 0) \in E_2$.
 → Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $X = (x, y, z) \in E_2$ et $X' = (x', y', z') \in E_2$. Par définition de E_2 , on a $2x + z = y$ et $2x' + z' = y'$.

Il vient

$$X + \lambda X' = (x, y, z) + \lambda(x', y', z') = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z').$$

Puis,

$$2(x + \lambda x') + (z + \lambda z') = (2x + z) + \lambda(2x' + z') = y + \lambda y'.$$

C'est-à-dire, $X + \lambda X' \in E_2$.

En conclusion, E_2 est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puis

E_2 est un espace vectoriel.

- E_3 n'est pas un espace vectoriel, puisque l'élément neutre pour addition n'appartient pas à E_3 .

$$(0, 0, 0) \notin E_3 \quad \text{car} \quad 0 - 0 \neq 2.$$

- Non, E_4 n'est pas un espace vectoriel.

Il n'est pas stable par somme. Par exemple,

$$X = (1, 1, 0) \in E_4 \quad \text{car} \quad 1^2 + 0^2 = 1$$

$$\text{et} \quad X' = (-1, 1, 0) \in E_4 \quad \text{car} \quad (-1)^2 + 0^2 = 1.$$

Par contre, $X + X' = (0, 1, 0) \notin E_4 \quad \text{car} \quad 0^2 + 0^2 \neq 1$.

- Non, E_5 n'est pas un espace vectoriel.

Il n'est pas stable par somme. Par exemple $(1, 1, 0) \in E_5$, $(0, 0, 1) \in E_5$ mais $(1, 1, 1) \notin E_5$.

- E_6 n'est pas un espace vectoriel.

Le polynôme nul $x \in \mathbb{R} \mapsto 0 \in \mathbb{R}$ n'est pas dans E_6 .

- Prouvons que E_7 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

→ L'application nulle $x \in \mathbb{R} \mapsto 0 \in \mathbb{R}$ est clairement un élément de E_6 qui n'est donc pas vide.

→ Soient $f, g \in E_7$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a par définition de $f + \lambda g$,

$$(f + \lambda g)(3) = f(3) + \lambda g(3) = 0 + \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow f + \lambda g \in E_7.$$

E_7 est stable par combinaison linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. D'où

E_7 est un espace vectoriel.

- Justifions que E_8 , l'ensemble des applications bornées, est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

→ L'application nulle $x \in \mathbb{R} \mapsto 0 \in \mathbb{R}$ est clairement bornée, c'est un élément de E_8 .

→ Soient $f, g \in E_8$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition, il existe deux réels M_f et M_g tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq M_f \quad \text{et} \quad |g(x)| \leq M_g.$$

Posons $M = M_f + |\lambda| M_g$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |(f + \lambda g)(x)| &= |f(x) + \lambda g(x)| \leq |f(x)| + |\lambda| \cdot |g(x)| \\ &\leq M_f + |\lambda| \cdot M_g = M. \end{aligned}$$

Ainsi, l'application $(f + \lambda g)$ est bornée, c'est un élément de E_8 . En conclusion,

E_8 est un espace vectoriel.

- Le fait que K soit maintenant fixé, on montre que

E_9 n'est pas un espace vectoriel.

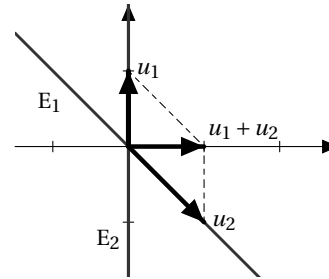
- Vérifier que

E_{10} est un espace vectoriel.

Exercice 2

p. 2

CA2



Le dessin ci-dessus illustre le problème de la réunion de sous-espaces vectoriels qui ne sont pas inclus.

Comme E_1 n'est pas inclus dans E_2 , il existe $u_1 \in E_1$ tel que $u_1 \notin E_2$. Soit $v \in E_2$. Montrons que $v \in E_1$. On sait que u_1 et v sont deux éléments de $E_1 \cup E_2$. Or par définition d'un sous-espace vectoriel, cet ensemble est stable par somme. Il vient $u_1 + v \in E_1 \cup E_2$. Deux cas :

→ Soit $u_1 + v \in E_2$ et alors la stabilité par somme de l'espace vectoriel E_2 impose

$$u_1 = \underbrace{(u_1 + v)}_{\in E_2} - \underbrace{v}_{\in E_2} \in E_2.$$

Or, on a supposé $u_1 \notin E_2$. Ce cas est à exclure.

→ Soit $u_1 + v \in E_1$ et on obtient

$$v = \underbrace{(u_1 + v)}_{\in E_1} - \underbrace{u_1}_{\in E_1} \in E_1.$$

Résumons, pour tout $v \in E_2$, on a $v \in E_1$, donc $E_2 \subset E_1$.

Exercice 3

p. 3

CA3

1. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 quatre réels tels que $\lambda_1 \cdot \epsilon_1 + \lambda_2 \cdot \epsilon_2 + \lambda_3 \cdot \epsilon_3 + \lambda_4 \cdot \epsilon_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$. C'est équivalent à

$$\begin{aligned} (3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4, -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4, \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, \lambda_4) = (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_4 &= 0. \end{cases}$$

Par un pivot de Gauss, on montre que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. La famille est libre.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$.

→ Si P est de degré n , la famille $(p^{(k)})_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés, elle est donc libre.

→ Sinon, $\deg(P) < n$ et pour $k = \deg(P) + 1$, on obtient $p^{(k)} = 0$, la famille ne peut être libre.

Finalement, la famille est libre si et seulement si, P est de

degré exactement n .

3.a) On suppose l'existence de quatre réels $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ tels que

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C + \lambda_4 D = 0_2.$$

C'est-à-dire,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Par unicité des coefficients d'une matrice, on obtient le système linéaire :

$$\mathcal{S} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0. \end{cases}$$

Réolvons ce système par un pivot de Gauss,

$$\mathcal{S} \begin{array}{l} \xleftrightarrow{I_2 \leftarrow I_2 - I_1} \\ \xleftrightarrow{I_3 \leftarrow I_3 - I_1} \end{array} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \xleftrightarrow{I_4 \leftarrow I_4 + I_3} \\ \xleftrightarrow{I_3 \leftarrow I_3 - I_1} \end{array} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}.$$

On en déduit que $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_1 = 0$. La famille (A, B, C, D) est libre.

3.b) Une famille à 5 vecteurs dans un espace de dimension 4 ne peut être libre. En étudiant les relations de linéarité, on montre que :

$$-3I_2 + 2A - B - C + 2D = 0_2.$$

La famille (A, B, C, D, I_2) n'est pas libre.

4.a) Soient λ_1, λ_2 et λ_3 , trois réels tels que

$$\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 + \lambda_3 \cdot f_3 = 0.$$

(0 désigne ici l'application nulle). Dit autrement,

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \lambda_1 \ln(x) + \lambda_2 \exp(x) + \lambda_3 x = 0.$$

On divise par $\exp(x)$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \lambda_1 \frac{\ln(x)}{\exp(x)} + \lambda_2 + \lambda_3 \frac{x}{\exp(x)} = 0.$$

Or, par les croissances comparées,

$$\lambda_1 \frac{\ln(x)}{\exp(x)} + \lambda_2 + \lambda_3 \frac{x}{\exp(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \lambda_2.$$

Par unicité de la limite, $\lambda_2 = 0$.

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \lambda_1 \ln(x) + \lambda_3 x = 0.$$

À ce stade, on peut procéder de même en divisant par x . On peut aussi simplement considérer $x = 1$,

$$\lambda_1 \ln(1) + \lambda_3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0.$$

Nécessairement, $\lambda_1 = 0$. Finalement,

La famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

4.b) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \tan + \lambda_2 \tan^2 + \lambda_3 \tan^3 + \dots + \lambda_n \tan^n = 0.$$

Comme l'application tangente est une bijection de $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \dots + \lambda_n x^n = 0.$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0.$$

La famille $(\tan^i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est libre.

4.c) Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0.$$

Si $\lambda_0 \neq 0$, alors la fonction

$$f_0 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} f_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_0} f_n$$

est dérivable en 0 en tant que combinaison linéaire d'applications dérivables en 0. Absurde, f_0 n'est pas dérivable en 0. D'où $\lambda_0 = 0$. Il en va de même pour tout λ_i . En conclusion, la famille $(f_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est libre.

Exercice 4

p. 4

CA4

1. Soit $X = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} X \in F &\iff x - 2y = z = 0 \\ &\iff X = (2y + z, y, z) \\ &= y(2, 1, 0) + z(1, 0, 1). \end{aligned}$$

Si on pose $u = (2, 1, 0)$, $v = (1, 0, 1)$. On a

$$F = \text{Vect}(u, v)$$

2. Pour tout $P \in G$, il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$. On a aussi

$$P(x) = -P(-x) = -\sum_{i=0}^n a_i (-1)^i x^i.$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad -a_i (-1)^i = a_i.$$

Ainsi pour tout indice i pair, $a_i = 0$. Réciproquement, tout polynôme

$$P = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ impair}}}^n a_i x^i$$

appartient à G . Dès lors une famille génératrice de G est

$$\left(x, x^3, x^5, \dots, x^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \right).$$

3. Soit $M \in \mathcal{S}$. Nécessairement, il existe $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tels que

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Posons ainsi,

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & M_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & M_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ M_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & M_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & M_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On peut exprimer ces matrices à l'aide des matrices élémentaires,

$$M_1 = E_{1,1}, \quad M_2 = E_{1,2} + E_{2,1}, \quad M_3 = E_{1,3} + E_{3,1},$$

$$M_4 = E_{2,2}, \quad M_5 = E_{2,3} + E_{2,3}, \quad \text{et} \quad M_6 = E_{3,3}.$$

La famille $(M_1, \dots, M_6)$ est génératrice de $\mathcal{S}$.

Remarque. La famille est libre, c'est même une base de $\mathcal{S}$.

Exercice 5

p. 5

CA5

Raisonnons par double implication.

$\Rightarrow$ Supposons i). Soit $w \in F + G$. Considérons $u_F, u'_F \in F$ et $u_G, u'_G \in G$ tels que

$$w = u_F + u_G \quad \text{et} \quad w = u'_F + u'_G.$$

Il vient $u_F + u_G = u'_F + u'_G$, puis $u_F - u'_F = u'_G - u_G$. Or ce dernier vecteur appartient à la fois à F et à G , c'est donc le vecteur nul par hypothèse. Ainsi $u_F = u'_F$ et $u_G = u'_G$, ce qui établit l'unicité de la décomposition. Le point ii) est prouvé.

$\Leftarrow$ Supposons ii). Justifions que $F \cap G = \{0_E\}$ par double inclusion.

Comme $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel, il contient nécessairement le vecteur nul. Ainsi $\{0_E\} \subset F \cap G$.

Soit $w \in F \cap G$. On a

$$w = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{w}_{\in G} = \underbrace{w}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}.$$

Par unicité de la décomposition, $w = 0_E$. Ainsi $F \cap G \subset \{0_E\}$. Par double inclusion, on a bien $F \cap G = \{0_E\}$. Le point i) est prouvé.

Exercice 6

p. 6

CA6

1. La partie F est un bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Vérifions que $\text{Vect}(u_1)$ en est un supplémentaire (le

raisonnement est similaire pour u_2).

Soit $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

• *Analyse (recherche des conditions nécessaires).*

Supposons qu'il existe $u_F = (x, y, z) \in F$ et $w \in \text{Vect}(u_1)$ tels que

$$v = u_F + w$$

C'est-à-dire, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$(a, b, c) = (x, y, z) + \lambda(1, 0, 0)$$

$$\text{avec} \quad x + y + z = 0.$$

On obtient le système

$$\begin{cases} a &= x + \lambda \\ b &= y \\ c &= z \\ 0 &= x + y + z \end{cases}$$

Nécessairement,

$$\begin{cases} \lambda &= a - x = a + y + z = a + b + c \\ x &= -y - z = -b - c \\ y &= b \\ c &= z \end{cases}$$

Ainsi, si la décomposition existe, elle est unique et

$$(a, b, c) = \underbrace{(-b - c, b, c)}_{\in F} + \underbrace{(a + b + c)(1, 0, 0)}_{\in \text{Vect}(u_1)}.$$

• *Synthèse (recherche des conditions suffisantes).*

Posons $u_F = (-b - c, b, c)$ et $w = (a + b + c)u_1$,

de sorte que $u_F \in F$, $w \in \text{Vect}(u_1)$ et

$$v = u_F + w.$$

On a trouvé une décomposition.

• *En conclusion*, on a bien prouvé l'existence et l'unicité d'une telle décomposition pour tout vecteur v .

Par définition, F et $\text{Vect}(u_1)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

De nouveau, on constate qu'il n'y a pas unicité du supplémentaire.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• *Analyse.* Supposons qu'il existe deux matrices carrées A , S respectivement antisymétrique et symétrique telles que $M = A + S$. En transposant, il vient

$${}^tM = {}^tA + {}^tS = -A + S.$$

On en déduit par somme et différence des deux relations précédentes,

$$A = \frac{1}{2}(M - {}^tM) \quad \text{et} \quad S = \frac{1}{2}(M + {}^tM).$$

Résumons, si une telle décomposition $M = A + S$ (avec A antisymétrique et S symétrique) existe, alors les matrices A et S sont uniques.

• *Synthèse.*

Posons $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$ et $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$,

de sorte que

$$\begin{aligned} {}^tA &= \frac{1}{2}({}^t(M - {}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM - {}^t({}^tM)) \\ &= -\frac{1}{2}(M - {}^tM) = -A. \end{aligned}$$

et ${}^tS = \frac{1}{2}({}^t(M + {}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM + {}^t({}^tM)) = S.$

De plus $A + S = \frac{1}{2}(M - {}^tM) + \frac{1}{2}(M + {}^tM) = M.$

Résumons :

- Les matrices A et S sont respectivement antisymétrique et symétrique;
- $A + S = M.$

On vient de justifier l'existence d'une telle décomposition.

- *Conclusion.* On a prouvé que toute matrice carrée M s'écrit, de manière unique, comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

$$\mathcal{A}_n \oplus \mathcal{S}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 7

p. 6

CA7

1. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} M &\in E_1 \\ \iff \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}, M &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &\text{avec } a + b + c + d = 0 \\ \iff \exists a, b, c \in \mathbb{R}, M &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a - b - c \end{bmatrix} \\ \iff \exists a, b, c \in \mathbb{R}, & \\ M &= \underbrace{a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A_1} + \underbrace{b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A_2} + \underbrace{c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A_3}. \end{aligned}$$

On a donc l'équivalence :

$$M \in E_1 \iff M \in \text{Vect}(A_1, A_2, A_3).$$

Puis,

$$E_1 = \text{Vect}(A_1, A_2, A_3).$$

La famille (A_1, A_2, A_3) est génératrice de E_1 . On vérifie que la famille est libre, c'est donc une base de E_1 . Elle contient 3 vecteurs. Concluons :

$$\dim(E_1) = 3.$$

2. On procède de même. Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$,

$$\begin{aligned} P &\in E_2 \\ \iff \exists a, b, c \in \mathbb{R}, P(x) &= ax^2 + bx + c \text{ et } P'(1) = 0 \\ \iff \exists a, b, c \in \mathbb{R}, P &= ax^2 + bx + c \text{ et } 2a + b = 0 \\ \iff \exists a, c \in \mathbb{R}, P &= ax^2 - 2ax + c = a(x^2 - 2x) + c. \end{aligned}$$

Si on note $P_1(x) = x^2 - 2x$ et $P_2(x) = 1$, on a montré que $P \in E_2$ si et seulement si $P \in \text{Vect}(P_1, P_2)$. La famille (P_1, P_2) est donc génératrice de E_2 . De plus, cette dernière est libre (car de degré échelonné). C'est donc une base de E_3 ,

$$\dim(E_2) = 2.$$

3. Pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, notons D_i désigne la matrice diagonale de taille (n, n) ne contenant que des « 0 » sauf un « 1 » en position (i, i) .

La famille $(D_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est une base de E_3 .

On a donc

$$\dim(E_3) = n.$$

Exercice 8

p. 7

CA8

1. Précisons que pour tout indice i , $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0.$$

C'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(x) = 0.$$

Soit $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ fixé. On a pour tout $i \neq j$

$$L_i(a_j) = 0 \quad \text{et} \quad L_j(a_j) = 1.$$

En évaluant en a_j , on obtient directement $\lambda_j = 0$. La famille est libre.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$. Posons

$$Q = P - \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i.$$

On vérifie que pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $Q(a_j) = 0$. Q est un polynôme de degré au plus $n - 1$ avec n racines. C'est le polynôme nul. Ainsi

$$P = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i.$$

La famille $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est génératrice de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

Les polynômes L_i sont les polynômes de Lagrange associés à la famille $(a_1, \dots, a_n)$.

En pratique, pour montrer qu'une famille est une base, on vérifiera d'abord la liberté plutôt que le caractère générateur, souvent plus technique.

Exercice 9

p. 8

CA9

1. Soit F_1 un supplémentaire de $F \cap G$ dans F , c'est-à-dire que $F_1 \oplus (F \cap G) = F$.

Prouvons que $F + G = F_1 \oplus G$.

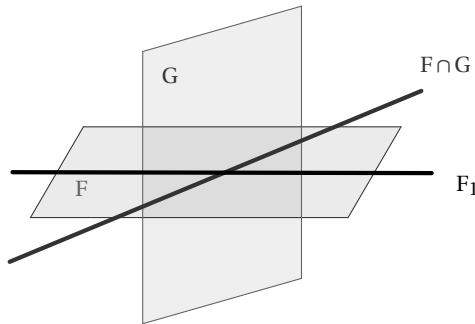
→ Comme $F_1 \subset F$, on a $F_1 \cap G \subset F_1 \cap (F \cap G) = \{0_E\}$. Les sous-espaces F_1 et G sont donc en somme directe.

→ De plus,

$$\begin{aligned} F_1 + G &= F_1 + (G + F \cap G) \\ &= (F_1 + F \cap G) + G = F + G. \end{aligned}$$

2. En appliquant la proposition précédente,

$$\begin{aligned} \dim(F + G) &= \dim(F_1 \oplus G) = \dim(F_1) + \dim(G) \\ &= \dim(F) - \dim(F \cap G) + \dim(G). \end{aligned}$$



Exercice 10

p. 8

CA10

1. • Le vecteur u étant non nul, F est une droite vectorielle :

$$\dim F = 1.$$

• Il existe un indice i tel que $a_i \neq 0$. Pour simplifier, supposons $a_n \neq 0$. Les vecteurs

$$v_1 = (a_n, 0, 0, \dots, 0, -a_1) = a_n e_1 - a_1 e_n$$

$$v_2 = (0, a_n, 0, \dots, 0, -a_2) = a_n e_2 - a_2 e_n$$

$$v_3 = (0, 0, a_n, \dots, 0, -a_3) = a_n e_3 - a_3 e_n$$

⋮

$$v_{n-1} = (0, 0, 0, \dots, 0, a_n, -a_{n-1}) = a_n e_{n-1} - a_{n-1} e_n.$$

forment une famille libre de G avec $n-1$ vecteurs. Comme $G \neq \mathbb{R}^n$, $\dim G \leq n-1$. On a donc l'égalité

$$\dim G = n-1.$$

2. Utilisons le troisième énoncé de la proposition précédente.

On a bien

$$\dim F + \dim G = n = \dim \mathbb{R}^n$$

et pour $v \in F \cap G$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$v = \lambda u = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n).$$

La condition $v \in G$ impose

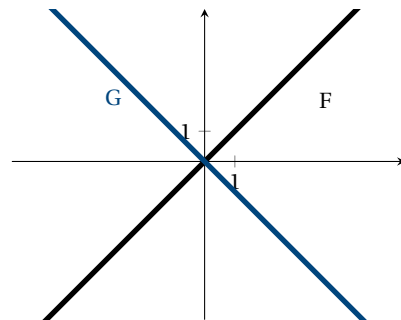
$$0 = \sum_{k=1}^n a_k (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

Comme $u \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, $\sum_{k=1}^n a_k^2 \neq 0$ et $\lambda = 0$. On a $v = 0_E$ et

$$F \cap G = \{0_E\}.$$

En conclusion, F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

3. G est une droite vectorielle engendrée par $(1, -1)$.



Exercice 11

p. 9

CA11

1. • On a

$$0_E = \underbrace{0_E}_{\in F_1} + \underbrace{0_E}_{\in F_2} + \dots + \underbrace{0_E}_{\in F_p}.$$

D'où $0_E \in \sum_{i=1}^p F_i$ qui est donc non vide.

• Soient $u, v \in \sum_{i=1}^p F_i$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Il existe

$$(u_1, u_2, \dots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p,$$

$$(v_1, v_2, \dots, v_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p$$

tels que $u = \sum_{i=1}^p u_i$ et $v = \sum_{i=1}^p v_i$.

Il vient

$$\lambda u + \mu v = \lambda \sum_{i=1}^p u_i + \mu \sum_{i=1}^p v_i = \sum_{i=1}^p (\lambda u_i + \mu v_i)$$

car chaque sous-espace F_i est stable par combinaison linéaire. D'où $\lambda u + \mu v \in \sum_{i=1}^p F_i$.

• Finalement, $\sum_{i=1}^p F_i$ est un sous-espace de E .

2. Soit $u \in \sum_{i=1}^p F_i$. On a $u = \sum_{i=1}^p u_i$ où chaque $u_i \in F_i$. Par hypothèse, $u_i \in H$ et H est stable par somme donc

$$u = \sum_{i=1}^p u_i \in H.$$

On a bien l'inclusion demandée.

Exercice 12

p. 10

CA12

Non.

Le schéma de l'indication donne un contre-exemple en intersectant trois droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$. Les

intersections deux à deux sont bien réduites à $\{0\}$, pourtant la somme $F_1 + F_2 + F_3$ n'est pas directe.

Exercice 13

p. 11

CA13

1. Précisons une base de chacun des sous-espaces :

- (u) est une base de G .
- (v) est une base de H .
- (w_1, w_2) avec

$$w_1 = (1, 1, 0, 0), \quad w_2 = (0, 0, 1, -1)$$

est une base de F . En effet, (w_1, w_2) est libre (les deux vecteurs sont non colinéaires) et aussi génératrice de F puisque pour tout $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} X \in F &\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ z + t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = y \\ z = -t \end{cases} \\ &\iff X = (x, x, z, -z) \\ &\iff X = x(1, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, -1) \\ &\iff X = xw_1 + zw_2 \\ &\iff X \in \text{Vect}(w_1, w_2) \end{aligned}$$

Ainsi $F = \text{Vect}(w_1, w_2)$.

2. On montre ensuite que la famille (u, v, w_1, w_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^4$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$. La famille est génératrice

$$F + G + H = \text{Vect}(u, v, w_1, w_2) = \mathbb{R}^4$$

et d'après la proposition précédente, la somme est directe

$$F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}^4.$$

Remarque. On a alors

$$\begin{aligned} \dim F + \dim G + \dim H &= 2 + 1 + 1 = \dim \mathbb{R}^4 \\ &= \dim(F \oplus G \oplus H). \end{aligned}$$

Le théorème suivant généralise cette égalité.

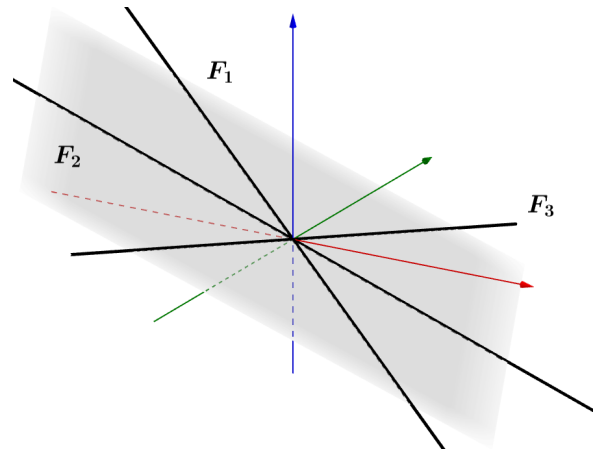
Exercice 14

p. 12

CA14

Non.

Pour un contre-exemple, il suffit de prendre 3 droites vectorielles toutes contenues dans un même plan.



Exercice 15

p. 12

CA15

1. Vérifier que

$$\dim F = 1 = \dim G, \quad \dim V = 2$$

et $\dim H = 2$.

2. On a bien

$$\dim V + \dim H = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[x]).$$

De plus, pour $P \in V \cap H$, on obtient un polynôme avec 4 racines $(\pm 1, \pm 2)$. Ainsi P est le polynôme nul.

$$V \cap H = \{0_{\mathbb{R}_3[x]}\}.$$

Par la caractérisation des supplémentaires par la dimension

$$V \oplus H = \mathbb{R}_3[x].$$

3. Vérifier que $F \oplus G = V$. La relation de la question précédente donne

$$(F \oplus G) \oplus H = \mathbb{R}_3[x].$$

Justifions que l'on peut "retirer" les parenthèses. On a bien

$$F + G + H = (F + G) + H = \mathbb{R}_3[x].$$

et l'égalité des dimensions

$$\begin{aligned} \dim F + \dim G + \dim H &= \dim(\mathbb{R}_3[x]) \\ &= \dim(F + G + H). \end{aligned}$$

Le théorème précédent prouve que la somme est directe.

$$F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}_3[x].$$

Exercice 16

p. 13

CA16

1. Vérifions que la famille est libre.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0).$$

Cela implique le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

De plus, la famille contient autant d'éléments que la dimension de l'espace :

La famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

En particulier, il existe trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3.$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système (par un pivot de Gauss par exemple) donne $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$.

$$v = -3u_1 + u_2 + 2u_3.$$

La matrice colonne des coordonnées est donc

$$V = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2. La matrice dans la base canonique $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ de $(x+1)^n$ est donnée par

$$\begin{bmatrix} \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} \\ \vdots \\ \binom{n}{i} \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ n \\ \vdots \\ \binom{n}{i} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}), \quad \text{car} \quad (x+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i.$$

Attention au décalage d'indice, le coefficient $\binom{n}{i}$ est en position $i+1$.

Exercice 17

p. 16

CA17

1. Raisonnons par double implication. Soit n la dimension commune de E et de F .

Remarque. Il ne pourrait exister d'isomorphisme si $\dim E \neq \dim F$.

$\Rightarrow$ Supposons φ bijective. On peut alors considérer φ^{-1} et d'après le théorème précédent, l'égalité

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{id}_F$$

donne

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi^{-1}) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_F}(\varphi \circ \varphi^{-1}) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_F}(\text{id}_F) = I_n. \end{aligned}$$

De même

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = \text{id}_E$$

impose

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi^{-1}) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E}(\text{id}_E) = I_n.$$

Par conséquent, $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$ est inversible et son inverse est la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi^{-1})$.

$\Leftarrow$ Supposons la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$ inversible. Il existe une matrice carrée B telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) \cdot B = I_n \quad \text{et} \quad B \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) = I_n.$$

Or il existe $\psi \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\psi)$. Ainsi

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\psi \circ \varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\psi) \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) = I_n$$

et $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi \circ \psi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\psi) = I_n$.

Donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\psi \circ \varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\text{id}_E)$$

et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi \circ \psi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\text{id}_F).$$

On en déduit $\psi \circ \varphi = \text{id}_E$ et $\varphi \circ \psi = \text{id}_F$.

Finalement, φ est bijective et $\varphi^{-1} = \psi$. En particulier,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi^{-1}) = B = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)^{-1}.$$

Exercice 18

p. 16

CA18

1. La matrice de φ dans la base canonique est

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Cette dernière est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. D'après le théorème précédent, φ est un isomorphisme si et seulement si

$$ad - bc \neq 0.$$

2.a) À l'aide de la formule du binôme de Newton, pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$,

$$\varphi(x^k) = (1+x)^k = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} x^\ell.$$

Notons $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$, la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$. Soit $j \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \varphi(e_j) &= \varphi(x^{j-1}) = \sum_{\ell=0}^{j-1} \binom{j-1}{\ell} x^\ell \\ &= \sum_{i=1}^j \binom{j-1}{i-1} x^{i-1} \quad (i = \ell + 1) \\ \varphi(e_j) &= \sum_{i=1}^j \binom{j-1}{i-1} e_i. \end{aligned}$$

Il vient : $\text{Mat}_{\text{can}}(\varphi) =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & \cdots & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \cdots & \binom{j-1}{i-1} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si on note $a_{i,j}$ les coefficients de cette matrice, alors

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket, \quad a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}.$$

En adoptant la convention que

$$\binom{j-1}{i-1} = 0 \quad \text{si } i > j.$$

2.b) En reprenant le raisonnement précédent, φ est un isomorphisme avec

$$\varphi^{-1} : P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto P(x-1) \in \mathbb{R}_n[x].$$

Si on note $b_{i,j}$ les coefficients de A^{-1} , on a :

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket, \quad b_{i,j} = (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(e_j) &= (x-1)^{j-1} \\ &= \sum_{\ell=0}^{j-1} \binom{j-1}{\ell} (-1)^{j-1-\ell} x^\ell \\ &= \sum_{i=1}^j \binom{j-1}{i-1} (-1)^{j-i} x^{i-1} \\ \varphi^{-1}(e_j) &= \sum_{i=1}^j (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} e_i. \end{aligned}$$

Pour construire la matrice A^{-1} , il suffit de partir de la matrice A et d'alterner les signes sur les diagonales.

Exercice 19

p. 16

CA19

• Calculons le noyau de la matrice A à l'aide d'un pivot de Gauss.

Soit $X = {}^t[x \ y \ z] \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \text{Ker}(A) \iff AX = 0_{3,1}$$

$$\begin{aligned} \iff \begin{cases} -x + 2y - z &= 0 \\ 3x - 3y &= 0 \\ -2x + 2y &= 0 \end{cases} \\ \xLeftrightarrow[-3L_3=2L_2]{L_1 \leftrightarrow -L_1} \begin{cases} x - 2y + z &= 0 \\ x - y &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} z &= x \\ y &= x \end{cases} \iff X = \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}.$$

Finalement, le noyau est

$$\text{Ker}(A) = \left\{ x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

• Soit $X = {}^t[x \ y \ z] \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \text{Ker}(B_\alpha) \iff B_\alpha X = 0_{3,1} \iff$$

$$\begin{cases} (2-\alpha)x + 3y + z &= 0 \\ 5x + (6+\alpha)y + z &= 0 \\ x + y - (2+\alpha)z &= 0 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3]{L_1 \leftarrow L_1 - (2-\alpha)L_3}$$

$$\begin{cases} (1+\alpha)y + (5-\alpha^2)z &= 0 \\ (1+\alpha)y + (11+5\alpha)z &= 0 \\ x + y - (2+\alpha)z &= 0 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow[L_1 \leftarrow L_2 - L_1]$$

$$\begin{cases} (2+\alpha)(3+\alpha)z &= 0 \\ (1+\alpha)y + (11+5\alpha)z &= 0 \\ x + y - (2+\alpha)z &= 0. \end{cases}$$

En effet,

$$11+5\alpha-5+\alpha^2 = \alpha^2+5\alpha+6 = (2+\alpha)(3+\alpha).$$

Procédons par disjonction des cas.

→ Si $\alpha \notin \{-2, -3\}$, le système est équivalent à

$$\begin{cases} z &= 0 \\ (1+\alpha)y + (11+5\alpha)z &= 0 \\ x + y - (2+\alpha)z &= 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} z &= 0 \\ (1+\alpha)y &= 0 \\ x + y &= 0. \end{cases}$$

Ainsi, si $\alpha \notin \{-1; -2; -3\}$, il n'y a que ${}^t[0 \ 0 \ 0]$ comme solution.

$$\text{Pour } \alpha \notin \{-1; -2; -3\}, \\ \text{le noyau est } \{0_{3,1}\}.$$

→ Si $\alpha = -1$, le système est alors équivalent à

$$\begin{cases} z &= 0 \\ x + y &= 0. \end{cases}$$

On obtient :

$$X \in \text{Ker}(B_{-1}) \iff X = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\text{Ker}(B_{-1}) = \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

→ Si $\alpha = -2$, le système est alors équivalent à

$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ x + y = 0. \end{cases}$$

On obtient :

$$X \in \text{Ker}(B_{-2}) \iff X = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ -x \end{bmatrix}.$$

Puis,

$$\text{Ker}(B_{-2}) = \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

→ Si $\alpha = -3$, le système est alors équivalent à

$$\begin{cases} -2y - 4z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2z \\ x = z \end{cases}.$$

Il vient :

$$X \in \text{Ker}(B_{-3}) \iff X = \begin{bmatrix} z \\ -2z \\ z \end{bmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\text{Ker}(B_{-3}) = \left\{ z \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 20

p. 17

CA20

• Étudions les relations de linéarité entre les vecteurs colonnes C_1, C_2 et C_3 de A . Soient λ_1, λ_2 et λ_3 , trois réels tels que

$$\begin{aligned} \lambda_1 C_1 + \lambda_3 C_2 + \lambda_3 C_3 = 0_{3,1} &\iff \\ \begin{cases} 4\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases} &\iff \begin{matrix} L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \\ L_2 \leftarrow 4L_2 - 3L_1 \end{matrix} \\ \begin{cases} 4\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 6\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \end{cases} &\iff \begin{matrix} L_3 = 3L_2 \end{matrix} \\ \begin{cases} 4\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_2 = -\frac{3}{2}\lambda_3. \end{cases} \end{aligned}$$

Avec le choix $\lambda_3 = 2$, une solution du système est obtenue avec $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$. Ainsi,

$$2C_1 - 3C_2 + 2C_3 = 0_{3,1},$$

et $\text{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \text{Vect}(C_1, C_2)$.

Comme C_1, C_2 sont des matrices colonnes non colinéaires, elles forment une base de l'espace engendré par les matrices colonnes. Finalement,

$$\text{rg}(A) = 2.$$

• Étudier les relations de dépendances linéaires et montrer que $C_1 + C_3 = 2C_2$, et (C_1, C_3, C_4) est une famille libre. En conclusion,

$$\text{rg}(B) = 3.$$

• Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudions la matrice :

$$C = \begin{bmatrix} 1-\alpha & -1 \\ 1 & 1-\alpha \end{bmatrix}.$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0_{2,1}$. Alors,

$$\begin{cases} (1-\alpha)\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2 = 0 \end{cases}.$$

En effectuant $L_1 \leftarrow -L_1 + (1-\alpha)L_2$,

$$\begin{cases} (1 + (1-\alpha)^2)\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2 = 0 \end{cases}.$$

Comme $(1 + (1-\alpha)^2) \neq 0$, on obtient $\lambda_2 = 0$, puis $\lambda_1 = 0$. Finalement

$$\text{rg}(C) = 2.$$

Exercice 21

p. 17

CA21

• Soit $P \in \mathbb{R}[x]$.

$$P \in \text{Ker}(\varphi_1) \iff P'' = 0_{\mathbb{R}[x]} \iff P \in \mathbb{R}_1[x].$$

D'où

$$\text{Ker}(\varphi_1) = \mathbb{R}_1[x].$$

Un polynôme est de degré au plus un si et seulement si la dérivée seconde est nulle.

• Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$.

$$P \in \text{Ker}(\varphi_2) \iff (P(1), P(0), P(-1)) = (0, 0, 0).$$

Autrement dit, P appartient au noyau de φ_2 si et seulement si 1, 0 et -1 sont racines de P .

Or P est de degré au plus 2, seul le polynôme nul peut avoir plus de trois racines distinctes. En conclusion,

$$\text{Ker}(\varphi_2) = \{0_{\mathbb{R}[x]}\}.$$

• Soit $P \in \mathbb{R}[x]$.

$$P \in \text{Ker}(\varphi_3) \iff P - P' = 0_{\mathbb{R}[x]} \iff P = P'.$$

Or, $\deg(P') = \deg(P) - 1$ si P est non constant et $-\infty$ sinon. On constate que seul le polynôme nul est solution.

$$\text{Ker}(\varphi_3) = \{0_{\mathbb{R}[x]}\}.$$

• Soit $P \in \mathbb{R}[x]$.

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(\varphi_4) &\iff P(x-1) = P(x+1) \\ &\iff P(x) = P(x+2). \end{aligned}$$

Posons $Q(x) = P(x) - P(0)$. Par construction, 0 est une racine de Q et

$$Q(x+2) = Q(x).$$

Il vient $0 = Q(0) = Q(2) = Q(4) = \dots$. Par récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Q(2n) = 0.$$

Comme seul le polynôme nul admet une infinité de racines, $Q = 0_{\mathbb{R}[x]}$. C'est-à-dire, P est un polynôme constant. Finalement,

$$\text{Ker}(\varphi_4) = \mathbb{R}_0[x].$$

Les applications φ_2 et φ_3 sont injectives.

Exercice 22

p. 18

CA22

..

Exercice 23

p. 19

CA23

1.a) La famille $\mathcal{C}$ est une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés. La famille est donc libre. Comme elle contient autant de vecteurs que la dimension de $\mathbb{R}_2[x]$, c'est une base.

Justifions que $\mathcal{D}$ est une famille libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1(x-a)^2 + \lambda_2(x-a)(x-b) + \lambda_3(x-b)^2 = 0.$$

En évaluant en a , on obtient $\lambda_3(a-b)^2 = 0$ et $\lambda_3 = 0$ puisque $a \neq b$. En évaluant en b , $\lambda_1 = 0$. Nécessairement $\lambda_2 = 0$ et la famille est libre. Avec trois vecteurs, $\mathcal{D}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

1.b) On a

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ -2a & -a-b & -2b \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{car } (x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2, \quad (x-b)^2 = x^2 - 2bx + b^2$$

et $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$. De plus

$$\begin{aligned} (x-a)(x-b) &= (x-a)((x-a) + (a-b)) \\ &= (x-a)^2 + (a-b)(x-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } (x-b)^2 &= ((x-a) + (a-b))^2 \\ &= (x-a)^2 + 2(a-b)(x-a) + (a-b)^2. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } P_{\mathcal{C},\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (a-b)^2 \\ 0 & (a-b) & 2(a-b) \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ensuite

$$\begin{aligned} &P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot P_{\mathcal{C},\mathcal{D}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & (a-b)^2 \\ 0 & a-b & 2(a-b) \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2 & -a(a-b) + a^2 & (a-b)^2 - a^2(a-b) + a^2 \\ -2a & a-b-2a & 2(a-b)-2a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Après simplifications $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot P_{\mathcal{C},\mathcal{D}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$.

2. Partons de l'égalité $\text{id}_E \circ \text{id}_E = \text{id}_E$. On obtient matriciellement

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(\text{id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\text{id}_E) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(\text{id}_E)$$

D'où le résultat.

Exercice 24

p. 19

CA24

Oui.

On cherche un vecteur u non nul tel que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u).$$

Avec la relation précédente, on a

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u).$$

Or on a aussi

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

On cherche donc $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

La résolution d'un pivot de Gauss donne par exemple

$$u = (a, b, c) = (2, -2, 1).$$

Exercice 25

p. 21

CA25

1. On a par linéarité de φ :

$$\begin{aligned} \varphi(u_1) &= \varphi(e_1) - \varphi(e_3) \\ &= (ae_1 + be_2 + be_3) - (be_1 + be_2 + be_3) \\ &= (a-b)e_1 + (b-a)e_3 \\ \varphi(u_1) &= (a-b)(e_1 - e_3) = (a-b)u_1. \end{aligned}$$

On vérifie de même

$$\varphi(u_2) = (a-b)u_2 \quad \text{et} \quad \varphi(u_3) = (a+2b)u_3.$$

Par définition :

$$B = \begin{bmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+2b \end{bmatrix}.$$

2. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ est

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On vérifie que

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Par la formule de changement de base

$$B = P^{-1}AP.$$

Ensuite, φ est un isomorphisme si et seulement si A est inversible. Comme P est inversible, c'est équivalent à B inversible. Or cette dernière est diagonale. La condition d'isomorphisme est donc

$$a - b \neq 0 \quad \text{et} \quad a + 2b \neq 0.$$

Exercice 26

p. 21

CA26

1. Vrai.

$$A = I_n \cdot A \cdot I_n^{-1}.$$

2. Vrai.

S'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$, alors $PBP^{-1} = A$.

3. Vrai.

Soient $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversibles telles que

$$B = P^{-1}AP \quad \text{et} \quad C = Q^{-1}BQ.$$

Alors

$$\begin{aligned} (PQ)^{-1}A(PQ) &= Q^{-1}P^{-1}APQ \\ &= Q^{-1}BQ = C. \end{aligned}$$

La matrice PQ est inversible, A est semblable à C .

4. Vrai.

On démontre par récurrence que si $B = P^{-1}AP$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad B^p = P^{-1}A^pP.$$

5. Vrai.

Il existe donc une matrice P inversible telle que

$$A = PBP^{-1} \quad (\text{i.e. } B = P^{-1}AP)$$

La seconde relation permet de justifier que B est inversible par produit et

$$B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}A^{-1}P.$$

Exercice 27

p. 21

CA27

1.a) Vérifier que $u = (1, 1, 1)$ et que l'espace est bien de dimension 1.

1.b) Justifier que (u, v, w) est une famille libre à trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. C'est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Par la formule de changement de base

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = P_{\text{can}, \mathcal{C}}^{-1} \text{Mat}_{\text{can}}(\varphi) P_{\text{can}, \mathcal{C}}.$$

Posons P , la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{C} = (u, v, w)$. Comme

$$\varphi(u) = u, \quad \varphi(v) = 2v \quad \text{et} \quad \varphi(w) = -4w,$$

on a $D = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi)$.

Finalement, on obtient

$$D = P^{-1}MP.$$

Les matrices M et D sont semblables.

Exercice 28

p. 22

CA28

Prenons le cas des matrices inversibles. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\text{rg} A = n$. Si la réciproque était vraie, toute matrice inversible serait semblable à la matrice I_n . Absurde, seule I_n est semblable à I_n car

$$P^{-1}I_nP = P^{-1}P = I_n.$$

Exercice 29

p. 22

CA29

$$\begin{aligned} \text{Tr}(I_n) &= n & \text{Tr}(0_n) &= 0 \\ \text{Tr}(J) &= n & \text{Tr}(K) &= \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 30

p. 23

CA30

1. La trace est une forme linéaire non nulle, d'après la formule du rang, le noyau est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\dim(\text{Ker}(\text{Tr})) = n^2 - 1.$$

Notons E_{ij} les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Une base est donnée par les matrices :

- E_{ij} pour $i \neq j$,
- $E_{ii} - E_{n,n}$ pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

2. Tout supplémentaire est de dimension 1. Toute droite vectorielle engendrée par une matrice de trace non nulle convient. Par exemple

$$\text{Vect}(I_n).$$

Exercice 31

p. 23

CA31

1. Par définition de la trace, puis du produit matriciel,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n [AB]_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n [A]_{ik} [B]_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n [B]_{ki} [A]_{ik} \\ &= \sum_{k=1}^n [BA]_{kk} = \text{Tr}(BA). \end{aligned}$$

2. On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$(AB)^k = A(BA)^{k-1}B.$$

D'où

$$\begin{aligned}\text{Tr}((AB)^k) &= \text{Tr}(A(BA)^{k-1}B) \\ &= \text{Tr}((BA)^{k-1}BA) \\ \text{Tr}((AB)^k) &= \text{Tr}((BA)^k).\end{aligned}$$

3.

```
import numpy as np

def Tr3(A,B,C):
    P=np.dot(A,np.dot(B,C))
    n,p=np.shape(P)
    s=0
    for i in range(n):
        s+=P[i,i]
    return s
```

• Et le test :

```
A=np.array([[1,0],[0,0]])
B=np.array([[0,1],[0,0]])
C=np.array([[0,0],[1,0]])
```

```
>>> Tr3(A,B,C)
1
```

```
>>> Tr3(B,A,C)
0
```

On constate que le résultat est différent,

$$\text{Tr}(ABC) \neq \text{Tr}(BAC).$$

le résultat d'invariance de la trace avec l'ordre du produit de deux matrices ne se généralise pas à n matrices. Toutefois, on peut faire des cycles, par exemple

$$\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB) = \text{Tr}(BCA).$$

Exercice 32

p. 24

CA32

1. Pour $A = (a_{ij})_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket}$, vérifier que

$$\text{Tr}(A^t A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2.$$

Ainsi, pour $\text{Tr}(A^t A) = 0$, on obtient une somme de termes positifs qui est nulle. Nécessairement, chaque terme est nul.

$$\forall i, j \in \llbracket 1;n \rrbracket, \quad a_{ij} = 0.$$

La matrice A est nulle.

2. Par linéarité de la trace

$$\begin{aligned}\text{Tr}((A-B)X) &= \text{Tr}(AX - BX) \\ &= \text{Tr}(AX) - \text{Tr}(BX) = 0.\end{aligned}$$

En particulier, pour $X = \text{Trans}(A-B)$,

$$\text{Tr}((A-B)^t(A-B)) = 0.$$

D'après la question 1, $A-B = 0_n$, puis $A = B$.

Remarque.

Si pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose la forme linéaire

$$\Phi_A : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ X & \longmapsto \text{Tr}(AX) \end{cases}$$

alors le résultat précédent traduit l'injectivité de l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ A & \longmapsto \Phi_A. \end{cases}$$

Or on vérifie que Φ est linéaire avec

$$\dim \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \dim \mathbb{R} = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On en déduit que Φ est un isomorphisme. La surjectivité de Φ permet d'affirmer que toute forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = \varphi_A$. Soit

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(X) = \text{Tr}(AX).$$

(voir aussi exercice 59).

Exercice 33

p. 24

CA33

1. Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ stables par φ . Posons $F = \sum_{i=1}^p F_i$. Soit $u \in \sum_{i=1}^p F_i$. Il existe donc $(u_1, u_2, \dots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p$ tel que

$$u = \sum_{i=1}^p u_i.$$

$$\text{Par linéarité de } \varphi \quad \varphi(u) = \sum_{i=1}^p \underbrace{\varphi(u_i)}_{\in F_i} \in F$$

car F_i est stable par somme. Ce qui conclut.

2. • Justifions que $\text{Ker}(\psi)$ est stable par φ .

Soit $u \in \text{Ker}(\psi)$, montrons que $\varphi(u) \in \text{Ker}(\psi)$.

Par définition,

$$\psi(u) = 0_E \Rightarrow \varphi(\psi(u)) = \varphi(0_E) = 0_E.$$

Or, φ et ψ commutent,

$$\psi(\varphi(u)) = \varphi(\psi(u)) = 0_E.$$

Ainsi, $\varphi(u) \in \text{Ker}(\psi)$, $\text{Ker}(\psi)$ est stable par φ .

• Démontrons que $\text{Im}(\psi)$ est stable par φ .

Soit $v \in \text{Im}(\psi)$, par définition, il existe $u \in E$ tel que $\psi(u) = v$.

Il vient

$$\varphi(v) = \varphi(\psi(u)) = \psi(\varphi(u)) = \psi(w),$$

où $w = \varphi(u)$. D'où $\varphi(v) \in \text{Im}(\varphi)$.
Finalement, $\text{Im}(\varphi)$ est stable par φ .

Exercice 34

p. 24

CA34

L'application $\varphi|_F$ est un endomorphisme injectif de dimension finie. Par le corollaire de la formule du rang, $\varphi|_F$ est un isomorphisme.

Exercice 35

p. 25

CA35

1. On a $\Phi(1) = (a + bx)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $e_k = x^k$ de sorte que

$$\begin{aligned}\Phi(e_k)(x) &= (a + bx)x^k + x(1-x)kx^{k-1} \\ &= (b-k)x^{k+1} + (a+k)x^k.\end{aligned}$$

On constate que $\Phi(e_k) \in \mathbb{R}_{k+1}[x]$ et uniquement pour $k = b$, $\Phi(e_k) \in \mathbb{R}_k[x]$. On en déduit par linéarité de Φ que

$$\forall P \in \mathbb{R}_k[x], \quad \Phi(P) \in \mathbb{R}_{k+1}[x]$$

et pour $k = b$, $\Phi(P) \in \mathbb{R}_k[x]$.

Il existe donc bien un unique n donné par $n = b$ tel que $\mathbb{R}_n[x]$ soit stable par Φ .

2. La matrice de Φ_n dans la base canonique est triangulaire inférieure. Plus précisément :

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & a+1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b-1 & a+2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b-(n-1) & a+n \end{bmatrix}$$

et si on remplace b par n :

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & a+1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & a+2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+n \end{bmatrix}$$

Exercice 36

p. 26

CA36

1. Faux.

Si A est inversible, $-A$ aussi mais la somme $A + (-A) = 0_n$ ne l'est pas.

2. Vrai.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On peut toujours écrire A sous la forme

$$A = U + L$$

où U et L sont respectivement des matrices triangulaires supérieures et inférieures avec des coefficients diagonaux tous non nuls. Les deux matrices U et L sont donc inversibles.

Donnons un exemple avec une matrice A avec un coefficient diagonal nul

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Les matrices U et L sont inversibles et sont solutions du problème.

Exercice 37

p. 26

CA37

1. On a

$$f \circ (-f) = \text{id}_E \quad \text{et} \quad (-f) \circ f = \text{id}_E.$$

Par la caractérisation de la bijectivité, f est bijective (donc injective et surjective) avec $f^{-1} = -f$.

2. Soit u un vecteur non nul. Montrons que $(u, f(u))$ est une base de E . Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\lambda \cdot u + \mu \cdot f(u) = 0_E \quad (L_1).$$

On applique f

$$\begin{aligned}f(\lambda \cdot u + \mu \cdot f(u)) &= f(0_E) \quad f \text{ linéaire} \\ \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f^2(u) &= 0_E \quad f^2 = -\text{id}_E \\ \lambda \cdot f(u) - \mu \cdot u &= 0_E \quad (L_2)\end{aligned}$$

En effectuant $\lambda L_1 - \mu L_2$, on trouve $(\lambda^2 + \mu^2) \cdot u = 0_E$.

Or $u \neq 0_E$ car $f(0_E) = 0_E$, alors que $f(u) \neq u$. Donc $\lambda^2 + \mu^2 = 0$. Une somme de carrés de réels (donc positifs) ne peut être nulle que si tous les termes sont nuls. Donc $\lambda = \mu = 0$ et la famille $(u, f(u))$ est libre. De plus

$$\text{Card}(u, f(u)) = 2 = \dim(E).$$

C'est une base de E .

3. Posons $v = f(u)$ de sorte que $f(v) = f^2(u) = -u$. La matrice de f dans la base (u, v) est

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Vérifier par récurrence qu'il existe $x_1, x_2, \dots, x_n$ tels que la famille

$$(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2), \dots, x_n, f(x_n))$$

soit une base de E .

Pour cela, prendre $x_2 \notin \text{Vect}(x_1, f(x_1))$, puis, $x_3 \notin \text{Vect}(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2))$, etc. La matrice dans cette base est une matrice par blocs

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} J & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & J & \ddots & 0_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_2 & 0_2 & \cdots & J \end{bmatrix}.$$

Exercice 38

p. 26

CA38

1. Le calcul Python donne

$$P^{-1}AP = D \quad \text{où} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec D diagonale. On a donc

$$A = PDP^{-1}.$$

Par récurrence, on montre que pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$A^p = PD^pP^{-1}$$

avec

$$D^p = \begin{bmatrix} 2^p & 0 & 0 \\ 0 & 2^p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il suffit alors de poser le calcul.

2. Posons

$$S = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de sorte que $S^2 = D$. On vérifie qu'une solution est

$$B = PSP^{-1}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} B^2 &= (PSP^{-1}) \cdot (PSP^{-1}) \\ &= PS^2P^{-1} \\ &= PDP^{-1} = A. \end{aligned}$$

Remarque. La matrice B n'est pas unique.

Exercice 39

p. 26

CA39

Non.

Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence de deux matrices A, B telles que

$$I_n = AB - BA.$$

Appliquons la trace à chaque membre de l'égalité

$$\begin{aligned} n &= \text{Tr}(I_n) = \text{Tr}(AB - BA) \\ &= \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = 0 \end{aligned}$$

Absurde.

Exercice 40

p. 26

CA40

1. On a, par composition à partir des DLs usuels des fonctions

cosinus et sinus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o_0(x^4)$$

$$1 + \sin(x^2) = 1 + x^2 + o_0(x^4)$$

$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o_0(x^4).$$

2. Soient λ_1, λ_2 et λ_3 , trois réels tels que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = \mathbf{0} \quad (\text{application nulle}).$$

C'est-à-dire, pour tout réel x ,

$$\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 (1 + \sin(x^2)) + \lambda_3 \cos(2x) = 0.$$

Grâce aux développements précédents :

$$\lambda_1 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o_0(x^4)\right) + \lambda_2 (1 + x^2 + o_0(x^4)) +$$

$$\lambda_3 \left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o_0(x^4)\right) = 0.$$

On regroupe les termes :

$$\begin{aligned} &(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \left(-\frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3\right)x^2 + \left(\frac{1}{24}\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_3\right)x^4 \\ &+ o_0(x^4) = 0. \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \frac{1}{24}\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ L_2 \leftarrow 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 24L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 16\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système à l'aide d'un pivot de Gauss donne $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

La famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

Exercice 41

p. 26

CA41

1. À partir de l'inclusion

$$\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g),$$

on a sur les dimensions

$$\text{rg}(g \circ f) = \dim(\text{Im}(g \circ f)) \leq \dim(\text{Im}(g)) = \text{rg}(g).$$

On a aussi

$$\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$$

donc

$$\dim(\text{Ker}(f)) \leq \dim(\text{Ker}(g \circ f)),$$

puis par application de la formule du rang,

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(f) &= \dim(E) - \dim(\operatorname{Ker}(f)) \\ &\geq \dim(E) - \dim(\operatorname{Ker}(g \circ f)) = \operatorname{rg}(g \circ f). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. • Soit $v \in \operatorname{Im}(\varphi + \psi)$. Il existe $u \in E$ tel que :

$$(\varphi + \psi)(u) = v, \quad \text{i.e.} \quad \varphi(u) + \psi(u) = v.$$

Or, $\varphi(u) \in \operatorname{Im}(\varphi)$, $\psi(u) \in \operatorname{Im}(\psi)$. On a bien

$$v \in \operatorname{Im}(\varphi) + \operatorname{Im}(\psi).$$

D'où $\operatorname{Im}(\varphi + \psi) \subset \operatorname{Im}(\varphi) + \operatorname{Im}(\psi)$.

• Par la formule de Grassmann,

$$\begin{aligned} \dim(\operatorname{Im}(\varphi) + \operatorname{Im}(\psi)) &= \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) + \dim(\operatorname{Im}(\psi)) \\ &\quad - \dim(\operatorname{Im}(\varphi) \cap \operatorname{Im}(\psi)) \\ &\leq \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) + \dim(\operatorname{Im}(\psi)) \\ &\leq \operatorname{rg}(\varphi) + \operatorname{rg}(\psi). \end{aligned}$$

De plus, l'inclusion de la question 1 donne :

$$\dim(\operatorname{Im}(\varphi + \psi)) \leq \dim(\operatorname{Im}(\varphi) + \operatorname{Im}(\psi)).$$

En conclusion, $\operatorname{rg}(\varphi + \psi) \leq \operatorname{rg}(\varphi) + \operatorname{rg}(\psi)$.

3.a) D'après la question 1 :

$$\operatorname{rg}(f \circ \varphi) \leq \operatorname{rg}(f)$$

$$\text{et} \quad \operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}((f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}) \leq \operatorname{rg}(f \circ \varphi).$$

On en déduit l'égalité $\operatorname{rg}(f \circ \varphi) = \operatorname{rg}(f)$.

3.b) Il suffit de reprendre la rédaction précédente en composant à gauche.

Exercice 42

p. 27

CA42

La formule du rang s'écrit pour f et g par

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$$

$$\dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Im} g = \dim E$$

et la formule de Grassmann impose

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) &= \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) \\ &= \dim E. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g - \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) &= \dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g) \\ &= \dim E. \end{aligned}$$

La somme de ces deux dernières lignes donne

$$\dim E + \dim E - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) - \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) = 2 \dim E.$$

Comme une dimension est un entier naturel, nécessairement

$$\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) = \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) = 0.$$

D'où $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0_E\}$ et $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0_E\}$, les sommes sont directes.

Exercice 43

p. 27

CA43

1. On a, pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$, $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha M + N) &= A(\alpha M + N)B = \alpha AMB + ANB \\ &= \alpha \varphi(M) + \varphi(N) \end{aligned}$$

donc φ est linéaire.

2. Les déterminants sont non nuls, les matrices A et B sont inversibles et :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}.$$

On peut donc poser l'application linéaire

$$\psi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad N \longmapsto A^{-1}NB^{-1},$$

Or

$$\begin{cases} \forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), & (\psi \circ \varphi)(M) = A^{-1}(AMB)B^{-1} = M \\ \forall N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), & (\varphi \circ \psi)(N) = A(A^{-1}NB^{-1})B = N, \end{cases}$$

Autrement dit

$$\psi \circ \varphi = \operatorname{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \varphi \circ \psi = \operatorname{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}.$$

D'après la caractérisation de la bijectivité, φ est une application bijective et sa bijection réciproque existe et vaut $\varphi^{-1} = \psi$.

3. Comme la famille contient autant de vecteurs que la dimension, il suffit de prouver que la famille est libre.

$$\alpha I_2 + \beta A + \gamma B + \delta AB = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \\ + \gamma \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 15 & 4 \\ 41 & 11 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 4\gamma + 15\delta = 0 \\ \beta + \gamma + 4\delta = 0 \\ 5\beta + 7\gamma + 41\delta = 0 \\ \alpha + 3\beta + 2\gamma + 11\delta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 4\gamma + 15\delta = 0 \\ \beta + \gamma + 4\delta = 0 \\ 5\beta + 7\gamma + 41\delta = 0 \\ \beta - 2\gamma - 4\delta = 0 \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 4\gamma + 15\delta = 0 \\ \beta + \gamma + 4\delta = 0 \\ 2\gamma - 21\delta = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ -3\gamma - 8\delta = 0 \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{cases}$$

Il vient

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

La famille $\mathcal{B}$ est libre. C'est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Le calcul Python donne

$$A^2 = 5A - I_2 \quad \text{et} \quad B^2 = 6B - I_2.$$

Calculons les images de la base :

$$\varphi(I_2) = AB, \quad \varphi(A) = (5A - I_2)B = -B + 5AB,$$

$$\varphi(B) = A(6B - I_2) = -A + 6AB$$

$$\begin{aligned} \varphi(AB) &= A(AB)B = A^2B^2 = (5A - I_2)(6B - I_2) \\ &= I_2 - 5A - 6B + 30AB. \end{aligned}$$

On conclut, la matrice demandée est

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 1 & 5 & 6 & 30 \end{bmatrix}.$$

Exercice 44

p. 27

CA44

1. D'après la formule du rang

$$\dim \text{Ker } \varphi = \dim E - \text{rg}(\varphi) = n - 1.$$

Autrement dit, le noyau admet un supplémentaire de dimension 1. Il existe donc $u_0 \in E \setminus \text{Ker } \varphi$ tel que

$$\text{Ker } \varphi \oplus \text{Vect}(u_0) = E.$$

Comme $\varphi(u_0) \in E$, il existe $u_k \in \text{Ker } \varphi$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$u_k + \lambda u_0 = \varphi(u_0).$$

Puis

$$\begin{aligned} \varphi^2(u_0) &= \varphi(\varphi(u_0)) = \varphi(u_k + \lambda u_0) \\ &= \varphi(u_k) + \lambda \varphi(u_0) \\ &= \lambda \varphi(u_0). \end{aligned}$$

Vérifions que ce réel λ répond au problème.

Soit $u \in E$, il existe $v \in \text{Ker } \varphi$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$v + \mu u_0 = u.$$

Puis

$$\begin{aligned} \varphi^2(u) &= \varphi^2(v + \mu u_0) = \varphi(\varphi(v) + \mu \varphi(u_0)) \\ &= \varphi(\mu \varphi(u_0)) = \mu \varphi^2(u_0) \\ &= \mu \lambda \varphi(u_0) = \lambda \varphi(\mu u_0) \\ &= \lambda \varphi(\mu u_0) + \mu \varphi(v) \\ &= \lambda \varphi(\mu u_0 + v) = \lambda \varphi(u). \end{aligned}$$

Cela étant vrai pour tout $u \in E$, $\varphi^2 = \lambda \varphi$.

2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Cherchons l'application réciproque sous la forme $\alpha \varphi + \beta \text{id}_E$.

$$\begin{aligned} (\alpha \varphi + \beta \text{id}_E) \circ (\varphi - \text{id}_E) &= \alpha \varphi^2 + \beta \varphi - \alpha \varphi - \beta \text{id}_E \\ &= \alpha \lambda \varphi + \beta \varphi - \alpha \varphi - \beta \text{id}_E \\ &= (\alpha \lambda + \beta - \alpha) \varphi - \beta \text{id}_E. \end{aligned}$$

On constate que

$$\begin{cases} \alpha \lambda + \beta - \alpha = 0 \\ \beta = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha(\lambda - 1) = -\beta = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = 1/(\lambda - 1) \\ \beta = -1. \end{cases}$$

Avec ce choix,

$$\left(\frac{1}{\lambda - 1} \varphi - \text{id}_E \right) \circ (\varphi - \text{id}_E) = \text{id}_E$$

$$\text{et} \quad (\varphi - \text{id}_E) \circ \left(\frac{1}{\lambda - 1} \varphi - \text{id}_E \right) = \text{id}_E.$$

Par la caractérisation de la bijectivité, $\varphi - \text{id}_E$ est bijective et

$$(\varphi - \text{id}_E)^{-1} = \frac{1}{\lambda - 1} \varphi - \text{id}_E.$$

Exercice 45

p. 27

CA46

1. Le polynôme nul appartient à F_A , donc F_A n'est pas vide.

Soient $P_1, P_2 \in F_A$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Il existe $Q_1, Q_2 \in E$ tels que $P_1 = A \cdot Q_1$ et $P_2 = A \cdot Q_2$.

$$\lambda P_1 + \mu P_2 = \lambda A \cdot Q_1 + \mu A \cdot Q_2 = A \cdot (\lambda Q_1 + \mu Q_2).$$

Ainsi A divise $\lambda P_1 + \mu P_2$, c'est-à-dire, $\lambda P_1 + \mu P_2 \in F_A$.

F_A est non vide, stable par combinaison linéaire.

F_A est un sous-espace vectoriel de E .

De même, F_B est un sous-espace vectoriel de E .

Précisons maintenant les dimensions.

$$\begin{aligned} P \in F_A &\iff P \in \mathbb{R}_n[x] \quad \text{et} \quad \exists Q \in \mathbb{R}[x], P = AQ \\ &\quad \text{car} \quad \deg(P) = \deg(A) + \deg(Q) \end{aligned}$$

$$\iff \exists Q \in \mathbb{R}_{n-p}[x], \quad P = AQ$$

$$\iff \exists (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-p}) \in \mathbb{R}^{n-p+1}, \quad P(x) = A(x) \left(\sum_{i=0}^{n-p} \alpha_i x^i \right)$$

$$\iff \exists (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-p}) \in \mathbb{R}^{n-p+1}, \quad P(x) = \sum_{i=0}^{n-p} \alpha_i x^i A(x)$$

$$\iff P \in \text{Vect} \left((x^i A(x))_{0 \leq i \leq n-p} \right).$$

La famille $(x^i A(x))_{0 \leq i \leq n-p}$ est une famille génératrice de F_A ,

$$F_A = \text{Vect} \left((x^i A(x))_{0 \leq i \leq n-p} \right).$$

Montrons maintenant que la famille $(x^i A(x))_{0 \leq i \leq n-p}$ est libre. Soit $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n-p}$,

$$\sum_{i=0}^{n-p} \lambda_i x^i A(x) = 0_E \iff \left(\sum_{i=0}^{n-p} \lambda_i x^i \right) A(x) = 0_E$$

$$\iff \sum_{i=0}^{n-p} \lambda_i x^i = 0_E$$

$$\iff \forall i \in [0, n-p], \quad \lambda_i = 0.$$

Ainsi $(x^i A(x))_{0 \leq i \leq n-p}$ est une base de F_A et

$$\dim(F_A) = n - p + 1.$$

- De même $(x^i B(x))_{0 \leq i \leq n-q}$ est une base de F_B et

$$\dim(F_B) = n - q + 1.$$

2. On a $\dim(F_A) + \dim(F_B) = 2n - p - q + 2 = n + 1 = \dim(E)$.
D'après la caractérisation des sous-espaces supplémentaires avec la dimension, il suffit de vérifier

$$F_A \cap F_B = \{0_E\}.$$

Raisonnons par double-inclusion.

⇒ Comme F_A et F_B sont des sous-espaces vectoriels, ils contiennent le vecteur nul.

$$0_E \in F_A \cap F_B, \text{ c'est-à-dire, } \{0_E\} \subset F_A \cap F_B.$$

⇐ Soit $P \in F_A \cap F_B$, c'est-à-dire, A et B divisent P . Comme $a_1, \dots, a_p$ sont les racines de A , ces valeurs sont aussi racines de P . De même, $b_1, \dots, b_q$ sont racines de P . Le polynôme P admet donc $p + q = n + 1$ racines distinctes. Or $P \in E = \mathbb{R}_n[x]$, nécessairement $P = 0_E$. On obtient

$$\{0_E\} \supset F_A \cap F_B.$$

D'où l'égalité et

$$E = F_A \oplus F_B.$$

3. 1 est le polynôme constant dont la constante vaut 1. On a $1 \in E$ et $E = F_A \oplus F_B$. Donc il existe $(P, Q) \in F_A \times F_B$ tel que $1 = P + Q$. Puis, par définition de F_A et F_B ,

$$\text{Il existe deux polynômes } U \text{ et } V \text{ tels que } UA + VB = 1.$$

Exercice 46

p. 27

CA47

1. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\deg(P_k) = \deg((1-x)^k) + \deg(x^{n-k}) = k + (n-k) = n.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} P_i(x) &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (1-x)^i x^{n-i} \\ &= x^{n-k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (1-x)^i x^{k-i} \\ &= x^{n-k} ((1-x) + x)^k = x^{n-k}. \end{aligned}$$

En particulier, tout polynôme x^k avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ s'écrit comme combinaison linéaire de la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$.

3. De la question précédente,

$$\text{Vect}((x^k)_{0 \leq k \leq n}) \subset \text{Vect}((P_k)_{0 \leq k \leq n}).$$

Or, $(x^k)_{0 \leq k \leq n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$,

$$\mathbb{R}_n[x] = \text{Vect}((x^k)_{0 \leq k \leq n}).$$

Ainsi, $\mathbb{R}_n[x] \subset \text{Vect}((P_k)_{0 \leq k \leq n})$.

De plus, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_k \in \mathbb{R}_n[x]$,

$$\text{Vect}((P_k)_{0 \leq k \leq n}) \subset \mathbb{R}_n[x].$$

Par double-inclusion $\text{Vect}((P_k)_{0 \leq k \leq n}) = \mathbb{R}_n[x]$.

$(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est génératrice de $\mathbb{R}_n[x]$ et

$$\text{Card}((P_k)_{0 \leq k \leq n}) = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[x]).$$

Donc :

$$(P_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[x].$$

- 4.a) D'après la formule du triangle de Pascal,

$$\forall (i, k) \in \mathbb{N}^2, \quad \binom{k+1}{i+1} = \binom{k}{i+1} + \binom{k}{i}.$$

On reconnaît alors une somme télescopique

$$\begin{aligned} \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} &= \sum_{k=i}^n \left(\binom{k+1}{i+1} - \binom{k}{i+1} \right) \\ &= \binom{n+1}{i+1} - \binom{i}{i+1} = \boxed{\binom{n+1}{i+1}}. \end{aligned}$$

- 4.b)

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{j=0}^n x^j = \sum_{k=0}^n x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} P_i(x) = \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} \binom{k}{i} P_i(x) \\ &= \sum_{i=0}^n P_i(x) \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} = \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i+1} P_i(x). \end{aligned}$$

Les coordonnées de Q dans la base $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ sont

$$\left(\binom{n+1}{1}, \binom{n+1}{2}, \dots, \binom{n+1}{n+1} \right).$$

Exercice 47

p. 28

CA48

1. Soient $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_G = (f_1, \dots, f_q)$ deux bases respectives de F et G . En particulier, $p = \dim(F)$ et $q = \dim(G)$. On définit

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \varepsilon_i = (e_i, 0_G)$$

$$\text{et } \forall i \in \llbracket 1; q \rrbracket, \varepsilon_{i+p} = (0_F, f_i).$$

On vérifie que les vecteurs ε_i forment une base de $F \times G$. Comme il y a exactement $p + q$ éléments dans cette base, il vient

$$\dim(F \times G) = \dim(F) + \dim(G).$$

- 2.a) Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$, $(x, y), (x', y') \in F \times G$:

$$\begin{aligned} f(\alpha(x, y) + (x', y')) &= f(\alpha x + x', \alpha y + y') = (\alpha x + x') + (\alpha y + y') \\ &= \alpha(x + y) + (x' + y') = \alpha f(x, y) + f(x', y'). \end{aligned}$$

L'application f est linéaire.

- 2.b) Soit $z \in E$. Raisonnons par équivalence

$$z \in \text{Im}(f) \iff \exists (x, y) \in F \times G, z = x + y \iff z \in F + G$$

Ainsi

$$\text{Im}(f) = F + G.$$

Soit $(x, y) \in F \times G$.

$$(x, y) \in \text{Ker}(f) \iff x + y = 0 \iff y = -x$$

Comme $x \in F$, $y = -x \in F$ et de même $y \in G$, $x = -y \in G$.
Donc

$$\text{Ker}(f) = \{(x, -x); x \in F \cap G\}.$$

En particulier, en dimension finie, on constate que

$$\dim \text{Ker}(f) = \dim(F \cap G).$$

2.c) D'après la formule du rang et la question 1

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}(f)) &= \dim(F \times G) - \dim(\text{Ker}(f)) \\ &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(\text{Ker}(f)). \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à remplacer pour obtenir la formule de Grassmann

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Exercice 48

p. 28

CA49

Corrigé source ESCP

1. Voir deuxième question de l'exercice 6.

2. On a : $p(M) = \frac{M+{}^tM}{2}$ et $q(M) = \frac{M-{}^tM}{2}$, donc :

$$M = p(M) + q(M), {}^tM = p(M) - q(M)$$

$$\text{Soit : } f(M) = \alpha(p(M) + q(M)) + \beta(p(M) - q(M)) :$$

$$f = (\alpha + \beta)p + (\alpha - \beta)q = (\alpha + \beta)p + (\alpha - \beta)(Id - p)$$

3. Comme $p^2 = p$, $q^2 = q$ et $p \circ q = q \circ p = 0$ (couple de projecteurs associés), on a : $f^2 = (\alpha + \beta)^2 p + (\alpha - \beta)^2 q = (\alpha + \beta)^2 p + (\alpha - \beta)^2 (Id - p)$. Ainsi : et, en éliminant p :

$$\begin{cases} f = (\alpha - \beta)id + 2\beta p \\ f^2 = (\alpha - \beta)^2 id + 4\alpha\beta p \end{cases} \quad f^2 - 2\alpha f = (\beta^2 - \alpha^2)id.$$

4. ★ Si $\beta^2 \neq \alpha^2$, l'écriture précédente donne : $(f - \frac{2\alpha}{\beta^2 - \alpha^2} Id) \circ f = Id$, ce qui prouve que f est un automorphisme et fournit f^{-1} .

★ Si $\beta = -\alpha$, alors $f(Id) = 0$ et f n'est pas injective, donc n'est pas un automorphisme.

★ Si $\beta = \alpha$, alors pour n'importe quelle matrice M antisymétrique, on a $f(M) = 0$ et f n'est pas injective, donc n'est pas un automorphisme.

5. Par récurrence simple : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = (\alpha + \beta)^k p + (\alpha - \beta)^k q$. Soient

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et :

$$A = M_{\mathcal{B}}(f)$$

On a :

$$P = M_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q = M_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors : $A^k = M_{\mathcal{B}}(f^k) = (\alpha + \beta)^k P + (\alpha - \beta)^k Q$ et on explicite aisément les coefficients de A^k .

Exercice 49

p. 28

CA50

1. Soit $x_0 \in \text{Im}(\varphi) \cap \text{Ker}(\varphi)$ avec $x_0 \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Comme $\text{Im} \varphi$ est de dimension 1

$$\text{Im} \varphi = \text{Vect}(x_0)$$

Or, $x_0 \in \text{Ker} \varphi$, on a donc bien

$$\text{Im} \varphi \subset \text{Ker}(\varphi).$$

Soit $(x_0, e_2, \dots, e_{n-1})$ une base du noyau de f complétée à partir de la famille libre (x_0) (théorème de la base incomplète). Soit y_0 un antécédent de x_0 par φ . On a donc $\varphi(y_0) = x_0$. Justifions que la famille

$$(y_0, x_0, e_2, \dots, e_{n-1})$$

est une base de $\mathbb{R}^n$. Comme elle contient $n = \dim \mathbb{R}^n$ vecteurs, il suffit de vérifier que la famille est libre. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0 y_0 + \lambda_1 x_0 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_{n-1} e_{n-1} = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

En composant par φ

$$\lambda_0 x_0 = \underbrace{\lambda_0 \varphi(y_0)}_{\neq 0} = 0 \quad \text{puis} \quad \lambda_0 = 0.$$

La famille $(x_0, e_2, \dots, e_{n-1})$ étant libre, $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$. La famille $(y_0, x_0, e_2, \dots, e_{n-1})$ est donc bien une base qui répond au problème.

2.
3.
4.

Exercice 50

p. 29

CA51

1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda g(e_2) + \mu g(e_3) = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

Montrons que $\lambda = \mu = 0$. Appliquons f à chaque membre de l'égalité

$$f(0_{\mathbb{R}^2}) = f(\lambda g(e_2) + \mu g(e_3))$$

$$0_{\mathbb{R}^3} = \lambda f \circ g(e_2) + \mu f \circ g(e_3)$$

par linéarité de f . Or la condition sur AB impose

$$f \circ g(e_2) = e_2 \quad \text{et} \quad f \circ g(e_3) = e_3.$$

Ainsi $0_{\mathbb{R}^3} = \lambda e_2 + \mu e_3$. Comme (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, (e_2, e_3) est libre et $\lambda = \mu = 0$. La famille $(g(e_2), g(e_3))$ est une famille libre dans un espace de dimension 2, c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

2. On a

$$g \circ f(g(e_2)) = g(f \circ g(e_2)) = g(e_2)$$

et $g \circ f(g(e_3)) = g(e_3)$.

Dès lors $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(g \circ f) = I_2$.

3. L'application $g \circ f$ est l'application identité. D'où

$$BA = I_2.$$

Exercice 51

p. 29

CA52

1. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\varphi^4 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Il existe donc $x \in E$ tel que

$$\varphi^4(x) \neq 0_E.$$

Justifions maintenant que $\mathcal{B}_x = (x, \varphi(x), \varphi^2(x), \varphi^3(x), \varphi^4(x))$ est une famille libre. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=0}^4 \lambda_i \varphi^i(x) = 0_E \quad (\bullet)$$

En appliquant φ^4 à chaque membre de l'égalité et par linéarité de φ^4 , il vient

$$\sum_{i=0}^4 \lambda_i \varphi^{i+4}(x) = \varphi^4(0_E) = 0_E \quad (\star)$$

Or pour $i \geq 1$

$$\varphi^{i+4}(x) = \varphi^{i-1}(\varphi^5(x)) = \varphi^{i-1}(0_E) = 0_E.$$

Dans la relation $(\star)$, il ne reste que

$$\lambda_0 \underbrace{\varphi^4(x)}_{\neq 0_E} = 0_E.$$

D'où $\lambda_0 = 0$. En appliquant ensuite $\varphi^3, \varphi^2, \dots$ à $(\bullet)$, on démontre de même que $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots$. Finalement, la famille $\mathcal{B}_x$ est libre.

Or cette famille contient 5 vecteurs alors que E est de dimension 4. Absurde et

$$\varphi^4 = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

2. Raisonnons de nouveau par l'absurde en supposant

$$\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \varphi^2.$$

Soit $x \in \text{Ker } \varphi^4$. On a donc

$$\varphi^4(x) = 0 \quad \text{puis} \quad \varphi^2(\varphi^2(x)) = 0_E.$$

Il vient $\varphi^2(x) \in \text{Ker } \varphi^2$. Par hypothèse $\varphi^2(x)$ appartient aussi à $\text{Ker } \varphi$. D'où

$$\varphi^3(x) = \varphi(\varphi^2(x)) = 0_E.$$

Ce résultat est valable pour tout $x \in E$ car

$$\text{Ker } \varphi^4 = E \quad (\varphi^4 = 0_{\mathcal{L}(E)}).$$

C'est-à-dire $\varphi^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Absurde par hypothèse sur φ^3 et $\text{Ker } \varphi \neq \text{Ker } \varphi^2$.

• Le raisonnement est identique pour montrer que

$$\text{Ker } \varphi^2 \neq \text{Ker } \varphi^3.$$

Remarque. Précisons aussi que $\text{Ker } \varphi \neq \{0_E\}$ car φ serait un endomorphisme injectif de dimension finie. Dès lors, φ^4 serait aussi injectif. Absurde.

3. On a la suite d'inclusions strictes

$$\{0_E\} \subsetneq \text{Ker } \varphi \subsetneq \text{Ker } \varphi^2 \subsetneq \text{Ker } \varphi^3 \subsetneq E.$$

On en déduit la suite d'inégalités strictes

$$0 < \dim \text{Ker } \varphi < \dim \text{Ker } \varphi^2 < \dim \text{Ker } \varphi^3 < 4.$$

Les dimensions étant des nombres entiers, nécessairement

$$\dim \text{Ker } \varphi^3 = 3.$$

4. Soit $x \notin \text{Ker } \varphi^3$. Précisons qu'un tel x existe puisque $\text{Ker } \varphi^3$ est strictement inclus dans E . En reprenant la question 1, on montre que

$$\mathcal{B}_x = (x, \varphi(x), \varphi^2(x), \varphi^3(x))$$

est une famille libre. Étant de cardinal 4, c'est même une base de E . Dans ce cas, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_x}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 52

p. 29

CA53

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $u \in \text{Ker } \varphi^k$. On a alors

$$\varphi^{k+1}(u) = \varphi(\varphi^k(u)) = \varphi(0_E) = 0_E$$

car φ est linéaire. D'où $u \in \text{Ker } \varphi^{k+1}$. L'inclusion

$$\text{Ker } \varphi^k \subset \text{Ker } \varphi^{k+1}$$

est prouvée. Justifions maintenant que l'inclusion est stricte pour $k \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$ en raisonnant par l'absurde. On suppose donc que

$$\text{Ker } \varphi^k = \text{Ker } \varphi^{k+1}.$$

Dans ce cas, pour $u \in \text{Ker } \varphi^{k+2}$

$$\varphi(u) \in \text{Ker } \varphi^{k+1} \subset \text{Ker } \varphi^k,$$

ainsi $\varphi^{k+1}(u) = \varphi^k(\varphi(u)) = 0_E$ et $u \in \text{Ker } \varphi^{k+1}$. On vient de montrer que

$$\text{Ker } \varphi^{k+1} = \text{Ker } \varphi^{k+2}.$$

De proche en proche, on montre par une récurrence finie que

$$\text{Ker } \varphi^k = \text{Ker } \varphi^{k+1} = \text{Ker } \varphi^{k+2} = \dots = \text{Ker } \varphi^p.$$

Absurde, $\text{Ker } \varphi^k = E$ et $\varphi^k \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ car $k \leq p-1$.

Les inclusions sont strictes.

2. Notons M la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}_p$.

Soit $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$. Pour tout $e \in \mathcal{B}_k$, on a

$$\varphi(e) \in \text{Ker}(\varphi^{k-1}) = \text{Vect}(\mathcal{B}_{k-1}).$$

De plus, pour tout $e \in \mathcal{B}_1$, $\varphi(e) = 0_E$.

On en déduit que la matrice M est triangulaire supérieure.

Si on note $t_1, \dots, t_n$, les coefficients diagonaux de M , on sait que $t_1^p, \dots, t_n^p$ sont les coefficients diagonaux de M^p .

Car la matrice est triangulaire.

Or, M^p est la matrice nulle, nécessairement

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad t_i = 0.$$

La diagonale est nulle.

3. Soit φ l'endomorphisme canoniquement associé à A . φ est un endomorphisme nilpotent. Quitte à diminuer la valeur de p , on peut supposer

$$A^p = 0_n \quad \text{et} \quad A^{p-1} \neq 0.$$

$$\text{D'où} \quad \varphi^p = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad \varphi^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

D'après ce qui précède, il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice M de φ dans cette base est à diagonale nulle. Comme A et M sont semblables (formule de changement de bases) et que la trace est un invariant de similitude

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(M) = 0.$$

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, A^k est encore nilpotente et donc de trace nulle.

Exercice 53

p. 29

CA54

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Par hypothèse, il existe $n_1, n_2, \dots, n_p \in \mathbb{N}$ tels que

$$f^{n_i}(e_i) = 0_E.$$

Avec $n = \max n_i$, on a

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad f^n(e_i) = 0_E.$$

Soit $u \in E$, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$u = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$$

$$f^n(u) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f^n(e_i) = 0_E.$$

D'où le résultat.

Précisons que le résultat devient faux en dimension infinie. On pourra s'en convaincre en considérant l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{R}[x] : P \mapsto P'$.

Exercice 54

p. 29

CA55

Soient u_0, u_1, u_2 appartenant respectivement à $\text{Ker}(\varphi)$, $\text{Ker}(\varphi - \text{id}_E)$, $\text{Ker}(\varphi + \text{id}_E)$ tels que

$$0_E = u_0 + u_1 + u_2.$$

En appliquant φ , il vient

$$\begin{aligned} \varphi(0_E) &= \varphi(u_0 + u_1 + u_2) \\ &= \varphi(u_0) + \varphi(u_1) + \varphi(u_2) \\ 0_E &= 0_E + u_1 - u_2. \end{aligned}$$

D'où $u_1 = u_2$. En appliquant une nouvelle fois φ , il vient

$$\varphi(u_1) = \varphi(u_2) \quad \text{puis} \quad u_1 = -u_2.$$

Nécessairement $u_1 = u_2 = 0_E$ et $u_0 = 0_E$. Par définition, les sous-espaces sont bien en somme directe.

Exercice 55

p. 29

CA56

1. Soit $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$.

$P \in F_i$ si et seulement si les entiers $j \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{i\}$ sont racines de P . Autrement dit,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - j) \quad \text{divise} \quad P(x).$$

Or L_i est de degré n et P est de degré au plus n . Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$P(x) = \lambda L_i(x).$$

Finalement $P \in F_i$ si et seulement si $P \in \text{Vect}(L_i)$. D'où l'égalité demandée.

2. Soit $(P_0, P_1, \dots, P_n) \in F_0 \times F_1 \times \dots \times F_n$ tel que

$$P_0 + P_1 + \dots + P_n = 0_{\mathbb{R}_n[x]}.$$

Soit $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$ fixé. P_i admet n racines au moins données par $j \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{i\}$. De plus en évaluant en i la relation précédente.

$$P_0(i) + P_1(i) + \dots + P_i(i) + \dots + P_n(i) = 0.$$

Or pour $j \neq i$, on a $P_j \in F_j$ et $P_j(i) = 0$. La somme précédente donne alors aussi $P_i(i) = 0$. Ainsi, le polynôme P_i admet au moins $n+1$ racines alors qu'il est de degré au plus n . On sait alors que P_i est le polynôme nul.

- On a montré que pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $P_i = 0_{\mathbb{R}_n[x]}$. La somme $\sum_{i=0}^n F_i$ est directe. Dans ce cas

$$\dim \left(\sum_{i=0}^n F_i \right) = \sum_{i=0}^n \dim F_i = n+1.$$

Puis

$$\left\{ \begin{array}{l} \dim \bigoplus_{i=0}^n F_i = \dim \mathbb{R}_n[x] \\ \bigoplus_{i=0}^n F_i \subset \mathbb{R}_n[x]. \end{array} \right.$$

On en déduit l'égalité : $\bigoplus_{i=0}^n F_i = \mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 56

p. 29

CA57

1. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il n'existe pas de vecteur x tel que $(x, \varphi(x))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$. Cela revient

à supposer que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(x)$ est colinéaire à x . En particulier, il existe λ, μ et $\nu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\varphi(e_1) = \lambda e_1, \quad \varphi(e_2) = \mu e_2, \quad \varphi(w) = \nu w.$$

Or par linéarité de φ

$$\begin{aligned} \varphi(w) &= \varphi(e_1 + e_2) = \varphi(e_1) + \varphi(e_2) \\ &= \lambda e_1 + \mu e_2. \end{aligned}$$

D'où $\nu(e_1 + e_2) = \lambda e_1 + \mu e_2.$

La famille (e_1, e_2) étant libre, il vient

$$\lambda = \nu = \mu.$$

On a donc $\varphi(e_1) = \lambda e_1$ et $\varphi(e_2) = \lambda e_2$. Puis $\varphi = \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ puisque l'égalité est vraie sur des vecteurs d'une base. Absurde, par hypothèse, φ n'est pas colinéaire à l'identité. Il existe donc un vecteur $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x, \varphi(x))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.

2. On a

$$\varphi(x) = 0 \cdot x + 1 \cdot \varphi(x)$$

De plus, $(x, \varphi(x))$ étant une base de $\mathbb{R}^2$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\varphi(\varphi(x)) = ax + b\varphi(x).$$

Ainsi la matrice de φ dans la base $(x, \varphi(x))$ est

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}.$$

Or la trace (et aussi le déterminant) sont des invariants de similitude, donc

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) = b \quad \text{et} \quad \det(A) = \det(B) = -a.$$

3. En résumé, la matrice A est semblable à

$$\begin{bmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \text{Tr}(A) \end{bmatrix}.$$

On peut reprendre le résultat précédent pour la matrice tA et obtenir le fait que tA est semblable à la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & -\det({}^tA) \\ 1 & \text{Tr}({}^tA) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \text{Tr}(A) \end{bmatrix}.$$

Les matrices A et tA sont semblables à une même matrice, elles sont semblables.

Remarque. On pourra consulter le sujet H.E.C 2022, voie ECS, pour une généralisation de ce résultat à toute matrice carrée de taille (n, n) .

Exercice 57

p. 30

CA58

1. Soient B et $\mathcal{C}$ deux bases de E . Par la formule de changement de bases

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = P \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) P^{-1}$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Puis

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)) &= \text{Tr}(P \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) P^{-1}) \\ &= \text{Tr}(P^{-1} P \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi)) \\ &= \text{Tr}(I_n \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi)) \\ \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)) &= \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi)). \end{aligned}$$

La trace ne dépend donc pas du choix de base.

2.a) La matrice de φ dans la base canonique est

$$\text{Mat}_{\text{can}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

On lit directement $\text{Tr}(\varphi) = n + 1$.

2.b)i) La décomposition a déjà été prouvée à la question 2 de l'exercice 6, solution p.6.

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$$

avec $\begin{cases} \dim \mathcal{S}_n = n(n+1)/2 \\ \dim \mathcal{A}_n = n(n-1)/2. \end{cases}$

2.b)ii) Posons $p = n(n+1)/2$. Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à cette décomposition. C'est-à-dire que les p vecteurs de $\mathcal{B}$ appartiennent à $\mathcal{S}_n$ et les $n^2 - p$ suivants sont dans $\mathcal{A}_n$. Comme

$$\begin{aligned} \forall S \in \mathcal{S}_n, \quad \varphi(S) &= S, \\ \forall A \in \mathcal{A}_n, \quad \varphi(A) &= -A, \end{aligned}$$

on obtient la matrice diagonale

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} I_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_{n^2-p} \end{bmatrix}.$$

Finalement $\text{Tr}(\varphi) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n.$

2.c) Dans le cas d'un projecteur $\text{Ker } p \oplus \text{Im } p = E$.

Pour rappel, on peut montrer cette égalité par analyse-synthèse. Pour $u \in E$

$$u = \underbrace{p(u)}_{\in \text{Im } p} + \underbrace{(u - p(u))}_{\in \text{Ker } p}.$$

Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à cette décomposition. Comme

$$\begin{aligned} \forall u \in \text{Ker } p, \quad p(u) &= 0_E, \\ \forall u \in \text{Im } p, \quad p(u) &= u, \end{aligned}$$

on trouve

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{bmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{où } m = \dim \text{Im } p.$$

On lit alors $\text{Tr}(p) = m = \text{rg}(p).$

Exercice 58

p. 30

CA59

1. Soit φ l'endomorphisme canoniquement associé à A . Par hypothèse

$$\forall u \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Ou encore $\text{Im } \varphi \subset \text{Ker } \varphi$.

De plus, on ne peut avoir ici l'égalité entre le noyau et l'image sans contredire la formule du rang

$$\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = 3.$$

On peut donc trouver un vecteur v vérifiant

$$v \in \text{Ker } \varphi \setminus \text{Im } \varphi.$$

Comme φ est non nul, $\text{Ker } \varphi \neq \mathbb{R}^3$ et on peut considérer

$$w \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{Ker } \varphi.$$

Justifions que $(\varphi(w), v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Comme elle contient autant de vecteurs que la dimension, il suffit de vérifier que la famille est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 v + \lambda_2 \varphi(w) + \lambda_3 w = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Par application de φ linéaire

$$\varphi(\lambda_1 v + \lambda_2 \varphi(w) + \lambda_3 w) = \varphi(0_{\mathbb{R}^3})$$

$$\text{puis } \lambda_1 \varphi(v) + \lambda_2 \varphi^2(w) + \lambda_3 \varphi(w) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Or $v \in \text{Ker } \varphi$, $w \in \text{Ker } \varphi^2$, cette égalité se simplifie en $\lambda_3 \varphi(w) = 0_{\mathbb{R}^3}$ puis $\lambda_3 = 0$ car $\varphi(w) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Ensuite

$$\lambda_1 v + \lambda_2 \varphi(w) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\lambda_1 v = -\lambda_2 \varphi(w)$$

Si $\lambda_1 \neq 0$, le vecteur v admet $(-\lambda_2/\lambda_1) \cdot w$ comme antécédent par φ . Absurde, $v \notin \text{Im } \varphi$. Donc $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$.

Finalement la famille $(\varphi(w), v, w)$ est libre. Avec trois vecteurs, c'est aussi une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de φ dans cette base est précisément la matrice B. Concluons : les matrices A et B sont semblables car elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

2. Calculons la dimension de $\mathcal{C}_B$.

$$\text{Soit } M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

$$MB = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & g \end{bmatrix}$$

$$BM = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi $MB = BM$ si et seulement si

$$g = 0, \quad h = 0, \quad d = 0, \quad a = i.$$

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

On a déduit que $\dim \mathcal{C}_B = 5$.

- Notons P, une matrice inversible telle que

$$A = P^{-1}BP.$$

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_A &\iff AM = MA \\ &\iff P^{-1}BPM = MP^{-1}BP \\ &\iff BPMP^{-1} = PMP^{-1}B \\ &\iff PMP^{-1} \in \mathcal{C}_B. \end{aligned}$$

On en déduit l'isomorphisme

$$M \in \mathcal{C}_A \mapsto PMP^{-1} \in \mathcal{C}_B.$$

En particulier, il y a égalité des dimensions

$$\dim \mathcal{C}_A = \dim \mathcal{C}_B.$$

Conclusion : $\dim \mathcal{C}_A = 5$.

Exercice 59

p. 30

CA60

1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $X_1, X_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda X_1 + \mu X_2) &= \text{Tr}(A(\lambda X_1 + \mu X_2)) \\ &= \text{Tr}(\lambda AX_1 + \mu AX_2) \\ &= \lambda \text{Tr}(AX_1) + \mu \text{Tr}(AX_2) \\ \Phi_A(\lambda X_1 + \mu X_2) &= \lambda \Phi_A(X_1) + \mu \Phi_A(X_2) \end{aligned}$$

par linéarité de la trace. L'application Φ_A est linéaire. Comme elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est bien une forme linéaire.

2. Soit E_{ij} la matrice élémentaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des « 0 » sauf un « 1 » en position (i, j) . Posons

$$\Phi_{ij} = \Phi_{E_{ij}}.$$

Justifions que la famille de formes linéaires $(\Phi_{ij})_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket}$ est libre. Soit $(\lambda_{ij}) \in \mathbb{R}^{n^2}$ tel que

$$\sum_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket} \lambda_{ij} \Phi_{ij} = \mathbf{0} \quad (\text{l'application nulle}).$$

Autrement dit, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\sum_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket} \lambda_{ij} \Phi_{ij}(X) = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \lambda_{ij} \Phi_{ij}(X) &= \sum_{i,j} \lambda_{ij} \text{Tr}(E_{ij}X) \\ &= \sum_{i,j} \text{Tr}(\lambda_{ij} E_{ij}X) = \text{Tr}\left(\sum_{i,j} \lambda_{ij} E_{ij}X\right) \\ &= \text{Tr}(AX). \end{aligned}$$

Où on a posé $A = \sum_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket} \lambda_{ij} E_{ij} = (\lambda_{ij})_{i,j}$. En particulier pour $X = {}^tA$, on a

$$\text{Tr}(A {}^tA) = 0.$$

On a vu, (exercice 32) que cela impose $A = 0_n$ et donc pour tout couple (i, j) , $\lambda_{ij} = 0$. La famille $(\Phi_{ij})_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket}$ est bien libre.

Or l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension n^2 car

$$\dim(\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \times 1 = n^2.$$

La famille $(\Phi_{ij})_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket}$ est donc une base de l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Soit φ , une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme la famille $(\Phi_{ij})_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket}$ est génératrice, il existe $(\lambda_{ij}) \in \mathbb{R}^{n^2}$ tel que

$$\varphi = \sum_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket} \lambda_{ij} \Phi_{ij}.$$

En reprenant le calcul précédent, si on pose

$$A = \sum_{i,j} \lambda_{ij} E_{i,j} = (\lambda_{ij})_{i,j},$$

on trouve $\varphi = \Phi_A$.

Exercice 60

p. 30

CA61

1.

2.a) Il est clair que φ est linéaire.

Prouvons l'injectivité de φ . Soit $P \in \text{Ker } \varphi$, dans ce cas

$$\varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) = (0, 0, \dots, 0).$$

Autrement dit, P admet au moins $n+1$ racines avec $a_0, a_1, \dots, a_n$. Or $P \in \mathbb{R}_n[x]$, nécessairement, P est le polynôme nul. Il vient

$$\text{Ker } \varphi \subset \{0_{\mathbb{R}_n[x]}\}.$$

On a même l'égalité puisqu'un noyau contient toujours le vecteur nul.

De plus, l'espace de départ et d'arrivée sont de même dimension (finie). Par les corollaires de la formule du rang, φ est un isomorphisme.

2.b) • *Méthode 1. Famille génératrice*

Comme la famille contient autant de vecteurs que la dimension de $\mathbb{R}_n[x]$, pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer que la famille est génératrice. Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Posons

$$Q = P - \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i.$$

Or, par définition de L_i

$$L_i(a_i) = 1 \quad \text{et} \quad L_i(a_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

En évaluant en a_i , il vient

$$Q(a_i) = P(a_i) - P(a_i) = 0.$$

Le polynôme Q admet au moins $n+1$ racines alors qu'il est de degré au plus n . Nécessairement, Q est le polynôme nul et

$$P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i.$$

On prouve ainsi le caractère générateur de la famille et l'égalité demandée.

• *Méthode 2. Famille libre*

Comme la famille contient autant de vecteurs que la dimension de $\mathbb{R}_n[x]$, pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer que la famille est libre. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i = 0_{\mathbb{R}[x]}.$$

Par linéarité de l'application réciproque

$$\varphi^{-1}\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \varphi^{-1}(e_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i = 0_{\mathbb{R}[x]}.$$

En appliquant φ , on obtient

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i e_i = 0_{\mathbb{R}^{n+1}}.$$

puis, pour tout $i \in \llbracket 0;n \rrbracket$, $\lambda_i = 0$ puisque $(e_0, \dots, e_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{n+1}$. En conclusion, $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

- Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. La famille $\mathcal{C}$ est génératrice, il existe $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$P = \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i.$$

En évaluant en les points a_i , on obtient le résultat demandé.

2.c) On a vu que $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{-1} = P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$.

Et, pour tout $i \in \llbracket 1;n \rrbracket$

$$x^i = \sum_{j=0}^n a_j^i \cdot L_j(x) \quad \text{et} \quad 1 = \sum_{j=0}^n 1 \cdot L_j(x).$$

D'où

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Exercice 61

p. 31

CA62

1. La famille $\mathcal{B}_{u,m}$ est génératrice de E , donc

$$m = \text{Card}(\mathcal{B}_{u,m}) \geq \dim(E) = n.$$

2. Prouvons par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(k) : \text{« la famille } \mathcal{B}_{u,k} \text{ est une famille libre »}$$

est vraie pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

→ *Initialisation.* $\mathcal{P}(1)$ est vraie car u ne peut être le vecteur nul.

→ *Hérédité.* Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie, montrons $\mathcal{P}(k+1)$. C'est-à-dire, la famille

$$(u, \varphi(u), \dots, \varphi^k(u))$$

est libre. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i \varphi^i(u) = 0_E.$$

Prouvons que $\lambda_k = 0$ en raisonnant par l'absurde. Si $\lambda_k \neq 0$, alors

$$\varphi^k(u) = - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_k} \varphi^i(u) \in \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,k}).$$

En appliquant φ , on a aussi

$$\begin{aligned} \varphi^{k+1}(u) &= \sum_{i=0}^{k-1} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_k} \right) \varphi^{i+1}(u) \\ &= \underbrace{\sum_{i=0}^{k-2} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_k} \right) \varphi^{i+1}(u)}_{\in \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,k})} + \underbrace{\left(-\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} \right) \varphi^k(u)}_{\in \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,k})}. \end{aligned}$$

Puis $\varphi^{k+1}(u) \in \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,k})$.

Par récurrence, on montre que pour tout $p \geq k$

$$\varphi^p(u) \in \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,k}).$$

Or, le vecteur u est cyclique, on montre alors que

$$E = \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,m}) = \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,k}).$$

Absurde, on a trouvé une famille génératrice de E avec k vecteurs, soit un nombre de vecteurs strictement inférieur à la dimension de E . Donc $\lambda_k = 0$.

Enfin, par liberté de la famille $\mathcal{B}_{u,k}$, on a pour tout $i \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket$, $\lambda_i = 0$. La famille $\mathcal{B}_{u,k+1}$ est libre. Ce qui prouve $\mathcal{P}(k+1)$.

→ *Conclusion.* Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

En particulier, la famille $\mathcal{B}_{u,n}$ est libre. Comme elle contient autant de vecteurs que la dimension de E , c'est une base de E .

3.a) Notons A l'ensemble des entiers k tels que la famille $\mathcal{B}_{u,k}$ soit libre.

Comme u est non nul, on sait que la famille $\mathcal{B}_{u,1} = (u)$ est libre. Ainsi $1 \in A$.

Comme il n'existe pas de famille libre avec plus de vecteurs que la dimension de E , A est une partie majorée par $\dim(E)$. La partie A est une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée, elle admet un plus grand élément. Si m est ce plus grand élément, on a bien $m \in A$ (la famille $\mathcal{B}_{u,m}$ est libre) mais

$m+1 \notin A$ (la famille $\mathcal{B}_{u,m+1}$ n'est pas libre).

3.b) Pour montrer que $\text{Vect}(\mathcal{B}_{u,m})$ est stable par φ , il suffit de montrer que

$$\forall e \in \mathcal{B}_{u,m}, \quad \varphi(e) \in \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,m}).$$

Par définition de $\mathcal{B}_{u,m}$, c'est évident pour les $m-1$ premiers vecteurs. On peut se limiter au dernier et montrer que

$$\varphi^m(u) = \varphi(\varphi^{m-1}(u)) \in \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,m}).$$

Or, la famille $\mathcal{B}_{u,m+1}$ est liée, donc il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi^i(u) = 0_E.$$

On isole le dernier terme

$$\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i \varphi^i(u) + \lambda_m \varphi^m(u) = 0_E.$$

Si $\lambda_m = 0$ alors la première somme est nulle. Absurde car la famille $\mathcal{B}_{u,m}$ est libre et les coefficients λ_i ne peuvent être tous nuls. On a donc $\lambda_m \neq 0$ et

$$\varphi^m(u) = - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_m} \varphi^i(u) \in \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,m}).$$

Ce qui conclut.

3.c) Par hypothèse sur φ , $\text{Vect}(\mathcal{B}_{u,m})$ est soit l'espace nul, soit l'espace en entier. Comme u est un élément non nul, $\text{Vect}(\mathcal{B}_{u,m}) \neq \{0_E\}$. D'où

$$\text{Vect}(\mathcal{B}_{u,m}) = E.$$

Finalement, la famille $\mathcal{B}_{u,m}$ est génératrice, le vecteur u est cyclique.

3.d) Par définition : $\varphi^n(u) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^i(u)$.

Soit $j \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} \varphi^n(\varphi^j(u)) &= \varphi^j(\varphi^n(u)) = \varphi^j \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^i(u) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^j(\varphi^i(u)) \quad (\text{linéarité}) \\ \varphi^n(\varphi^j(u)) &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^i(\varphi^j(u)). \end{aligned}$$

En résumé, l'égalité

$$\varphi^n(v) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^i(v)$$

a été vérifiée pour tout vecteur v d'une base de E . Par linéarité, elle est encore vraie pour tout vecteur de E . L'égalité demandée est ainsi prouvée.

3.e) On trouve

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{u,n}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 62**p. 31**

CA63

1. Posons $B = (e_1, e_2)$, la base canonique. Comme A est de trace nulle, on peut écrire

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

- $\varphi(e_1) = (a, c)$. Si $c \neq 0$, alors $x = e_1$ convient.
- $\varphi(e_2) = (b, -a)$. Si $b \neq 0$, alors $x = e_2$ convient.
- Supposons donc que $c = b = 0$, dans ce cas $a \neq 0$ (A n'est pas la matrice nulle) et

$$\begin{aligned} \varphi(1, 1) &= \varphi(e_1 + e_2) = \varphi(e_1) + \varphi(e_2) \\ &= (a, 0) + (0, -a) = a(1, -1). \end{aligned}$$

Le vecteur $x = (1, 1)$ convient.

2. Comme $(x, \varphi(x))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$ avec deux vecteurs, c'est une base. Notons la $\mathcal{C}$. Ainsi

$$B = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \quad \text{où } \varphi^2(x) = \alpha x + \beta \varphi(x).$$

Comme $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$, $\beta = 0$ et B est à diagonale nulle et semblable à A par la formule de changement de base.

Exercice 67**p. 32**

CA68

Pour tester qu'une matrice est inversible, on peut tester si le rang est maximal. Le rang d'une matrice A s'obtient en Python à l'aide de la commande `matrix_rank(A)`. De plus, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$M(a, b) = (a - b)I_{25} + bJ.$$

On en déduit le programme :

```
import numpy as np

Compteur=0
for a in range(-50,51) :
    for b in range(-50,51) :
        Mab=(a-b)*np.eye(25)+b*np.ones
            ([25,25])
        if np.linalg.matrix_rank(Mab)<25 :
            Compteur+=1
print('Il y a', Compteur, 'matrices de ce
type non inversibles')
```

On obtient 105 couples (a, b) solutions.

Remarque. Au chapitre suivant, nous verrons une démonstration théorique de ce résultat.

Exercice 68**p. 32**

CA69

1.a)

```
import numpy as np

def transpo(A):
    [n,p]=np.shape(A)
    B=np.zeros([p,n])
    for i in range(n):
        for j in range(p):
            B[j,i]=A[i,j]
    return B

# test
A=np.array([[1,2,3],[4,5,6]])
print(transpo(A))
```

1.b)

```
import numpy as np

def antitranspo(A):

    [n,p]=np.shape(A)

    if p!=n:
        return "Erreur, matrice non carrée"

    B=np.zeros([p,n])
    for i in range(n):
        for j in range(p):
            B[j,i]=A[n-1-i,n-1-j]
    return B

# test
A=np.array([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]])
print(antitranspo(A))
```

```
[[9. 6. 3.]
 [8. 5. 2.]
 [7. 4. 1.]]
```

```
B=np.array([[1,2,3],[4,5,6]])
print(antitranspo(B))
```

Erreur, matrice non carrée

2. Le code :

```
T0=np.array([[0,0,3],[0,4,0],[-2,0,0]])
n=5
T=T0
print(T)
for k in range(n):
    T=np.dot(T,T0)
    print(T)
```

renvoie :

```
[[ 0  0  3]
 [ 0  4  0]
 [-2  0  0]]
[[ -6  0  0]
 [ 0 16  0]
 [ 0  0 -6]]
[[ 0  0 -18]
 [ 0 64  0]
 [12  0  0]]
[[ 36  0  0]
 [ 0 256  0]
 [ 0  0 36]]
[[ 0  0 108]
 [ 0 1024  0]
 [-72  0  0]]
```

$$\begin{bmatrix} -216 & 0 & 0 \\ 0 & 4096 & 0 \\ 0 & 0 & -216 \end{bmatrix}$$

Après plusieurs essais sur d'autres matrices, on conjecture que T^k est antidiagonale pour k entier impair et diagonale pour k pair.

3. Posons $D = TP_n$. Comme T est antidiagonale, la matrice D est diagonale. De plus, $P_n^2 = I_n$, donc $T = DP_n$. Posons également

$$\tilde{D} = P_n DP_n.$$

La matrice $\tilde{D}$ est diagonale : ses coefficients diagonaux sont ceux de D , écrits dans l'ordre inverse. On obtient alors

$$T^2 = DP_n DP_n = D\tilde{D}.$$

Ainsi, T^2 est diagonale. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a donc

$$T^{2m} = (D\tilde{D})^m,$$

qui est une matrice diagonale, et

$$T^{2m+1} = (D\tilde{D})^m DP_n,$$

qui est une matrice antidiagonale, puisque $(D\tilde{D})^m D$ est diagonale. Par conséquent, les puissances paires d'une matrice antidiagonale sont diagonales et ses puissances impaires sont antidiagonales.

4. La matrice P_n est inversible et vérifie

$$P_n^{-1} = P_n.$$

Soit T une matrice antidiagonale de taille (n, n) et posons $D = TP_n$. La matrice D est diagonale et ses coefficients diagonaux sont exactement les coefficients situés sur l'antidiagonale de T .

Comme $T = DP_n$ et que P_n est inversible, la matrice T est inversible si et seulement si D est inversible. Or une matrice diagonale est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Ainsi, une matrice antidiagonale est inversible si et seulement si tous les coefficients situés sur son antidiagonale sont non nuls.

Dans ce cas,

$$T^{-1} = P_n D^{-1},$$

et T^{-1} est elle-même antidiagonale.