

Nom :

Mathématiques approfondies

Cours ECG 2

Partie I



Lycée Saint-Louis 2026/2027

Chapitres

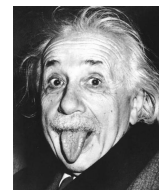
1. Révisions en analyse	p.3
2. Rappels et compléments en algèbre linéaire	p.9
3. Valeurs propres et vecteurs propres	p.25
4. Révisions et compléments sur les variables aléatoires	p.39
5. Espérance et espérance conditionnelle	p.55
6. Variables aléatoires à densité	p.65
7. Lois à densité usuelles	p.77
8. Fonctions de plusieurs variables (introduction)	p.89
9. Diagonalisation	p.97
• Informatique avec Python	p.109

CHAPITRE 1

Révisions en analyse

Do not worry too much about your difficulties in mathematics, I can assure you that mine are still greater.

ALBERT EINSTEIN



- Les questions avec indications sont marquées par .
- Les exercices classiques à bien maîtriser sont repérés par .
- À l'inverse, les exercices « exotiques », réservés à une seconde lecture, sont repérés par .
- Le niveau de difficulté de l'exercice est repéré par les symboles , , ,  (difficulté croissante).

1

Suites et séries

Exercice 1.  Est-ce que les séries suivantes sont convergentes?

RA1

$$\sum \frac{1}{n^{1+1/n}}, \quad \sum \frac{\frac{\cos(1/n)\pi}{\sin(\pi/n)} e^{\ln(n+666)-\ln(n)} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}}{7 \cdot n^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Exercice 2.   Soient x un nombre réel strictement positif et (u_n) la suite réelle ainsi définie :

d'après EMlyon # RA2

$$u_0 = x, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{2\sqrt{u_n}}$$

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 1$.
2. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est monotone et convergente.
b)  Déterminer la limite de cette suite.
3. On suppose maintenant que $x \neq 1$ et on considère la série de terme général $v_n = -1 + u_n$.
a)  Étudier la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de v_{n+1}/v_n .
b)  Que peut-on conclure pour la série de terme général v_n ?
c)  En déduire que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente où : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n = \prod_{k=0}^n u_k$.

Exercice 3.  **Règle de Raabe-Duhamel**

d'après oral ESCP 2025 # RA10

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites strictement positives.

1. Montrer que si $(\ln(nu_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers une limite finie ou vers $+\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.
2.  On suppose qu'il existe un rang n_0 à partir duquel :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \right).$$

Montrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

On suppose dans la suite que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. a)  Montrer que $\sum u_n$ diverge si $\lambda < 1$.

- b) Montrer que $\sum u_n$ converge si $\lambda > 1$.
Indication. On pourra poser $v_n = 1/n^\alpha$ pour un réel α bien choisi.

4. Application

Discuter en fonction de la valeur de $\gamma \in \mathbb{R}$ de la convergence absolue de la série de terme général

$$u_n = \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)\dots(\gamma-(n-2))(\gamma-(n-1))}{n!}.$$

Exercice 4. ♦ Suite de Sylvester

RA3

On définit la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation de récurrence

$$s_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad s_{n+1} = 1 + \prod_{k=0}^n s_k.$$

1. a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n(s_n - 1) + 1$ (*)
- b) Démontrer la relation de récurrence d'ordre 2 suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$s_{n+2} = s_{n+1}^2 - s_n(s_n - 1) \quad (**)$$

- c) Préciser la limite de $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Python

- a) En utilisant la relation (*), écrire une fonction Python d'entête `Sylvester` d'argument n et qui renvoie le tableau unidimensionnel $[s_0 \ s_1 \ \dots \ s_n]$.
- b) Reprendre la question précédente en utilisant maintenant la relation (**).

3. Le code suivant permet de conjecturer la convergence d'une certaine série. Laquelle?

Editeur

```
n=10, indice=np.linspace(0,n,n+1)
A=sylvester(n)
B=np.zeros(n+1)
B[0]=1/A[0]
for i in range(1,n+1):
    B[i]=B[i-1]+1/A[i]

# résultat :
>>> B
array([0.5, 0.83333333, 0.97619048, 0.99944629, 0.99999969,
       1., 1., 1., 1., 1., 1.])
```

4. Prouver votre conjecture en montrant dans un premier temps que $1/(s_n - 1) - 1/(s_{n+1} - 1) = 1/s_n$.

Exercice 5. ♦♦♦ Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où c_n désigne le nombre de chiffres de l'entier n .

d'après oral HEC 2025 # RA47

1. Justifier la convergence de $\sum \frac{c_n}{n(n+1)}$
2. Calculer la somme de cette série.

2

Intégrales et intégrales généralisées

Exercice 6. ♦♦ Pour tout réel a strictement positif et tout entier naturel n , on pose :

RA45

$$I_n(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at} (1 - e^{-t})^n dt.$$

1. Justifier la convergence de l'intégrale généralisée définissant $I_n(a)$.
2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_n(1) = 1/(n+1)$.
 b) En déduire que, pour tout réel a vérifiant $a \geq 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(a) = 0$.
3. Exprimer $I_{n+1}(a)$ en fonction de $I_n(a)$.
4. Pour tout réel a vérifiant $a > 1$ et tout entier naturel n , on pose : $S_n(a) = \sum_{k=0}^n I_k(a)$.
 a) Prouver l'égalité : $S_n(a) = \frac{1}{a-1} - \frac{n+1}{a-1} I_n(a)$.
 b) Établir, pour tout réel a vérifiant $a > 1$, la convergence de la série $\sum I_k(a)$.
5. Écrire une fonction Python qui prend en arguments a et n puis renvoie la valeur de $S_n(a)$.

Exercice 7. ♦ Le rêve du deuxième année

L'objectif de l'exercice est d'établir l'égalité suivante :

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-k} \quad (\bullet)$$

1. Soit $h :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = -x \ln x$. Donner les variations de h . Que dire en 0^+ ?
2.  Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence d'une fonction continue R_n telle que

$$\forall u \in \mathbb{R}^+, \quad e^u = \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} + R_n(u) \quad \text{et} \quad 0 \leq R_n(u) \leq \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} e^u.$$

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $J_k = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^k du$.

a) Justifier l'existence de J_k .

b)  Calculer J_k .

c) En déduire l'existence et le calcul de $I_k = \int_0^1 x^k (\ln x)^k dx$.

On pourra effectuer le changement de variable $u = -(k+1) \ln x$.

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} I_k + r_n$ avec $0 \leq r_n \leq \frac{e^{1/e}}{(n+1)! e^{n+1}}$.
- b) En déduire l'égalité $(\bullet)$.

Exercice 8. ♦♦ Soient $n \in \mathbb{N}$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x}.$$

1. Écrire un programme Python qui prend en arguments n et x puis calcule « de manière économique » $f_n(x)$.
2. a) Préciser f'_n , retrouver la valeur de $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.
- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a : $f_n(x) = \int_x^{+\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x} f_{n-k}(x) = f_n(2x)$.
4. Vérifier que, pour tous $x \in \mathbb{R}_*^+$, $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} f_n(t) dt$ est convergente et vaut $\sum_{k=0}^n f_k(x)$.
5. A-t-on l'égalité

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt \right) ?$$

Exercice 9. ♦♦♦ Calcul de $\zeta(2)$

On pose, pour tout entier naturel n , $C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n} dx$ et $D_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (\cos x)^{2n} dx$.

1. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $C_n = (2n-1)(C_{n-1} - C_n)$.
On pourra écrire $\cos^{2n} x = \cos x \cos^{2n-1} x$.
2. Établir, pour tout entier naturel n non nul, les égalités : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 (\cos x)^{2n-2} dx = \frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}$.
3. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $C_n = (2n-1)nD_{n-1} - 2n^2D_n$.
4. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\frac{1}{n^2} = 2 \left(\frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \frac{D_n}{C_n} \right)$.
5. a) Justifier, pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la minoration : $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$.
- b) En déduire, pour tout entier naturel n , la majoration : $D_n \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{C_n}{2n+2}$.
6. Prouver l'égalité : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 10. ♦♦

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0, \frac{\pi}{4}]$ par : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ ainsi que la suite réelle $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivante :

$$I_0 = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x)]^n dx.$$

A - Étude de la bijection réciproque de f

- Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.
- Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1} .
- Justifier que :

$$\forall x \in J, \quad \cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}.$$

- Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et : $\forall x \in J \setminus \{1\}, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.
- En déduire le développement limité en $\sqrt{2}$ de f^{-1} à l'ordre 1.

B - Étude de la suite d'intégrales

- Justifier que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie. Calculer I_2 .
- Déterminer les réels a et b , tels que : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$.
- En posant $t = \sin x$, déterminer I_1 .
- Déterminer le sens de variation de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad I_n \geq \int_{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)^n} dx \geq \frac{1}{n^2} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)^n}$.
 - En déduire le comportement de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_n$.

Exercice 11. ♦♦♦ Dans la suite, α désigne un nombre réel fixé supérieur ou égal à 1, et on pose :

d'après EDHEC # RA7

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^n dt.$$

- Montrer que l'intégrale I est absolument convergente.
- Calculer I_0 .
 - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que si I_{n-1} est convergente, il en est de même de I_n , et trouver une relation entre I_n et I_{n-1} .
 - En déduire la convergence de I_n et la valeur de I_n en fonction de n et α .
- Rappeler les formules de Taylor-Young et Taylor avec reste intégral. Préciser bien les hypothèses. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction sinus sur l'intervalle $[0, x]$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

- En déduire que :

$$\left| I - \left(I_0 - \frac{I_2}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{I_{2n}}{(2n+1)!} \right) \right| \leq K I_{2n+1},$$

K étant un nombre réel que l'on précisera en fonction de n .

- En déduire : $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\alpha^3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\alpha^{2n+1}} \right)$.
- Rappeler la définition de la fonction arctangente, préciser son graphe ainsi que l'équation de la tangente en 0. Enfin, vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [0, 1], \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$

- En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0, 1], \quad \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan(x) \right| \leq \frac{1}{2n+3}.$

- En déduire une expression très simple de I en fonction de α utilisant la fonction arctangente.

Exercice 12. ♦♦ Exemple d'intégrales à paramètres : lien entre les fonctions Beta et Gamma

RA8

A - Préliminaires

Soit Φ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \Phi(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt.$

Pour tout réel $x > 0$ fixé, on note $\varphi_x : t \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \ln(t) t^{x-1} e^{-t}.$

- Justifier que Φ est bien définie.

2. Vérifier que la fonction Φ est croissante.
3.  Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad t \leq e^t - 1 \leq te^t$.
4. a)  Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. Comparer $\Phi(x/2)$, $\Phi(x+h)$ et $\Phi(2x)$ pour tout $h \in [-x/2, x]$.
b) En déduire la valeur de $\lim_{h \rightarrow 0} h\Phi(x+h)$.

Dans la suite, on admet que la fonction Φ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.

• **B - La fonction Gamma**

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_*^+$, on pose : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1.  En utilisant l'intégrale de Gauss $(I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi})$, donner la valeur de $\Gamma(1/2)$.
2.  Justifier que pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. **Dérivabilité**

- a) Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. Montrer que :

$$\forall h \in [0; +\infty[, \quad h\Phi(x) \leq \Gamma(x+h) - \Gamma(x) \leq h\Phi(x+h).$$

- b)  En déduire la dérivabilité de Γ sur $\mathbb{R}_*^+$ et préciser $\Gamma'(x)$.

4. a) Comparer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$, en déduire qu'il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$.
b)  En utilisant la question 2, donner un équivalent simple de $\Gamma(x)$ en 0^+ .
c) Préciser la convexité de Γ .
d) À l'aide des dernières questions, donner l'allure du graphe de Γ sur $]0; 2[$.

• **◆◆◆◆ C - La fonction Beta**

Pour tous x et y réels strictement positifs, on pose : $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$.

1.  Prouver la convergence de l'intégrale définissant $B(x, y)$.

2. a)  Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \forall y \in \mathbb{R}_*^+, B(x, y) = B(y, x)$.
b)  Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \forall y \in \mathbb{R}_*^+, B(x+1, y) = \frac{x}{y} B(x, y+1)$.

3. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \forall y \in \mathbb{R}_*^+, \quad B(x, y+1) = B(x, y) - B(x+1, y).$$

En déduire que :

$$B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y).$$

4. Soient n un entier naturel non nul et x un réel strictement positif.

- a)  À l'aide de l'inégalité de gauche de la question A-3, montrer que : $\forall t \in [0; n], \quad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$.

- b)  Montrer que pour tout $t \in [0; n]$, on a $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$.

- c)  En déduire que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

5.  Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$.

6. a)  Soit $y \in \mathbb{R}_*^+$. Justifier que : $B(n+1, y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{n^y}$ puis $B(x, y) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{x^y}$.

- b) Soient x, y , deux réels strictement positifs.

- i)  Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{B(x+n, y)}{B(x, y)} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x+k}{x+y+k} \right) \quad \text{puis} \quad \frac{B(x+n, y) n^y}{B(x, y)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}.$$

- ii)  Conclure en montrant que $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

Il n'y a pas de problème, il n'y a que des professeurs.

JACQUES PRÉVERT
Poète français (1900-1977).

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

L'algèbre est généreuse, elle donne souvent plus qu'on lui demande.

JEAN LE ROND D'ALEMBERT

Mathématicien, philosophe français (1717-1783)

1 Sommes de sous-espaces vectoriels

1.1 Rappels : sommes de deux s.e.v et supplémentaires

Définition 1 (somme de sous-espaces, somme directe)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

- Le **sous-espace somme** est défini par $F + G = \{u + v \mid (u, v) \in F \times G\}$.
- On dit que F et G sont en **somme directe**, notée $F \oplus G$, si $F \cap G = \{0_E\}$.

Remarque. $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant F et G .

Proposition 2 (unicité de la décomposition)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i) Les sous-espaces F et G sont en somme directe.
- ii) Tout vecteur $u \in F + G$ s'écrit de manière *unique* sous la forme :

$$u = u_F + u_G \quad \text{avec} \quad u_F \in F, \quad u_G \in G.$$

Définition 3 (supplémentaire)

Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

On dit que F et G sont **supplémentaires** si tout vecteur de E se décompose de façon unique en une somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G . C'est-à-dire

$$\forall w \in E, \quad \exists!(u, v) \in F \times G, \quad w = u + v.$$

 **Attention.** Il n'y a pas unicité du supplémentaire. Il ne faut pas confondre supplémentaire et complémentaire.

Remarque. La méthode Analyse-Synthèse est particulièrement adaptée à cette définition.

Exercice 1



◆ Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$, $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_2 = (1, 1, 1)$.
Montrer que $\text{Vect}(u_1)$ et $\text{Vect}(u_2)$ sont deux supplémentaires de F dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Notons $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ les sous-espaces vectoriels des matrices symétriques et antisymétriques de taille n . Justifier que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont supplémentaires.
Rappel : A est symétrique si ${}^tA = A$ et antisymétrique si ${}^tA = -A$.

CA6

Proposition 4 (caractérisation des supplémentaires)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i) Les sous-espaces F et G sont supplémentaires.
- ii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$.

On a donc : F et G sont supplémentaires si et seulement si $F \oplus G = E$.

Précisions en dimension finie

La preuve de l'énoncé suivant s'appuie sur le *théorème de la base incomplète* : en dimension finie, on peut compléter toute famille libre de vecteurs de E en une base de E .

Proposition 5 (existence d'un supplémentaire)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire.

Remarque. Concaténation de bases.

Soient $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_G = (f_1, \dots, f_r)$ des bases respectivement de F et G . On montre que si F et G sont en somme directe, alors la famille $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r)$ est une base de $F \oplus G$.

On en déduit l'énoncé suivant.

Proposition 6 (cas de la somme directe)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .
Si F et G sont en somme directe, alors

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Théorème 7 (formule de Grassmann)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors,

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Exercice 2



◆ Preuve

1. Soit F_1 un supplémentaire de $F \cap G$ dans F . Montrer que $F_1 \oplus G = F + G$.
2. Conclure en prouvant la formule de Grassmann.

CA9

Proposition 8 (caractérisation des supplémentaires)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Les trois énoncés suivants sont équivalents.

- i) F et G sont supplémentaires.
- ii) $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
- iii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Exercice 3

♦♦ Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. On considère $u = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et

$$F = \text{Vect}(u) \quad \text{et} \quad G = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n a_k x_k = 0 \right\}.$$

1. F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, préciser les dimensions de F et G .
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.
3. Représenter dans le plan les sous-espaces vectoriels F et G lorsque $u = (1, 1)$.

CA10

1.2 Compléments : sommes de p sous-espaces vectoriels**Sommes de sous-espaces vectoriels****Définition 9** (somme de s.e.v)

Soient $F_1, \dots, F_p$, des s.e.v d'un espace vectoriel E . On appelle **somme** de $F_1, \dots, F_p$, notée $\sum_{i=1}^p F_i$, l'ensemble

$$\sum_{i=1}^p F_i = \{ u_1 + \dots + u_p \mid \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, u_i \in F_i \}.$$

Remarque. $\sum_{i=1}^p F_i$ est un s.e.v de E , c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les F_i .

Exemples.

- Soit $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E .

$$\text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_p) = \text{Vect}(e_1) + \text{Vect}(e_2) + \dots + \text{Vect}(e_p).$$

- Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Notons $\mathcal{T}^+$, $\mathcal{T}^-$ et $\mathcal{D}$ respectivement l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes, inférieures strictes et diagonales de taille (n, n) . Ces trois ensembles sont des s.e.v de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{T}^+ + \mathcal{T}^- + \mathcal{D}.$$

Exercice 4

♦ Soient $F_1, \dots, F_p$, des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .

1. Montrer que $\sum_{i=1}^p F_i$ est bien un sous-espace vectoriel de E .
2. Soit H , un sous-espace vectoriel de E tel que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $F_i \subset H$.
Montrer que $\sum_{i=1}^p F_i \subset H$.

CA11

Proposition 10 (somme et dimension)

Soient $F_1, \dots, F_p$, des s.e.v d'un espace vectoriel E .

Si les F_i sont tous de dimension finie, alors $\sum_{i=1}^p F_i$ est aussi de dimension finie avec

$$\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i).$$

Sommes directes

Définition 11 (somme directe)

La somme de p sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \dots, F_p$ d'un espace vectoriel E est dite **directe** si

$$\forall (u_1, \dots, u_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, \quad u_1 + \dots + u_p = 0_E \Rightarrow u_1 = \dots = u_p = 0_E.$$

La somme directe des s.e.v $F_1, F_2, \dots, F_p$ est notée $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$.

Exemples.

- En reprenant l'exemple précédent, on a même $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{T}^+ \oplus \mathcal{T}^- \oplus \mathcal{D}$.
- Si pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $F_i = \text{Vect}(e_i)$ où e_i est un vecteur de E non nul alors la somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe si et seulement si la famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est libre.

Proposition 12 (somme directe et unicité)

Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des s.e.v d'un e.v E . On a équivalence entre :

- i) La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe.
- ii) Tout vecteur de $F_1 + F_2 + \dots + F_p$ s'écrit d'une manière unique comme somme de vecteurs de $F_1, F_2, \dots, F_p$. Autrement dit, pour tout $u \in F_1 + F_2 + \dots + F_p$

$$\exists! (u_1, u_2, \dots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p, \quad u = u_1 + u_2 + \dots + u_p.$$

Exercice 5



◆ Soient F_1, F_2 et F_3 trois s.e.v de E tels que

$$F_1 \cap F_2 = \{0_E\}, \quad F_2 \cap F_3 = \{0_E\} \quad \text{et} \quad F_1 \cap F_3 = \{0_E\}.$$

A-t-on nécessairement $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$?

CA12

Théorème 13 (caractérisation par concaténation)

Soient $F_1, \dots, F_p$ des s.e.v de dimension finie d'un espace vectoriel E . Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_p$, des bases respectivement de $F_1, F_2, \dots, F_p$. On a équivalence entre les énoncés suivants.

- i) La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe.
- ii) La famille $\mathcal{B}$, obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}_i$, est une base de $\sum_{i=1}^p F_i$.

Exercice 6



◆◆ Exemple. Dans $\mathbb{R}^4$, on pose

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = z + t = 0\}, \quad G = \text{Vect}(u), \quad H = \text{Vect}(v) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u = (1, 0, 1, 0) \\ v = (0, 1, 0, 1) \end{cases}$$

- Donner une base de F .
- Vérifier que $F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}^4$ à l'aide du théorème précédent.

CA13

Théorème 14 (caractérisation par les dimensions)

Soient $F_1, \dots, F_p$ des s.e.v de dimension finie d'un espace E . On a l'équivalence entre les énoncés suivants.

- i) La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe.
- ii) $\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) = \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$.

Exemple. Reprenons l'exemple précédent.

$$\dim(\mathcal{T}^+) + \dim(\mathcal{T}^-) + \dim(\mathcal{D}) = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})).$$

Exercice 7



◆ Soient F_1, F_2 et F_3 trois sous-espaces vectoriels de E tels que

$$F_1 \cap F_2 = \{0_E\}, \quad F_2 \cap F_3 = \{0_E\}, \quad F_1 \cap F_3 = \{0_E\}$$

$$\text{et } \dim(F_1) + \dim(F_2) + \dim(F_3) = \dim(E).$$

A-t-on nécessairement $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = E$?

CA14

◆◆◆ Exemple

Dans $\mathbb{R}_3[x]$, on pose :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\}, \quad V = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(1) = P(2) = 0\},$$

$$G = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}, \quad H = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(x) = P(-x)\}.$$

1. Préciser les dimensions de chacun de ces sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. 🔑 Montrer que $V \oplus H = \mathbb{R}_3[x]$.
3. 🔑 Justifier que $F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}_3[x]$.

CA15

2

Changement de bases

2.1

Rappels : liens entre matrices et applications linéaires

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base d'un espace vectoriel E , alors pour tout vecteur u de E , il existe un unique n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$u = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Dans ce cas, $(x_1, \dots, x_n)$ sont les **coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$** . On définit la **matrice colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$** par

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Généralisation. Soient $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E et $\mathcal{B}$ une base de E .

Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $(x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{n,k})$ les coordonnées de u_k dans la base $\mathcal{B}$.

On appelle **matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$** , notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$, la matrice dont les colonnes sont les matrices colonnes des vecteurs de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,p} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,p} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

Autrement dit, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ s'obtient en concaténant les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs de la famille.

Définition 15 (matrice d'une application linéaire)

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathcal{B}_F$ deux bases respectives de E et F . La **matrice de $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$** est la matrice de la famille $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p))$ dans la base $\mathcal{B}_F$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)).$$

Elle est notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$.

Représentation

Notons $(e_1, \dots, e_p)$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ des bases de E et F . Une manière commode de se représenter la matrice est de placer en colonne les composantes des images de la base $(e_1, \dots, e_p)$ par φ dans la base d'arrivée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Le coefficient en position (i, j) est la composante de $\varphi(e_j)$ suivant le vecteur ε_i .

$$\begin{array}{cccccc} & \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & & \varphi(e_p) & \\ \left[\begin{array}{ccccc} * & \dots & \dots & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & * & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & \dots & \dots & * \end{array} \right] & \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array} \end{array}$$

Exemples.

- La matrice de l'application identité $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\text{id}_E)$ est la matrice identité I_p où $p = \dim(E)$.
- La matrice de l'application nulle $u \in E \rightarrow 0_F \in F$ est $0_{n,p}$ avec $n = \dim(F)$, $p = \dim(E)$.

Théorème 16 (isomorphisme)

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie (notées respectivement p et n) et $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ deux bases respectives de E et F .

L'application $\Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ \varphi & \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) \end{cases}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

En particulier, pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi + \psi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) + \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\psi) \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\lambda\varphi) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi).$$

Rappel. Un isomorphisme est une application linéaire bijective.

Conséquences.

- À toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ correspond une unique application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ dont A soit la matrice dans les bases canoniques. Elle est appelée **l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A** .
- En dimension finie, il ne peut y avoir d'isomorphisme si la dimension de l'espace de départ ne coïncide pas avec la dimension de l'espace d'arrivée. Ainsi, l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F est aussi de dimension finie et

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = pn = \dim(E) \times \dim(F).$$

Théorème 17 (image d'un vecteur)

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$. Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u \in E$.

Si on note $\left| \begin{array}{l} \rightarrow U \text{ la matrice colonne des coordonnées de } u \text{ dans la base } \mathcal{B}_E. \\ \rightarrow V \text{ la matrice colonne des coordonnées de } \varphi(u) \text{ dans la base } \mathcal{B}_F. \\ \rightarrow A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi), \text{ la matrice de l'application } \varphi \text{ dans les bases } \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \end{array} \right.$

alors $AU = V.$

Remarques.

- Cette relation s'écrit directement $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)$.
 - Cette formule s'étend par concaténation aux matrices d'une famille de vecteurs.
- Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(u_1, \dots, u_q)$ une famille de vecteurs de E . Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_q)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u_1, \dots, u_q) \quad (\bullet)$$

Théorème 18 (produit matriciel et composition d'applications)

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$. Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_E}(\psi \circ \varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_F}(\psi) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi).$$

Corollaire 19 (invertibilité et isomorphisme)

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ deux bases respectives de E et F . Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i) L'application linéaire φ est bijective.
- ii) La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$ est inversible.

Dans ce cas, $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)^{-1}$.

Exercice 9



Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $\varphi(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. À quelle condition sur a, b, c et d , φ est bijective?
2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer A , la matrice de $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto P(x+1) \in \mathbb{R}_n[x]$ dans la base canonique.
b) Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1} .

CA18

2.2 Compléments : matrices de passage

Définition 20 (cas particulier des matrices de passage)

Soient E , un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, deux bases. La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est appelée **matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$** . On la note $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$. Autrement dit, la j -ème colonne de $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ est la matrice coordonnée du j -ème vecteur de $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque. Pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, deux bases de E , on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\text{id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}.$$

Application. Soit u un vecteur de E dont $U_{\mathcal{B}}$ et $U_{\mathcal{C}}$ sont les matrices colonnes des coordonnées respectivement dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ alors

$$U_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} U_{\mathcal{C}}.$$

Exercice 10



- ♦ Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, 2e_2 + e_3, 3e_3)$. Existe-t-il un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ ayant les mêmes coordonnées dans ces deux bases? On pourra dans un premier temps, traduire matriciellement le problème.

CA24

Remarque. Avec trois bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ de E , on a aussi

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{D}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot P_{\mathcal{C},\mathcal{D}} \quad (\bullet)$$

Exercice 11



♦ On considère la base canonique $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$. On considère les familles de polynômes $\mathcal{C} = (1, x-a, (x-a)^2)$ et $\mathcal{D} = ((x-a)^2, (x-a)(x-b), (x-b)^2)$.

1. a) Justifier que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont deux autres bases de $\mathbb{R}_2[x]$.
b) Calculer $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, $P_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$ et $P_{\mathcal{C},\mathcal{D}}$. Vérifier par le calcul que $P_{\mathcal{B},\mathcal{D}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot P_{\mathcal{C},\mathcal{D}}$.
2. Prouver la relation $(\bullet)$ dans le cas général de trois bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ de E .

CA23

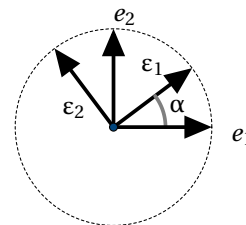
Proposition 21 (inversibilité)

Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E .

La matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ est inversible avec $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} = (P_{\mathcal{C},\mathcal{B}})^{-1}$.

Autrement dit, l'inverse de la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^2$, notons $\mathcal{B}$ la base canonique et la famille $\mathcal{C}$ composée des deux vecteurs $\varepsilon_1 = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ et $\varepsilon_2 = (-\sin(\alpha), \cos(\alpha))$. La matrice inverse s'obtient en remplaçant α par $-\alpha$.



$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Théorème 22 (changement de bases)

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E . Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}.$$

Exercice 12



♦ Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Posons de plus $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ avec

$$u_1 = e_1 - e_3, \quad u_2 = e_1 - 2e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad u_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

1. On admet que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Préciser B , la matrice de φ dans la base $\mathcal{C}$.
2. Expliciter la relation entre A et B . À quelles conditions sur a et b , l'endomorphisme φ est un isomorphisme?

CA25

2.3 Compléments : matrices semblables

Définition et exemples

Définition 23 (matrices semblables)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A est **semblable** à B s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Exercice 13



♦ **Vrai ou faux?** Pour tous $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. A est semblable à A . ✓ ×
2. Si A est semblable à B , alors B est semblable à A . ✓ ×
3. Si A est semblable à B , et B est semblable à C , alors A est semblable à C . ✓ ×
4. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, si A est semblable à B alors A^p est semblable à B^p . ✓ ×
5. Si A est semblable à B et A est inversible alors A^{-1} est semblable à B^{-1} . ✓ ×

CA26

Proposition 24 (endomorphisme et similitude)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, deux matrices semblables et E un espace vectoriel de dimension finie n . Alors A et B représentent les matrices d'un même endomorphisme de E dans des bases différentes. Autrement dit, il existe deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ de E et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \quad \text{et} \quad B = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi).$$

Exemple. Les matrices suivantes sont semblables $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Exercice 14



♦ Justifions l'exemple en considérant φ , l'endomorphisme canoniquement associé à M .

1. a) Prouver l'existence de $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $\text{Vect}(u) = \text{Ker}(\varphi - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$.
De même, on prouve que $v = (4, 3, -2)$, $w = (-2, 3, -2)$ vérifient

$$\text{Vect}(v) = \text{Ker}(\varphi - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3}) \quad \text{et} \quad \text{Vect}(w) = \text{Ker}(\varphi + 4\text{id}_{\mathbb{R}^3}).$$

- b) Vérifier que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrer que M et D sont semblables.

CA27

Lien avec le rang

Rappels.

- **Le rang** d'une matrice A , noté $\text{rg}(A)$, est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Autrement dit, si $A = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_p]$ alors

$$\text{rg}(A) = \dim(\text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_p)).$$

• Propriétés de calculs.

→ Le rang est invariant par transposition, autrement dit

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad \text{rg}(A) = \text{rg}(^tA).$$

→ Le rang est invariant par les opérations élémentaires :

- L'échange de lignes ou de colonnes ($L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$).
- La multiplication d'une ligne ou d'une colonne par $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ($L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_i \leftarrow \lambda C_i$).
- L'addition d'une autre ligne ou colonne ($L_i \leftarrow L_i + L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + C_j$).

- Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et de bases respectives $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$. Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$. On montre que

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(\varphi).$$

Corollaire 25 (invariance du rang par similitude)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A et B sont semblables, **alors** elles ont même rang.

Exercice 15. ♦ La réciproque est fausse. Pouvez-vous donner un contre-exemple?

Définition 26 (trace)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit la **trace** de A , notée $\text{Tr}(A)$, comme la somme des coefficients diagonaux de A . Autrement dit, pour $A = (a_{i,j})_{i,j \in [1,n]}$,

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Exercice 16

◇ Calculer $\text{Tr}(I_n)$, $\text{Tr}(0_n)$, $\text{Tr}(J)$ et $\text{Tr}(K)$ où

$$J = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

CA29

À partir des règles de calculs usuelles, on montre que :

Proposition 27 (forme linéaire)

L'application trace $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire. C'est-à-dire, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) \quad \text{et} \quad \text{Tr}(\lambda A) = \lambda \text{Tr}(A).$$

Vocabulaire. Une forme linéaire est une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exercice 17

1. Donner la dimension de $\text{Ker}(\text{Tr})$. Préciser une base.
2. Expliciter un supplémentaire du noyau.

CA30

Proposition 28 (trace et produit)

Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

Exercice 18

1. Prouver cette proposition.
Si on note $[M]_{i,j}$, le coefficient en position (i, j) de la matrice M , on rappelle que pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^p [A]_{i,k} [B]_{k,j}$.
2. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Tr}((AB)^k) = \text{Tr}((BA)^k)$.
3. a) Écrire un programme **Tr3** qui prend en argument trois matrices A, B, C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et renvoie $\text{Tr}(ABC)$.
b) Tester et commenter avec **Tr3**(A,B,C) et **Tr3**(B,A,C) où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

CA31

Corollaire 29 (invariance par similitude)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible. Alors

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(P^{-1}AP).$$

Remarque. Autrement dit, deux matrices semblables ont même trace. Cette propriété permet de définir la trace d'un endomorphisme (voir exercice 40).

Exercice 19

♠ ♪ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Que dire de A si $\text{Tr}(A^t A) = 0$?
2. Que dire de A et B si pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(AX) = \text{Tr}(BX)$?

CA32

4**Les espaces stables****Définition 30** (espace stable)

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et F une partie de E . On dit que F est une **partie stable** par φ si

$$\forall u \in F, \quad \varphi(u) \in F.$$

Exemple. Soit $\varphi : f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mapsto f' \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Les espaces $\mathbb{R}[x]$ et $\text{Vect}(\cos, \sin)$ sont des parties stables de φ .

Exercice 20

♠ ♪

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que toute somme de s.e.v stables par φ reste stable par φ .
2. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Montrer que le noyau et l'image de ψ sont stables par φ .
3. ♠♠ Donner les sous-espaces stables de l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{R}[x]$.

CA33

Remarques.

- Soit F un s.e.v de E dont $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille génératrice. Alors la partie F est stable par φ si et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\varphi(e_i) \in F$.
- Si F est un s.e.v stable par φ , on peut définir la restriction de φ à F par

$$\varphi|_F : \begin{cases} F & \rightarrow F \\ u & \mapsto \varphi(u). \end{cases}$$

L'application $\varphi|_F$ définit alors un endomorphisme de F .

Exercice 21

♠ Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ injectif et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E stable par φ . Montrer que l'endomorphisme induit par φ sur F est un isomorphisme.

CA34

Exercice 22

♠ Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ et Φ l'application linéaire de $\mathbb{R}[x]$ vers lui-même définie par

$$\Phi(P)(x) = (a + bx)P(x) + x(1 - x)P'(x).$$

1. Justifier qu'il existe un entier n unique tel que $\mathbb{R}_n[x]$ soit stable par Φ .
2. Soit Φ_n l'endomorphisme restreint à $\mathbb{R}_n[x]$. Écrire la matrice A de Φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

CA35



Exercices



Le symbole **TD** indique que l'exercice sera traité en TD. Inutile donc de le chercher en avance.

Révisions en algèbre linéaire

Exercice 23. ♦ 🗝️ Vrai ou faux?

CA36

1. La somme de deux matrices inversibles est inversible.
2. Toute matrice carrée est la somme de deux matrices inversibles.

✓ ×
✓ ×

Exercice 24. ♦♦ 🎵 On pose $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -10 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

CA38

1. 🗝️ En examinant les instructions en Python suivantes, calculer les puissances de A.

Editeur

```
>>> import numpy as np
>>> A = np.array([-4, 0, 3], [0, 2, 0], [-10, 0, 7])
>>> P = np.array([1, 0, 3], [0, 1, 0], [2, 0, 5])
>>> P_inv = np.linalg.inv(P) # calcule l'inverse de la matrice
>>> P_inv
array([[ -5.,  0.,  3.],
       [ 0.,  1.,  0.],
       [ 2.,  0., -1.]])
>>> P_inv @ A @ P # La commande @ effectue le produit matriciel
array([[2., 0., 0.],
       [0., 2., 0.],
       [0., 0., 1.]])
```

2. 🗝️ Peut-on trouver $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$?

Exercice 25. ♦♦ 🗝️ Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que

CA42

$$E = \text{Im } f + \text{Im } g \quad \text{et} \quad E = \text{Ker } f + \text{Ker } g.$$

Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 26. ♦♦ 🎵 Soit φ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. On suppose que φ est de rang 1.

CA44

1. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $\varphi^2 = \lambda\varphi$. Pour rappel φ^2 désigne $\varphi \circ \varphi$.
2. 🗝️ Montrer que si $\lambda \neq 1$, $\varphi - \text{id}_E$ est bijective et exprimer son application réciproque à l'aide de φ .

Exercice 27. ♦ On définit les matrices et l'application

CA43

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \varphi: \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto AMB. \end{cases}$$

1. Vérifier que φ est linéaire.
2. Justifier que φ est une application bijective et exprimer φ^{-1} .
3. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (I_2, A, B, AB)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis déterminer la matrice de φ dans $\mathcal{B}$.
Pour simplifier les calculs, on pourra utiliser ce script Python :

Editeur

```
import numpy as np
A=np.array([[2,1],[5,3]])
print(np.dot(A,A)-5*A+np.eye(2))

B=np.array([[4,1],[7,2]])
print(np.dot(B,B)-6*B+np.eye(2))
```

Console

```
>>> # script executed
[[0. 0.]
 [0. 0.]
 [0. 0.]
 [0. 0.]
```

Exercice 28. ♦♦ Formes linéaires et formule de Simpson

CA45

Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$, posons : $\varphi_1(P) = P(1)$, $\varphi_2(P) = P(0)$, $\varphi_3(P) = P(-1)$ et $\psi(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt$.

- Justifier que φ_1 et ψ sont des formes linéaires de $\mathbb{R}_2[x]$. On admet que φ_2 et φ_3 sont elles aussi des formes linéaires.
- Justifier que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R})$.
- a) Justifier l'existence de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$,

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = \lambda_1 P(1) + \lambda_2 P(0) + \lambda_3 P(-1).$$

b) Préciser les valeurs de λ_1, λ_2 et λ_3 .

- À l'aide d'une bijection affine, en déduire la *formule de Simpson* : pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[x]$

$$\int_a^b P(t) dt = \frac{b-a}{6} \left(P(a) + 4P\left(\frac{a+b}{2}\right) + P(b) \right).$$

Exercice 29. ♦♦ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère, pour $k \in [0, n]$, les polynômes P_k définis par $P_k(x) = (1-x)^k x^{n-k}$.

CA47

- Préciser le degré de P_k .
- Soit $k \in [0, n]$. Simplifier $\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} P_i$.
- En déduire que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
- a) Montrer que pour $0 \leq i \leq n$, $\sum_{k=i}^n \binom{k}{i} = \binom{n+1}{i+1}$.

b) Déterminer les coordonnées du polynôme $Q(x) = \sum_{j=0}^n x^j$ dans la base $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$.

TD Exercice 30. ♦♦♦

d'après les oraux ESCP 2001 # CA49

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n ($n \geq 2$). On note S (respectivement A) le sous-espace vectoriel de E formé des matrices symétriques (respectivement antisymétriques).

Soient α, β deux réels donnés non nuls, et f l'application définie sur E par, pour tout $M \in E$: $f(M) = \alpha M + \beta {}^t M$

- Montrer que $E = S \oplus A$.
- Exprimer f à l'aide de p et q , où $q = \text{id}_E - p$, quand p désigne le projecteur sur S de direction A .
- Exprimer $f^2 = f \circ f$ en fonction de f et de id_E .
- Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un automorphisme de E . Exprimer alors f^{-1} en fonction de f et de id_E .
- Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f^k en fonction de p, q, α, β . En déduire la puissance k -ième de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha + \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + \beta \end{bmatrix}.$$

Exercice 31. ♦♦ Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que

CA51

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f, g les applications linéaires canoniquement associées à A et B .

- Vérifier que $g(e_2)$ et $g(e_3)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. Notons $\mathcal{C}$ cette base.
- Expliciter la matrice de $g \circ f$ dans cette nouvelle base.
- Calculer BA .

Exercice 32. ♦♦♦ Égalité de Bézout

CA46

Soient $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_q$ des réels deux à deux distincts. On considère les polynômes

$$A(x) = \prod_{i=1}^p (x - a_i) \quad \text{et} \quad B(x) = \prod_{i=1}^q (x - b_i).$$

On note $n = p + q - 1$ et $E = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n . On introduit de plus,

$$F_A = \{P \in E \mid A \text{ divise } P\} \quad \text{et} \quad F_B = \{P \in E \mid B \text{ divise } P\}.$$

- Montrer que F_A et F_B sont des sous-espaces vectoriels de E . Préciser les dimensions de F_A et F_B .
- Vérifier que $E = F_A \oplus F_B$.
- En déduire qu'il existe deux polynômes U et V tels que $UA + VB = 1$.

Le cas nilpotent

Exercice 33. ♦♦ Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose que, pour tout $u \in E$, il existe un entier $n_u \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n_u}(u) = 0_E$. Montrer qu'il existe un entier n tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

CA54

TD Exercice 34. ♦♦♦  **Commutant d'une matrice nilpotente**

CA59

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$.

1.  Montrer que la matrice A est semblable à la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.  En déduire la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{C}_B = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MB \right\}$ et celle de $\mathcal{C}_A$.

TD Exercice 35. ♦♦  **Variante sur les endomorphismes nilpotents**

CA52

Soient E un espace vectoriel de dimension 4 et φ un endomorphisme de E tel que $\varphi^5 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Justifier que $\varphi^4 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. Dans la suite, on suppose de plus que $\varphi^3 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Peut-on avoir $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \varphi^2$? Même question avec $\text{Ker } \varphi^2 = \text{Ker } \varphi^3$.
3. En déduire que $\dim \text{Ker } \varphi^3 = 3$.
4. Conclure en montrant qu'il existe une base dans laquelle les coefficients de la matrice de φ dans cette base sont nuls partout, sauf éventuellement sur la diagonale située immédiatement sous la diagonale principale.

Exercice 36. ♦♦ Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et φ un endomorphisme de E tel que :

CA53

$$\exists p \in \mathbb{N}, \quad \varphi^p = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad \varphi^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

On dit que φ est un endomorphisme nilpotent d'indice p .

1. Montrer que $\text{Ker}(\varphi) \subset \text{Ker}(\varphi^2) \subset \dots \subset \text{Ker}(\varphi^p) = E$.
Vérifier que toutes ces inclusions sont strictes.
2. Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\text{Ker}(\varphi)$. On la complète en une base $\mathcal{B}_2$ de $\text{Ker}(\varphi^2)$. On continue le procédé en complétant, pour tout entier $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ une base $\mathcal{B}_k$ de $\text{Ker}(\varphi^k)$ en une base $\mathcal{B}_{k+1}$ de $\text{Ker}(\varphi^{k+1})$.
On trouve ainsi une succession de bases $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \dots \subset \mathcal{B}_p$, où $\mathcal{B}_p$ est une base de E .
Montrer que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}_p$ est triangulaire par blocs, avec une diagonale nulle.
3. En déduire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_n$, alors A est de trace nulle.
Que dire de $\text{Tr}(A^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$?

Compléments de deuxième année

TD Exercice 37. ♦♦  **Matrice de Vandermonde - Lien avec les polynômes de Lagrange**

CA61

Soit $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On pose

$$V_a = \begin{bmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

1. Notons $C_0, C_1, \dots, C_n$ les $n+1$ colonnes de V_a . À quelle condition sur les réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ les colonnes de V_a forment une famille libre? En déduire une condition pour l'inversibilité de V_a .

On suppose cette condition vérifiée dans la suite.

Notons $\mathcal{B} = (1, x, \dots, x^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ et $(e_0, \dots, e_n)$, la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. a) Montrer que l'application suivante est un isomorphisme

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[x] & \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto (P(a_0), \dots, P(a_n)). \end{cases}$$

- b) Pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on définit le polynôme $L_i = \varphi^{-1}(e_i)$. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ et que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x], \quad P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i.$$

c) Préciser $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{-1}$ où $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ désigne la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

CA55

TD Exercice 38. ♦ Soient E un espace vectoriel et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(\varphi)$, $\text{Ker}(\varphi - \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(\varphi + \text{id}_E)$ sont en somme directe.

Exercice 39. ♦ Soit A un élément donné de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non colinéaire à I_2 . On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont A est la matrice associée dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$. On pose : $w = e_1 + e_2$. # CA57

1. En considérant les trois vecteurs e_1, e_2 et w , montrer qu'il existe au moins un élément non nul x de $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $(x, \varphi(x))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la matrice M associée à φ dans la base $(x, \varphi(x))$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$$

où a et b sont deux réels, indépendants de la base $(x, \varphi(x))$, que l'on exprimera en fonction de $\det(A)$ et $\text{Tr}(A)$.
On pourra admettre que le déterminant est un invariant de similitude.

3. En déduire que la matrice A est semblable à sa transposée tA .

CA58

TD Exercice 40. ♦ ♪ Trace d'un endomorphisme

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E . On définit la trace de φ par

$$\text{Tr}(\varphi) = \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)).$$

1. Justifier que la trace de φ ne dépend pas du choix de la base.
2. Exemples
 - a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la trace de φ où $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto P - P' \in \mathbb{R}_n[x]$.
 - b) On pose $\varphi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - i) Justifier que le sous-espace des matrices symétriques de taille (n, n) (noté $\mathcal{S}_n$) et celui des matrices antisymétriques (noté $\mathcal{A}_n$) sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Préciser les dimensions.
 - ii) En déduire la trace de φ .
 - c) Soit p un projecteur de E . Vérifier que la trace de p est égale à son rang.

CA72

TD Exercice 41. ♦♦ ♪ On définit l'application φ par

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(X) = X - \text{Tr}(X) \cdot A,$$

où A désigne une matrice fixée non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que φ n'est pas injectif si et seulement si $\text{Tr}(A) = 1$.
2. Lorsque $\text{Tr}(A) = 1$, calculer $\text{Tr}(\varphi(X))$.
3. Lorsque $\text{Tr}(A) = 1$, montrer que φ est un projecteur. On déterminera par rapport à quels espaces.
4. Lorsque $\text{Tr}(A) = 1$, donner $\text{Tr}(\varphi)$.

CA50

Exercice 42. ♦♦ Soit φ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de rang 1.

1. On suppose que $\text{Im}(\varphi) \cap \text{Ker}(\varphi) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Justifier que $\text{Im}(\varphi) \subseteq \text{Ker}(\varphi)$, puis qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle φ est représenté par la matrice :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

2. On suppose que $\text{Im}(\varphi) \cap \text{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle φ est représenté par la matrice :

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}^*.$$

3. En déduire que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont la même trace.
4. Bonus cube. À quelle condition sur sa trace une matrice de rang 1 est diagonalisable?

Valeurs propres et vecteurs propres

Une idée qui ne peut servir qu'une seule fois est une astuce. Sinon, elle devient une méthode.

GEORGE PÓLYA

Mathématicien hongrois, américain et suisse (1887-1985).

1

Rappels : polynômes d'endomorphismes et de matrices

Rappelons que pour un endomorphisme φ de E , les applications $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$, $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi \dots$ sont parfaitement définies et linéaires. Les **puissances** de φ sont les applications :

$$\varphi^0 = \text{id}_E \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{n \text{ compositions}}.$$

Remarque. Comme pour les matrices, il existe une version de la formule du binôme de Newton dans le cas des endomorphismes. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E)$ qui *commutent* ($\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$). Alors pour tout entier naturel p ,

$$(\varphi + \psi)^p = (\varphi + \psi) \circ (\varphi + \psi) \circ \dots \circ (\varphi + \psi) = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \varphi^i \circ \psi^{p-i}.$$

Définition 1 (polynôme de matrice, d'endomorphisme)

Soient $P(x) = \sum_{i=0}^p a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

• Le **polynôme de matrice** $P(A)$ est défini par $P(A) = \sum_{i=0}^p a_i A^i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Un polynôme P est **annulateur** de A si $P(A) = 0_n$.

• Le **polynôme d'endomorphisme** $P(\varphi)$ est défini par $P(\varphi) = \sum_{i=0}^p a_i \varphi^i \in \mathcal{L}(E)$.

Un polynôme P est **annulateur** de φ si $P(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 1



✦ 🎵 🧠 Existence d'un polynôme annulateur

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En étudiant la famille $(I_n, A, \dots, A^p)$ pour un entier p bien choisi, montrer que A admet un polynôme annulateur.

Règles de calcul

On démontre que pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $(\lambda P)(A) = \lambda P(A)$ et $(P + Q)(A) = P(A) + Q(A)$.

Retenons également la propriété de commutativité : $(PQ)(A) = P(A)Q(A) = Q(A)P(A) = (QP)(A)$.

On a de même avec des endomorphismes

$$(\lambda P)(\varphi) = \lambda P(\varphi), \quad (P + Q)(\varphi) = P(\varphi) + Q(\varphi) \quad \text{et} \quad (PQ)(\varphi) = P(\varphi) \circ Q(\varphi) = Q(\varphi) \circ P(\varphi) = (QP)(\varphi).$$

VP1

Exercice 2



Les questions sont indépendantes.

1. Soient A, B deux matrices carrées semblables.
Montrer que tout polynôme annulateur de A est annulateur de B .
2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[x]$ annulateur de A .
Montrer que si $P(0) \neq 0$ alors A est inversible.

#VP3

Proposition 2 (polynôme d'endomorphisme, de matrice)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie dont $\mathcal{B}$ est une base et φ un endomorphisme de E .
Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)^k = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^k).$$

Plus généralement, pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$,

$$P(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(\varphi)).$$

2

Valeurs propres, vecteurs propres, cas matriciel

2.1 Premières définitions

Définition 3 (valeur propre, vecteur propre)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On dit que λ est une **valeur propre** de A et que X est un **vecteur propre** pour A associé à la valeur propre λ si

$$AX = \lambda X \quad \text{et} \quad X \neq 0_{n,1}.$$

Exemple. Posons

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

de sorte que

$$AX = 0 \cdot X, \quad AY = Y \quad \text{et} \quad AZ = -2Z.$$

Comme X, Y et Z sont des matrices colonnes non nulles, $0, 1$ et -2 sont valeurs propres de A .



Attention. Un vecteur propre est toujours non nul.

Définition 4 (spectre)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le **spectre** de A , noté $\text{Sp}(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A .

Exemple. En reprenant l'exemple précédent, $\{0; 1; -2\} \subset \text{Sp}(A)$.

Python. Voici le code pour obtenir une approximation des valeurs propres.

Editeur

```
import numpy.linalg as al
# On importe la sous-bibliothèque
    linalg
A=np.array([[1,3,0],[0,-2,0],[-1,-2,0]])
# On définit la matrice A
print(al.eigvals(A))
```

Console

```
>>> # script executed
[ 0.  1. -2.]
```

Selon ce calcul, $-2, 0$ et 1 sont toutes les valeurs propres de la matrice A . On conjecture donc que $\text{Sp}(A) = \{-2; 0; 1\}$.

2.2 Caractérisations des valeurs propres

Théorème 5 (caractérisation avec l'inversibilité)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les énoncés suivants sont équivalents.

- i) Le réel λ est une valeur propre de A .
- ii) La matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Autrement dit, $\text{Sp}(A)$ est l'ensemble des réels λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Remarque. En particulier, 0 est valeur propre si et seulement si, la matrice A n'est pas inversible.

Corollaire 6 (matrices triangulaires)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si** A est une matrice triangulaire,
alors les valeurs propres de A sont les coefficients diagonaux de A .



Attention. C'est grossièrement faux si la matrice n'est pas triangulaire.

On pourra par exemple, vérifier que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ n'admet aucune valeur propre réelle.

2.3 Les sous-espaces propres $E_\lambda(A)$

Définition 7 ($E_\lambda(A)$)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout réel λ , on pose

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}.$$

En remarquant que $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$, on en déduit que :

Proposition 8 (structure de $E_\lambda(A)$)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- $E_\lambda(A) \neq \{0_{n,1}\}$ si et seulement si λ est une valeur propre de A .

Remarque. La formule du rang donne alors $\dim(E_\lambda(A)) + \text{rg}(A - \lambda I_n) = n$.

Vocabulaire. Si $E_\lambda(A) \neq \{0_{n,1}\}$ alors on parle de **l'espace propre associé à la valeur propre λ** . Dans ce cas,

$$1 \leq \dim(E_\lambda(A)) \leq n.$$

Exercice 3



◆ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que si A et B sont semblables alors $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B)$ et les sous-espaces propres de A et B associés à la même valeur propre ont même dimension.
2. 🎵 **Transformation affine du spectre**
Donner le lien entre le spectre de A et celui de $\alpha A + \beta I_n$?

Exemple. Le cas diagonal

Si A est une matrice diagonale, alors les valeurs propres de A sont exactement les coefficients diagonaux de A et pour $\lambda \in \text{Sp}(A)$, la dimension de $E_\lambda(A)$ est égale au nombre de fois où λ apparaît sur la diagonale de A .

Exercice 4



♦♦ ♪ **Vrai ou Faux?** Pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

- | | | |
|---|---|---|
| 1. Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ alors $\lambda^2 \in \text{Sp}(A^2)$. | ✓ | × |
| 2. Si $\lambda^2 \in \text{Sp}(A^2)$ alors $\lambda \in \text{Sp}(A)$. | ✓ | × |
| 3. $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(^tA)$. | ✓ | × |
| 4. $E_\lambda(A) = E_\lambda(^tA)$. | ✓ | × |
| 5. $\dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_\lambda(^tA))$. | ✓ | × |
| 6. Si A est inversible, $\lambda \in \text{Sp}(A)$ ssi $\lambda^{-1} \in \text{Sp}(A^{-1})$. | ✓ | × |

#VP5

3

Valeurs propres, vecteurs propres, cas des endomorphismes

3.1 Définitions et exemples

Reprenons et adaptons les définitions au cas des endomorphismes d'un espace vectoriel E .

Définition 9 (valeur propre, vecteur propre, spectre)

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$. On dit que λ est une **valeur propre** de φ et que u est un **vecteur propre** pour φ associé à la valeur propre λ si

$$\varphi(u) = \lambda u \quad \text{et} \quad u \neq 0_E.$$

- L'ensemble des valeurs propres de φ est le **spectre** de φ , il est noté $\text{Sp}(\varphi)$.

Exemple. Posons $u = (1, 0, -2)$, $v = (0, 0, 1)$, $w = (1, 1, -2)$ et

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (x + 2y, 3y, 2x - 4y + 2z) \end{cases}$$

On a $\varphi(u) = u$, $\varphi(v) = 2v$ et $\varphi(w) = 3w$. Comme u , v et w sont non nuls, 1, 2 et 3 sont trois valeurs propres de φ . C'est-à-dire, $\{1; 2; 3\} \subset \text{Sp}(\varphi)$.

Remarque. Le vecteur u (non nul) est un vecteur propre de φ si et seulement si la droite vectorielle $\text{Vect}(u)$ est stable par φ .

Exercice 5



♦ Exemples

Les questions sont indépendantes.

$$\text{On pose} \quad \varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[x] & \rightarrow \mathbb{R}_n[x] \\ P & \mapsto P' + 2P \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto f'. \end{cases}$$

1. Étudier les valeurs propres de l'endomorphisme φ .
2. Montrer que tout réel est valeur propre de ψ .

#VP7

Définition-proposition 10 ($E_\lambda(\varphi)$)

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit le sous-espace vectoriel $E_\lambda(\varphi)$ de E par

$$E_\lambda(\varphi) = \{u \in E \mid \varphi(u) = \lambda u\} = \text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}_E).$$

Remarques.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda(\varphi)$ est un espace stable par φ .
- $E_\lambda(\varphi)$ est bien un s.e.v. de E puisque c'est le noyau d'une application linéaire.
- Si λ est une valeur propre, on dit que $E_\lambda(\varphi)$ est l'**espace propre associé à la valeur propre** λ .

3.2 Précision en dimension finie

Théorème 11 (lien matrice et endomorphisme)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, $u \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{B}$, une base de E .

- Si on note**
- U la matrice colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.
 - $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$, la matrice de l'endomorphisme φ dans la base $\mathcal{B}$.

Alors, u est vecteur propre de l'endomorphisme φ pour la valeur propre λ si et seulement si U est vecteur propre de la matrice A pour la valeur propre λ .

Application. Soient A et B deux matrices semblables. Elles représentent le même endomorphisme φ dans des bases différentes. On retrouve alors $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(\varphi) = \text{Sp}(B)$.

Proposition 12 (caractérisations en dimension finie)

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence entre les énoncés suivants.

- i) Le réel λ est valeur propre de φ .
- ii) L'endomorphisme $\varphi - \lambda \text{id}_E$ n'est pas injectif.
- iii) L'endomorphisme $\varphi - \lambda \text{id}_E$ n'est pas surjectif.
- iv) $\text{rg}(\varphi - \lambda \text{id}_E) < \dim(E)$.

3.3 Précisions pour des endomorphismes remarquables

Les homothéties

Pour rappel, une homothétie de E de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est l'application $\lambda \text{id}_E : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ u & \mapsto & \lambda \cdot u. \end{cases}$

- Le polynôme P d'expression $P(x) = x - \lambda$ est un polynôme annulateur de l'homothétie de rapport λ .
- Tout vecteur non nul de E est vecteur propre pour la valeur propre λ .

Exercice 6



♦♦♦ 🎵 La réciproque

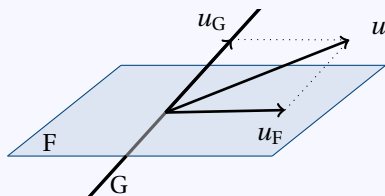
Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ non nul tel que tout vecteur non nul est vecteur propre de φ .
Montrer que φ est une homothétie.

VP8

Les projecteurs

Définition 13 (projecteur)

Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.



Ainsi, pour tout $u \in E$, il existe une unique décomposition $u = u_F + u_G$ où $(u_F, u_G) \in F \times G$. On pose

$$p : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ u & \mapsto & u_F. \end{cases}$$

Cette application est linéaire, elle est appelée le **projecteur** sur F parallèlement à G .

Remarque. On montre que p est un projecteur sur $F = \text{Im}(p)$ parallèlement à $G = \text{Ker}(p)$. En particulier, le noyau et l'image d'un projecteur sont supplémentaires dans E .

$$\text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p) = E.$$

Exercice 7



1. Savez-vous prouver cette remarque?
2. Vérifier que $\text{id}_E - p$ est un projecteur. Préciser ses éléments caractéristiques.

#VP9

Théorème 14 (caractérisation d'un projecteur)

Soit $p : E \rightarrow E$ une application. Les énoncés suivants sont équivalents.

- i) p est un projecteur.
- ii) p est linéaire et $p \circ p = p$.

Spectre d'un projecteur

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E de sorte que p soit le projecteur sur F parallèlement à G . Afin que F et G ne soient pas réduits à $\{0_E\}$, on suppose dans la suite que $p \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $p \neq \text{id}_E$.

- On montre que $\text{Sp}(p) = \{0; 1\}$.
- Le polynôme d'expression $x^2 - x = x(x - 1)$ est un polynôme annulateur de p . Notons que les valeurs propres de p sont des racines du polynôme.
- D'après les résultats précédents sur les projecteurs, $F = \text{Im}(p) = E_1(p)$ et $G = \text{Ker}(p) = E_0(p)$. On en déduit que E se décompose suivant les espaces propres de p

$$E = F \oplus G = E_1(p) \oplus E_0(p).$$

Exemple. Soient E , un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . Pour tout $u \in E$, il existe un unique couple $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$. On définit alors la *symétrie* par rapport à F parallèlement à G comme l'application linéaire :

$$s : u \in E \mapsto u_F - u_G \in E.$$

Exercice 8



Les symétries

1. Faire un dessin similaire au cas des projecteurs pour illustrer la situation.
2. Préciser $s \circ s$. En déduire un polynôme annulateur.
3. On suppose que $s \neq \pm \text{id}_E$. Étudier les valeurs propres de s et préciser les espaces propres à l'aide de F et G .
4. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G . Vérifier que $s = 2p - \text{id}_E$. Retrouver les résultats de la question 3.

#VP11

4

Lien avec les polynômes et conséquences

4.1 Polynômes et valeurs propres

Théorème 15 (polynômes et valeurs propres)

Soient $Q \in \mathbb{R}[x]$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

Si u est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ ,
alors $Q(\varphi)(u) = Q(\lambda) \cdot u$.

Corollaire 16 (valeurs propres et racines)

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{R}[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si** | $\rightarrow \lambda$ est valeur propre de φ .
 | $\rightarrow P$ est un polynôme annulateur de φ .

Alors λ est une racine du polynôme P .

Remarque. On a des énoncés équivalents avec les matrices.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $Q \in \mathbb{R}[x]$ et X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ , alors $Q(A)X = Q(\lambda)X$.
 De plus, si Q est annulateur de A , λ est une racine de Q .

Exercice 9

◆ Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^t M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner un polynôme annulateur de φ de degré 2.
2. En déduire les valeurs propres de φ .

#VP13

4.2 Conséquences**Théorème 17** (somme directe des espaces propres)

Soit φ un endomorphisme d'un espace vectoriel E .

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ désignent p valeurs propres deux à deux distinctes de φ ,

alors la somme $\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(\varphi)$ est directe.

Une première idée de la preuve est la récurrence. Une seconde, plus abstraite, utilise les *polynômes de Lagrange*. On rappelle l'énoncé.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ des réels deux à deux distincts, il existe p polynômes, notés L_i , tels que

$$\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

◆◆ **Existence des polynômes de Lagrange**

1. Prouver cet énoncé avec l'application linéaire

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_{p-1}[x] & \rightarrow \mathbb{R}^p \\ P & \mapsto (P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_p)). \end{cases}$$

2. a) *Exemples*

On suppose dans cette question uniquement que $p = 3$ et $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 1$.
 Préciser les trois polynômes de Lagrange.

- b) Donner l'expression de L_i dans le cas général.

3. Justifier que pour tout $P \in \mathbb{R}_{p-1}[x]$, $P(x) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i) L_i$.

Exercice 10

#VP14

Corollaire 18 (en dimension finie)

Si on suppose de plus que E est de dimension finie, alors

$$\sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(\varphi)) \leq \dim(E).$$

Corollaire 19 (famille libre de vecteurs propres)

Soit φ un endomorphisme de E .

Si les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ sont des vecteurs propres de φ associés à des valeurs propres distinctes,
alors la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille libre de E .

Corollaire 20 (majoration du nombre de valeurs propres)

Soit φ un endomorphisme de E de dimension finie. Alors le nombre de valeurs propres de φ est inférieur à la dimension de l'espace :

$$\text{Card}(\text{Sp}(\varphi)) \leq \dim(E).$$

Remarque. Matriciellement, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{Card}(\text{Sp}(A)) \leq n$.

5**Recherche de valeurs propres et vecteurs propres**

Cette section détaille les différentes méthodes pour calculer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice. Elles sont essentiellement basées sur le pivot de Gauss.

5.1 Recherche des valeurs propres

Rappelons que :

- Le réel λ est valeur propre de A si et seulement si $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$.
- Le rang est invariant par transposition et opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

Exemple. On pose $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Procédons par opérations élémentaires pour se ramener à un système triangulaire.

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{bmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} && L_3 \leftrightarrow L_1 \\ &= \text{rg} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1-\lambda \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -\lambda & 2 & -1 \end{bmatrix} && \begin{aligned} L_3 &\leftarrow 2L_3 - \lambda L_1 \\ L_2 &\leftarrow 2L_2 + 3L_1 \end{aligned} \\ &= \text{rg} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & 2-2\lambda & 3-3\lambda \\ 0 & 4-2\lambda & \lambda^2 - \lambda - 2 \end{bmatrix} && \begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2/2 \\ &(\text{et factorisation}) \end{aligned} \\ &= \text{rg} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 3-3\lambda \\ 0 & 2-\lambda & (\lambda+1)(\lambda-2) \end{bmatrix} && L_2 \leftrightarrow L_3 \\ &= \text{rg} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & (\lambda+1)(\lambda-2) \\ 0 & 1-\lambda & 3(1-\lambda) \end{bmatrix} && C_2 \leftarrow 3C_2 - C_3 \\ \text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{bmatrix} -2 & * & * \\ 0 & (-2+\lambda)(\lambda+4) & * \\ 0 & 0 & 3(1-\lambda) \end{bmatrix} && \begin{aligned} &\text{Il est inutile de calculer} \\ &\text{les coefficients } *. \end{aligned} \end{aligned}$$

La matrice obtenue est triangulaire. Ainsi λ est valeur propre si et seulement si $\text{rg}(A - \lambda I_3) < 3$. C'est équivalent à

$$(\lambda - 2)(\lambda + 4) = 0 \quad \text{ou} \quad 3(1 - \lambda) = 0.$$

Finalement

$$\text{Sp}(A) = \{-4; 1; 2\}.$$

Remarques.

- Noter bien l'échange $L_3 \leftrightarrow L_1$ au début du pivot de Gauss. C'est particulièrement utile pour avoir un pivot qui ne dépend pas de λ .
- Si on dispose d'un polynôme annulateur de petit degré, on peut se limiter à regarder le rang sur les quelques racines du polynôme pour déterminer les valeurs propres.

5.2 Recherche des vecteurs propres

Expliquons maintenant comment calculer les vecteurs propres de la matrice A connaissant les valeurs propres.

- Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Raisonnons par équivalences.

$$\begin{aligned}
 X \in E_1(A) &\iff \\
 AX = X &\iff \begin{cases} 2y - z = x \\ 3x - 2y = y \\ -2x + 2y + z = z \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \quad L_3 = -2L_2 \\
 &\iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases} \\
 &\iff X = \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \iff X \in \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Finalement
$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Déterminons les autres sous-espaces propres.

- De même
$$E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3/4 \\ -1/2 \end{bmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_{-4}(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Exercice 11



♦ Soient $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ et $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. On admet que $P(A) = 0_3$.

1. Donner les racines de P . Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de A ?
2. Déterminer les valeurs propres de A et, pour chaque valeur propre, déterminer une base du sous-espace propre associé.

#VP15

5.3 Cas particulier de la dimension 2

Proposition 21 (lien avec le déterminant)

Soient $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \iff \det(A - \lambda I_2) = 0.$$

Exercice 12



♦ Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$.

1. Donner, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, le nombre de valeurs propres réelles de R_α .
2. Retrouver le résultat précédent sachant que r_α , l'endomorphisme canoniquement associé à R_α , est une rotation de centre l'origine et d'angle α .

#VP16



Exercices



Révisions, puissances et polynômes de matrices et d'endomorphismes

Exercice 13. ♦ ♡ Soient φ, ψ deux endomorphismes nilpotents de E .

Montrer que si φ, ψ commutent, alors la somme $\varphi + \psi$ est nilpotente.

Un endomorphisme φ est dit nilpotent s'il existe un entier p tel que $\varphi^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (composée p -ième).

VP21

TD Exercice 14. ♦♦ ♡♫ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $d_1, \dots, d_n$, des réels deux à deux distincts. Posons $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Montrer que la famille $(D^k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{D}_n$ des matrices diagonales.

VP17

Exercice 15. ♦♦ Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ dont un polynôme annulateur a pour expression $P(x) = x^2 + x - 2$.

VP18

- Justifier que φ est un isomorphisme et exprimer φ^{-1} en fonction de φ et id_E .
- ♡ Démontrer l'existence de deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi^n = a_n \varphi + b_n \text{id}_E$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Énoncer la division euclidienne du polynôme x^n par $x^2 + x - 2$. Retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 16. ♦♦♦ ♫ **Commutant d'un endomorphisme cyclique, matrice compagnon**

VP24

Soit φ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n . On note $\mathcal{C}(\varphi)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec φ et $\mathbb{R}(\varphi)$ l'ensemble des polynômes en φ . Dit autrement

$$\mathcal{C}(\varphi) = \{\psi \in \mathcal{L}(E) \mid \psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi\} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}(\varphi) = \{P(\varphi) \mid P \in \mathbb{R}[x]\}.$$

Enfin, on dit qu'un endomorphisme h de E est cyclique s'il existe un vecteur $u_0 \in E$ tel que la famille $(u_0, h(u_0), \dots, h^{n-1}(u_0))$ soit une base de E .

- Montrer que $\mathcal{C}(\varphi)$ et $\mathbb{R}(\varphi)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$, puis que $\mathbb{R}(\varphi) \subset \mathcal{C}(\varphi)$.
- Montrer que φ est cyclique si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E et des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ tels que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Pour les questions suivantes, on suppose que l'endomorphisme φ est cyclique, et on fixe un vecteur $u_0 \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = (u_0, \varphi(u_0), \dots, \varphi^{n-1}(u_0))$ soit une base de E .

- Soit $P(\varphi) = \varphi^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \varphi^k$. Montrer que $P(\varphi) = 0$.

Indication : remarquer que $P(\varphi)(u_0) = 0$, puis montrer que $P(\varphi)(\varphi^\ell(u_0)) = 0$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$.

- a) Montrer que la famille $(\text{id}_E, \varphi, \dots, \varphi^{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}(\varphi)$.

Indication : utiliser la division euclidienne.

- b) En déduire que $\mathcal{C}(\varphi) = \mathbb{R}(\varphi)$, puis la dimension du commutant $\mathcal{C}(\varphi)$.

Indication : si $f \in \mathcal{C}(\varphi)$, exprimer $f(u_0)$ dans la base $\mathcal{B}$, puis calculer $f(\varphi^i(u_0))$ pour $i \in \mathbb{N}$.

Valeurs propres, vecteurs propres

TD Exercice 17. ♦ ♫ **Un exemple détaillé : la matrice Attila**

VP27

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Notons $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1 et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.

- a) Préciser le rang de J . En déduire que 0 est valeur propre dont on précisera la dimension de l'espace propre associé. Préciser une base $\mathcal{C}$ de l'espace propre associé à la valeur propre 0.
b) Calculer JX . Que peut-on en déduire?
- En déduire que J ne possède que deux valeurs propres.
- Montrer que J est semblable à une matrice diagonale dont on précisera les coefficients diagonaux.
- Conclure en donnant tous les polynômes annulateurs de J .

Exercice 18. ♦ Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) par

VP29

$$\begin{cases} \varphi(e_1) &= 6e_1 - 4e_2 + 4e_3 \\ \varphi(e_2) &= e_1 + 2e_2 + 2e_3 \\ \varphi(e_3) &= -e_1 + 2e_2 + 2e_3. \end{cases}$$

Déterminer le sous-espace propre de φ associé à la valeur propre 4.

Exercice 19. ♦♦ Exemple d'une matrice de rang 2

d'après ESCP 2001 # VP38

Soient n un entier naturel tel que $n \geq 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & 1 & \vdots & & \vdots \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

et φ l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Déterminer une base du noyau de φ et une base de l'image de φ .
2. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de A .

TD Exercice 20. ♦

adapté de l'oral HEC 2015 voie E # VP53

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n u_i = 2$.

On considère l'endomorphisme f défini sur $\mathbb{R}^n$ par

$$f(x) = x - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) u \quad \text{où } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

1. Calculer $f \circ f$. L'endomorphisme f est-il bijectif? Quelles sont les valeurs propres possibles de f ?
2. a) Déterminer les valeurs propres de f .
b) Quels sont les sous-espaces propres de f ?
c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable, c'est-à-dire, est-ce qu'il existe une base de vecteurs propres de f ?
3. a) Écrire la matrice M de f dans la base canonique.
b) Montrer que les matrices suivantes sont semblables.

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_1 & \cdots & u_1 \\ u_2 & u_2 & \cdots & u_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n & u_n & \cdots & u_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

Exercice 21. ♦ 🎵

D'après EDHEC 2019 # VP30

On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.
b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).
c) En Python, la commande `linalg.matrix_rank(M)` de la bibliothèque `numpy` renvoie le rang de la matrice M . On a saisi

Python a répondu

Editeur

```
import numpy as np
A = np.array([[1, 0, 0], [-2, 3, -2], [-1, 1, 0]])
r1=np.linalg.matrix_rank(A-np.eye(3))
r2=np.linalg.matrix_rank(A-2*np.eye(3))
print('r1=',r1,'r2=',r2)
```

Console

```
>>> # script executed
r1= 1 r2= 2
```

Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et à la dimension des sous-espaces propres associés?

- d) Donner une base de chacun des noyaux $\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id})$ et $\text{Ker}(f - \lambda_2 \text{id})$. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.
2. a) Justifier qu'il existe une base (u_1, v_1, v_2) de $\mathbb{R}^3$, où (u_1, v_1) est une base de $\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id})$ et (v_2) une base de $\text{Ker}(f - \lambda_2 \text{id})$. On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petites possibles, la dernière composante de u_1 et la première de v_1 étant nulles.
- b) On note $x = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, en fonction de a, b et c les coordonnées de x dans la base (u_1, v_1, v_2) .

Exercice 22. ♦ 🎵 Matrices stochastiques

VP31

Une matrice carrée $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est dite stochastique si elle vérifie les deux conditions :

- Pour tout $i \in [1, n]$, $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$.
 - Tous les coefficients de la matrice P sont positifs ou nuls.
- 🔊 Traduire la condition i) en termes de vecteur propre.
On pourra poser $X = {}^t(1, \dots, 1)$.
 - Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques est une partie convexe stable par produit.
Une partie A est convexe si pour tous $a, b \in A$, tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda a + (1 - \lambda)b \in A$.
Une partie A est stable par produit si pour tous $a, b \in A$, $ab \in A$.
 - Démontrer que les valeurs propres réelles d'une matrice stochastique sont comprises entre -1 et 1 .

» Pour aller plus loin, on pourra consulter le sujet EM Lyon 2010 ECS, problème I.

TD Exercice 23. ♦ 🎵 Crochet de Lie et nilpotence

VP33

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$.

- 🔊 Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^k B - BA^k = kA^k$.
- On considère

$$\varphi_B : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto MB - BM. \end{cases}$$

Vérifier que φ_B est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Traduire la question 1 en terme de vecteur propre et valeur propre.
- 🔊 En déduire l'existence d'un entier k non nul tel que $A^k = 0_n$.

Exercice 24. ♦♦ 🎵 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note φ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par $\varphi(P) = (x-1)P'(x)$.

VP34

- Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$. Préciser sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
- 🔊 En déduire le spectre de φ .
- Soit P un vecteur propre de φ associé à une valeur propre λ non nulle.
 - Justifier que 1 est une racine de P .
 - En étudiant la multiplicité de 1 en tant que racine de P , exprimer P en fonction de λ .
- Conclure en donnant tous les espaces propres de φ .

TD Exercice 25. ♦♦ 🎵 Polynôme annulateur minimal

Questions sans préparation HEC 2015 # VP35

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et f un endomorphisme de E .

- 🔊 Établir l'existence d'un polynôme P non nul tel que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- 🔊 Soit Q un polynôme tel que $Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et de degré minimal parmi les polynômes non nuls annulateurs de f .
Montrer que toute racine de Q est valeur propre de f .

Exercice 26. ♦♦ 🎵 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

VP36

Montrer que λ est valeur propre de AB si et seulement si λ est valeur propre de BA .

Exercice 27. ♦♦♦

D'après les oraux HEC 2018 # VP40

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM$.

- Démontrer que A et φ_A ont le même spectre.
- Justifier que pour toute valeur propre λ commune, $\dim E_\lambda(\varphi_A) = n \dim E_\lambda(A)$.

Exercice 28. ♦♦ 🎵 Exemple dans un espace fonctionnel

D'après EMLyon 2014 ECS # VP42

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, E_1 le sous-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On note, pour tout élément f de E , $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt.$$

1. Établir que, pour tout élément f de E , $T(f)$ appartient à E_1 et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(T(f))'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)).$$

On note $T: E \rightarrow E$ l'application qui, à f , associe $T(f)$.

2. Montrer que T est un endomorphisme de E . Est-il surjectif?
 3. Soit $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $s(t) = \sin(\pi t)$. Calculer $T(s)$. Est-ce que T est injectif?
 4. Soit $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{e^t - e^{-t}}{2t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose de plus $f_a: x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ax} \in \mathbb{R}$. Vérifier que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $T(f_a) = \varphi(a)f_a$.

5. Justifier que $[1; +\infty[\subset \text{Sp}(T)$. A-t-on égalité?

TD Exercice 29. ♦♦ ♪ Matrices de Hilbert

VP46

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on définit l'application $\Phi(P): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(P)(x) = \sum_{i=0}^n \left(\int_0^1 P(t) t^i dt \right) x^i.$$

1. Justifier que l'application Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
 2. Est-ce que Φ est injectif? surjectif? bijectif?
 3. Expliciter H_n , la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
 4. Soit $X = [x_i]_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

a) Vérifier que : ${}^t X H_n X = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n x_k t^k \right)^2 dt.$

b) En déduire que toutes les valeurs propres de H_n sont strictement positives.

5. Montrer que la plus petite valeur propre de H_n tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.
On admettra (pour l'instant) que la trace de H_n est égale à la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité).

Exercice 30. ♦♦♦ Matrice à diagonale dominante, localisation des valeurs propres réelles

VP39

Une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est dite à diagonale dominante si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$|a_{i,i}| > |a_{i,1}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{i,n}|.$$

1. Montrer qu'une matrice à diagonale dominante est inversible.

Indication. On pourra s'intéresser au noyau de la matrice.

2. Soit $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\text{Sp}(B) \subset \bigcup_{i=1}^n [b_{ii} - r_i, b_{ii} + r_i]$ où $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |b_{i,j}|$.

3. *Exemple d'une matrice tridiagonale*

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et A la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Montrer que si λ est une valeur propre réelle de A , alors il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\lambda = 2 \cos(\theta)$.

Révisions et compléments sur les variables aléatoires

Le hasard ne profite qu'aux esprits préparés.

LOUIS PASTEUR (1822-1895)

1 Rappels et compléments sur les séries

1.1 Définitions

Définition-Rappel 1 (série numérique)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. La **série** associée à $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

On dit que la série converge si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie.

 **Attention.** Il ne faut pas confondre :

- $\sum u_n$: la série de terme général u_n ;
- $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$: la somme partielle d'ordre n de la série ;
- $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$: la somme de la série, i.e, sous réserve de convergence, la limite des sommes partielles ;
- $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$: le reste d'ordre n de la série si cette dernière est convergente.

Exercice 1



Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier n , un réel x non nul et renvoie la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{k \geq 1} 1/\text{sh}(kx)$. Que dire de la convergence?

La fonction sh est la fonction sinus hyperbolique définie sur $\mathbb{R}$ par $\text{sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$.

D'après EDHEC 2022

Remarques.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_n - S_{n-1}$.
- Si la série de terme général u_n converge, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

La série harmonique $\sum 1/n$ montre que la réciproque est fausse.

- Soient u et v deux suites réelles telles que les séries de termes généraux u_n et v_n convergent.

Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ converge et

$$\forall n_0 \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=n_0}^{+\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k.$$

PY89

Théorème 2 (convergence absolue)

- On dit que la série de terme général u_n **converge absolument** si la série de terme général $|u_n|$ converge.
- Si une série converge absolument, **alors** elle converge.

Remarque. La réciproque est fausse. La série $\sum (-1)^n/n$ donne un contre exemple.

Théorème 3 (famille sommable)

Soit I un ensemble dénombrable, indexé par $\mathbb{N}$ sous la forme $I = \{\varphi(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ où φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans I .

- Si** la série $\sum u_{\varphi(n)}$ converge absolument,
alors sa somme est indépendante de l'indexation φ . On peut donc noter sans ambiguïté $\sum_{i \in I} u_i$.

1.2 Séries de références

Théorème 4 (séries géométriques, série exponentielle)

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Les séries de terme généraux x^k , kx^{k-1} et $k(k-1)x^{k-2}$ sont convergentes si et seulement si $|x| < 1$. Dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

- Pour tout réel x , la série de terme général $\frac{x^k}{k!}$ est convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$.
- On appelle **série de Riemann**, une série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Cette série est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

1.3 Critères de convergence pour les séries à termes positifs

Théorème 5 (critère de comparaison)

Soient u et v deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang, $0 \leq u_n \leq v_n$.

- Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n aussi.
- Si la série de terme général u_n diverge, alors la série de terme général v_n aussi.

Exercice 2



Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit $\sum u_k$ une série à termes positifs. On suppose que la série $\sum k^2 u_k^2$ est convergente.
 - a) Montrer que la série $\sum u_k$ est convergente.
 - b) Étudier la réciproque.
2. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente. Justifier la convergence des séries :

$$\sum \frac{3u_n}{1+u_n^2}, \quad \sum \ln(1+u_n) \quad \text{et} \quad \sum \int_0^{u_n} \frac{dt}{1+t^4}.$$

Théorème 6 (critères de négligeabilité et d'équivalence)

Soient u et v deux suites réelles.

- Si $\left| \begin{array}{l} \rightarrow u_n = o(v_n) \\ \rightarrow \text{la série de terme général } v_n \text{ converge,} \end{array} \right. \rightarrow v \text{ est positive à partir d'un certain rang}$

alors la série de terme général u_n converge.

- Si $\left| \begin{array}{l} \rightarrow u_n \sim v_n \\ \rightarrow v \text{ est positive à partir d'un certain rang,} \end{array} \right.$

alors les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

Remarque. On a des critères analogues si v est négative à partir d'un certain rang.

 **Attention.** Il ne faut pas oublier les conditions de signes lors de l'application de ces théorèmes.

 Exemples

- ♦ Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\bullet \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{3}{\sqrt{n}} \right); \quad \bullet \sum_{n \geq 1} \frac{n^3}{2^n}; \quad \bullet \sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!}; \quad \bullet \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)^4}{4^{\ln(n)}}.$$

- ♦♦ Discuter, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, de la nature de la série :

$$\bullet \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{1+2+\dots+n} \right)^\alpha; \quad \bullet \sum_{n \geq 1} \left(\sqrt{n+7} - \sqrt{n} \right)^\alpha \quad \bullet \sum \arctan \left(\frac{n^\alpha}{1+n} \right).$$

Exercice 3**2****Révision sur les probabilités****2.1 L'application probabilité**

On représente le résultat d'une expérience aléatoire comme un élément ω de l'ensemble Ω de tous les résultats possibles. Dans la suite, $\mathcal{A}$ est un ensemble composé de partie de Ω ($\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$). Il vérifie

- $\Omega \in \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire : $\forall A \in \mathcal{A}, \quad \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ est stable par union et intersection finie ou dénombrable : si I est un ensemble fini ou dénombrable et si pour tout $i \in I, A_i \in \mathcal{A}$, alors

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}.$$

Vocabulaire. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont des événements. Autrement dit, $\mathcal{A}$ est l'ensemble des événements. On parle aussi de tribu ou de σ -algèbre.

Définition 7 (l'application probabilité)

Soient Ω , un univers des possibles et $\mathcal{A}$ un ensemble d'événements.

Une **probabilité** est une application $\mathbf{P}$ réelle définie sur $\mathcal{A}$ vérifiant les conditions suivantes.

- $\rightarrow \mathbf{P}: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1];$
- $\rightarrow \mathbf{P}(\Omega) = 1;$
- $\rightarrow \mathbf{P}$ est σ -additive :
Pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ finie ou dénombrable d'événements deux à deux disjoints,

$$\mathbf{P} \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \sum_{i \in I} \mathbf{P}(A_i).$$

Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(A)$ est appelée **la probabilité de l'événement A**.

Remarque. Dans le cas où l'ensemble des indices I est dénombrable (par exemple, $\mathbb{N}$), la définition suppose implicitement la convergence de la série $\sum_{i \in I} \mathbf{P}(A_i)$.

Vocabulaire.

- La donnée d'un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ où Ω est un univers des possibles, $\mathcal{A}$ un ensemble d'événements sur Ω et $\mathbf{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, définit un **espace probabilisé**.
- Un événement de probabilité nulle est dit **négligeable**.
- Un événement de probabilité 1 est dit **presque-sûr**.

Théorème 8 (de la limite monotone)

Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

- Si la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** pour l'inclusion (c'est-à-dire, $\forall i \in \mathbb{N}, A_i \subset A_{i+1}$),

Alors
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

- Si la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** pour l'inclusion ($\forall i \in \mathbb{N}, B_{i+1} \subset B_i$),

Alors
$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(B_n).$$

2.2 Probabilité conditionnelle et indépendance

Définition 9 (probabilité conditionnelle)

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbf{P}(A) \neq 0$. Soit $B \in \mathcal{A}$. La **probabilité conditionnelle** de B sachant A est

$$\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Remarques.

- À partir de la définition, on prouve une première **formule de Bayes**.

Si $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$, alors
$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}_A(B) \cdot \mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} \quad (\bullet).$$

- Si A est un événement non négligeable, alors $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}_A)$ est un espace probabilisé.

Définition 10 (indépendance deux à deux et mutuelle)

- Deux événements A et B sont dits **indépendants** pour la probabilité $\mathbf{P}$ si

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B).$$

- Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie ou dénombrable d'événements. Les événements de cette famille sont dits **mutuellement indépendants** si pour toute partie finie non vide $\{i_1, i_2, \dots, i_p\} \subset I$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^p A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^p \mathbf{P}(A_{i_k}).$$

2.3 Formules des probabilités composées et probabilités totales

Proposition 11 (formule des probabilités composées)

Soient $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$, des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tels que

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0.$$

Alors $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \cdot \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbf{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$

Théorème 12 (formule des probabilités totales)

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in I}$ un système complet d'événements non négligeables (I est un ensemble fini ou dénombrable). Pour tout événement B ,

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n \in I} \mathbf{P}(A_n \cap B) = \sum_{n \in I} \mathbf{P}(A_n) \mathbf{P}_{A_n}(B).$$

Exercice 4



♦ 🎵 Soient $a, b, n, m \in \mathbb{N}^*$. Considérons deux urnes contenant respectivement a et b boules blanches et n et m boules noires. On suppose de plus que le nombre de boules dans les deux urnes est identique.

On procède de la manière suivante :

- On choisit (de façon équiprobable) une des deux urnes.
 - On effectue ensuite des tirages mutuellement indépendants avec remise dans cette même urne.
1. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au k -ième tirage, puis la probabilité d'obtenir k boules blanches consécutives.
 2. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au $(k+1)$ -ième tirage sachant que l'on a déjà obtenu k boules blanches aux tirages précédents.

RVA1

3 Variable aléatoire réelle

3.1 Définition

Définition 13 (variable aléatoire réelle)

Étant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, on appelle **variable aléatoire réelle** toute application X définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A}.$$

Notation. Dans la suite, pour I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$, on note :

$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}, \quad [X \leq t] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq t\} \quad \text{et} \quad [X = t] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = t\}.$$

Ainsi, X est une variable aléatoire si pour tout réel t , l'ensemble $[X \leq t]$ est un événement.

Remarque. La donnée des probabilités $\mathbf{P}([X \in]a, b])$ pour tous réels $a < b$ définit la **loi de probabilité** de la variable aléatoire réelle X .

Proposition 14 (Opérations sur les variables aléatoires)

Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Alors

- la combinaison linéaire $\lambda X + \mu Y$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
- le produit $X \cdot Y$,
- le maximum $\max(X, Y)$ et le minimum $\min(X, Y)$

sont encore des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Remarque. Cela s'étend à un nombre fini de variables aléatoires.

3.2 Fonction de répartition

Définition 15 (fonction de répartition)

Soit X , une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On définit la fonction F_X sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = \mathbf{P}(X \leq t).$$

La fonction F_X est la **fonction de répartition** de la variable aléatoire X .

Exercice 5

✧ Soit X , la variable aléatoire donnant la valeur d'un dé équilibré.
Tracer le courbe représentative de F_X sur $[-1; 7]$.

RVA2

Proposition 16 (propriétés de la fonction de répartition)

Soient X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et F_X sa fonction de répartition.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_X(t) \in [0; 1]$.
- F_X est croissante : pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 \leq t_2 \Rightarrow F_X(t_1) \leq F_X(t_2)$.
- $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$.
- F_X est continue à droite : pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} F_X(t) = F_X(a).$$

- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $\mathbf{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Astuce. À la fin de chaque calcul d'une fonction de répartition, il est toujours utile de vérifier rapidement les trois premiers points.

Proposition 17 (caractérisation de la loi)

Une fonction de répartition caractérise une loi de probabilité. Cela signifie que deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition si et seulement si elles ont la même loi.

4.1 Rappels : variables aléatoires finies et discrètes

Dans le cas où $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, la définition de la variable aléatoire se simplifie.

Définition 18 (variable aléatoire discrète)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Une **variable aléatoire discrète** est une application $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

telle que

- $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où I est une partie finie ou infinie de $\mathbb{N}$,
- pour tout $i \in I$, $[X = x_i]$ est un événement.

Vocabulaire. Donner la loi d'une variable aléatoire discrète X signifie donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X et pour chaque $x \in X(\Omega)$, la probabilité $\mathbf{P}([X = x])$.

Remarque. À une v.a. discrète X est associée le système complet d'événements $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$.

En particulier, il vient

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}([X = x]) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Définition 19 (indépendance, cas discret)

- Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

On dit que X et Y sont **indépendantes** si

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbf{P}([X = x]) \cdot \mathbf{P}([Y = y]).$$

- Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}([X_i = x_i]).$$

4.2 Lois usuelles

Rappelons que donner la loi d'une variable aléatoire X discrète revient à la donnée de :

- $X(\Omega)$: l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.
- Pour chaque $k \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}([X = k])$.

Dans chacun des cas, on précisera la loi, une représentation à l'aide d'un diagramme en bâtons, des exemples concrets d'application. De plus, on distinguera bien

- les cas finis : loi certaine, loi uniforme discrète, loi de Bernoulli, loi binomiale.
- les cas infinis dénombrables : loi géométrique, loi de Poisson.

Variable aléatoire certaine

Une variable X est dite **variable aléatoire certaine**, ou **presque sûrement constante** s'il existe un réel c tel que

$$\mathbf{P}([X = c]) = 1.$$

Loi de Bernoulli**Définition 20** (loi de Bernoulli)

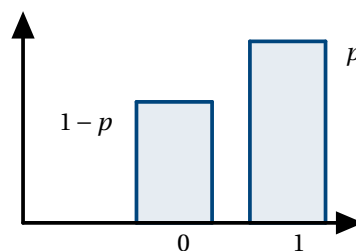
Soit $p \in [0; 1]$. La variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli**, noté $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, si

$$X(\Omega) = \{0; 1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([X = 1]) = p, \quad \mathbf{P}([X = 0]) = 1 - p.$$

Exemple. Pour $A \in \mathcal{A}$ alors la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(A)$.

Représentation de $\mathcal{B}(p)$

Ci-contre, le diagramme en bâtons associé à une loi de Bernoulli de paramètre p .



Exemples de modélisation

- Le résultat d'un lancer d'une pièce de monnaie équilibrée (1 pour pile, 0 face) suit une loi $\mathcal{B}(1/2)$.
- Plus généralement, la variable aléatoire associée à une expérience aléatoire ayant seulement deux issues (0 pour échec, 1 pour succès) suit une loi $\mathcal{B}(p)$ où p est la probabilité de succès.

Loi binomiale

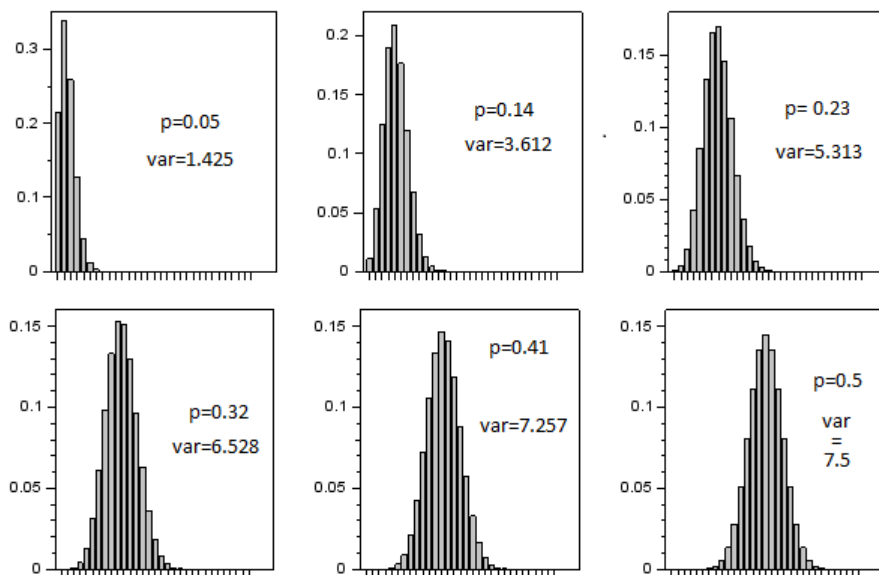
Définition 21 (loi binomiale)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$. On dit que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p , noté $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, si

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Représentation de $\mathcal{B}(n; p)$

Donnons quelques diagrammes en bâtons associés aux lois $\mathcal{B}(n; p)$ avec $n = 30$ et $p \in \{0,05; 0,14; 0,23; 0,32; 0,41; 0,5\}$.



Exemples de modélisation

- On lance n fois un dé et X compte le nombre de « 6 » obtenus. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/6)$.
- Plus généralement, lorsqu'on répète n expériences de Bernoulli (à deux issues : succès/échec) *identiques, mutuellement indépendantes*, dont la probabilité de succès est p , la variable X qui *compte le nombre de succès* suit alors une loi binomiale de paramètre (n, p) .



Attention. Ne pas oublier la condition de mutuelle indépendance.

Loi uniforme

Définition 22 (loi discrète uniforme)

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a < b$.

La variable aléatoire X suit une **loi discrète uniforme** sur $[[a, b]]$, noté $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$, si

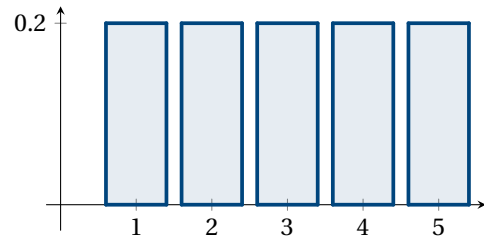
$$X(\Omega) = [[a, b]] \quad \text{et} \quad \forall k \in [[a, b]], \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{b - a + 1}.$$

Remarque. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$ avec $n = b - a + 1$, alors $Y = X + a - 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.

Représentation

Ci-contre le diagramme en bâtons de la loi :

$$\mathcal{U}([1; 5]).$$



Exemples de modélisation

- Le résultat d'un lancer d'un dé équilibré à 6 faces suit une loi uniforme sur $[1; 6]$.
- Une urne contenant n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n . On tire au hasard une boule. Le numéro obtenu suit une loi uniforme sur $[1; n]$.

Loi géométrique

Définition 23 (loi géométrique $\mathcal{G}(p)$)

Soit $p \in]0; 1[$ et $q = 1 - p$.

On dit que la variable aléatoire X suit la **loi géométrique** de paramètre p , notée $\mathcal{G}(p)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p = q^{k-1} p.$$

Représentation de $\mathcal{G}(p)$

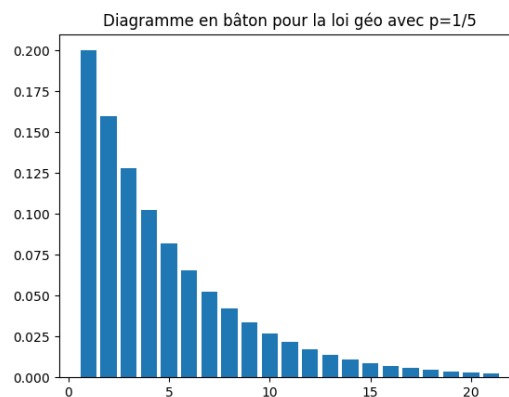
Exercice 6



◆◆ Diagramme en bâtons de la loi géométrique

1. Soient $p \in]0; 1[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Écrire un programme qui prend en argument p et renvoie la plus petite valeur entière n_p telle que $\mathbf{P}(X > n_p) \leq 1\%$.
2. En déduire un second programme qui prend en argument p renvoie le diagramme en bâtons sur $[1; n_p]$.

RVA3



Attention. Il faut bien distinguer le calcul des probabilités d'une loi et la simulation d'une variable aléatoire que l'on discutera en informatique.

Exemple de modélisation

- Une loi géométrique modélise un **premier temps d'arrêt**.

Si X renvoie le rang du premier succès dans une succession d'expériences de Bernoulli *identiques, mutuellement indépendantes*, alors X suit une loi géométrique où p est la probabilité de succès d'une expérience de Bernoulli.

- Une autre manière de caractériser la loi géométrique : c'est une loi sans mémoire.

Exercice 7



♦ ♪ Loi discrète sans mémoire

Soient $p \in]0; 1[$ et X une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$.

1. Justifier que : $\forall s, t \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}_{[X > s]}([X > s + t]) = \mathbf{P}([X > t]) \quad (\bullet)$

2. *Réciproque.*

Soit X une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ vérifiant $(\bullet)$ (sous-entendu, on suppose que pour tout $s \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(X > s) > 0$). Posons $p = \mathbf{P}([X = 1])$.

- a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer $\mathbf{P}([X > k])$ en fonction de p .
- b) En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre p .

RVA4

Loi de Poisson

Définition 24 (loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$)

Soit λ un réel strictement positif.

On dit que la variable aléatoire X suit la **loi de Poisson** de paramètre λ , notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([X = k]) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Remarque. La loi est bien définie. Les probabilités sont bien positives et à partir de la série exponentielle

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Représentation de $\mathcal{P}(\lambda)$

Exercice 8



♦♦ ♪ Diagramme en bâtons de la loi de Poisson

1. Soient $\lambda \in]0, +\infty[$ et $X \mapsto \mathcal{P}(\lambda)$. Écrire un programme qui prend en argument n, λ et renvoie la matrice ligne

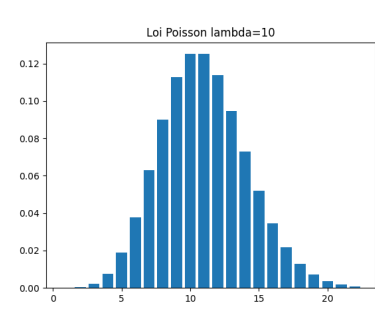
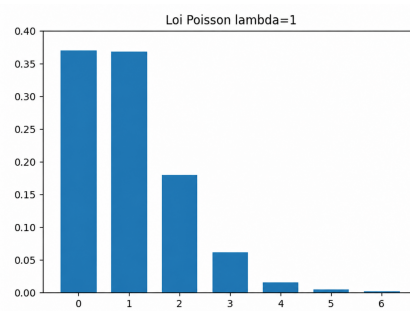
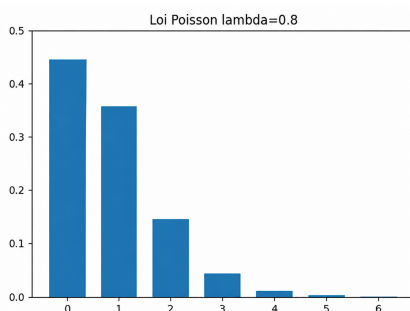
$$[p_0 \quad p_1 \quad \dots \quad p_n] \quad \text{où} \quad p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}.$$

On pourra remarquer que $p_{i+1} = \lambda p_i / (i + 1)$.

2. Écrire un programme qui prend en argument λ et renvoie la plus petite valeur entière n_λ telle que $\mathbf{P}([X \geq n_\lambda]) \leq 1\%$.
3. En déduire un second programme qui prend en argument λ renvoie le diagramme en bâtons sur $[[0; n_\lambda]]$.

RVA5

Quelques exemples pour différentes valeurs du paramètre.



"On a sanctionné les copies dans lesquelles Poisson (ou tout autre mathématicien) était écrit sans majuscule."

Rapport de Jury : HEC 2021



Exercices



Révisions sur les séries

Exercice 9. ♦ 🎵 Série alternée et contre-exemple

RA13

On définit les suites $u = (u_n)_{n \geq 1}$ et $v = (v_n)_{n \geq 2}$ par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

1. a) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. Justifier que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

b) En déduire la convergence de la série $\sum u_n$.

2. Vérifier les équivalents : $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n \sim \frac{1}{n}$.

3. Prouver que la série $\sum v_n$ est divergente.

Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont les termes généraux équivalents mais la nature des séries est différente. Cet exemple montre l'importance de l'hypothèse de positivité pour appliquer le critère d'équivalence.

Exercice 10. ♦

RA14

1. 🎵 Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier.

2. En déduire que la série de terme général $\sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$ est absolument convergente.

Exercice 11. ♦♦ Représenter dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'ensemble des points de coordonnées (α, β) tels que la série de terme général $u_n = \frac{n^\alpha}{n^2 + n^\beta}$ soit convergente. # RA15

Exercice 12. ♦♦ 🎵 Comparaison série-intégrale, une série de Bertrand

RA18

Prouver que la série $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^2}$ est convergente.

Exercice 13. ♦♦♦ Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $b_n = n(a_{n-1} - a_n)$. # RA19

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^n b_k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \right) - na_n$.

2. On suppose dans cette question que la série de terme général a_n converge.

a) 🎵 Montrer que $na_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

b) En déduire que la série de terme général b_n converge et que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

3. On suppose dans cette question que la série de terme général b_n converge.

a) 🎵 Montrer que pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, on a : $n(a_n - a_{n+k}) \leq \sum_{j=n+1}^{n+k} b_j$.

b) En déduire que la série de terme général a_n converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

TD Exercice 14. ♦ 🎵

D'après oral HEC 2014 # RA21

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = \ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$.

1. 🎵 Déterminer les réels a et b pour que la série de terme général u_n soit convergente.

2. Calculer alors la somme de cette série.

Exercice 15. ♦ 🎵 Produit infini

RA22

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite à termes positifs.

1. 🎵 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + \sum_{k=1}^n u_k \leq \prod_{k=1}^n (1 + u_k) \leq \exp \left(\sum_{k=1}^n u_k \right).$$

2. En déduire que la suite de terme général $\prod_{k=1}^n (1 + u_k)$ admet une limite finie lorsque $n \rightarrow \infty$ si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

TD Exercice 16. ♦♦ ♪ Produit de Cauchy

D'après EDHEC 2020 # RA17

On considère deux suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes positifs et on suppose que les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes, de sommes respectives $A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$. Pour tout entier naturel n , on pose : $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

1. ♪ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n c_k \leq \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k \right) \leq \sum_{k=0}^{2n} c_k$.

2. ♪ En déduire que la série de terme général c_n converge et que l'on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$.

3. Application

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^{+2}$. En utilisant le résultat précédent, démontrer que : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} \right)$.

Probabilités

Exercice 17. ♦♦ ♪ Soient $n, r, s \in \mathbb{N}^*$. Considérons n urnes numérotées de 1 à n , contenant chacune r boules bleues et s boules rouges. On réalise l'expérience suivante. On choisit au hasard une première boule dans la première urne que l'on remplace dans la seconde et on répète l'opération jusqu'à la dernière urne. Quelle est la probabilité qu'une boule tirée au hasard dans la dernière urne soit bleue? # RVA9

Exercice 18. ♦♦♦ Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'événements mutuellement indépendants. # RVA10

1. Montrer que $\mathbf{P} \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{P}(A_k)) \right)$.

2. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(A_n) \in]0; 1[$. Montrer que

$$\mathbf{P} \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right) = 1 \iff \sum \ln(1 - \mathbf{P}(A_k)) \text{ diverge} \iff \sum \mathbf{P}(A_k) \text{ diverge}.$$

3. Application

On dispose d'une urne d'une capacité illimitée, d'une boule rouge et d'une quantité illimitée de boules blanches. Dans chacun des cas suivants, déterminer la probabilité de tirer au moins une fois la boule rouge.

- On place la boule rouge et une boule blanche dans l'urne. On effectue une suite infinie de tirages avec remise.
 - On effectue une suite infinie de tirages de la façon suivante. Pour le premier tirage, on place la boule rouge et une boule blanche dans l'urne. Puis, après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et on y ajoute une boule blanche.
 - On effectue une suite infinie de tirages de la façon suivante. Pour le premier tirage, on place la boule rouge et trois boules blanches dans l'urne. Après le n -ième tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et on y ajoute $2n + 3$ boules blanches.
- Indication. On commencera par déterminer le nombre de boules dans l'urne avant le n -ième tirage.

Exercice 19. ♦ Soit $n \geq 2$. On lance n fois une pièce équilibrée de manière indépendante et on considère les événements suivants : # RVA11

- A = « on obtient au plus une fois Pile »;
- B = « les résultats des différents lancers ne sont pas tous identiques ».

Les événements A et B sont-ils indépendants?

Exercice 20. ♦ Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ avec U et V suivant une loi uniforme sur $\{-1; 0; 1\}$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on définit $N(\omega)$ comme le nombre de racines réelles du polynôme # RVA12

$$Q_\omega(x) = x^2 + 2U(\omega)x + V(\omega).$$

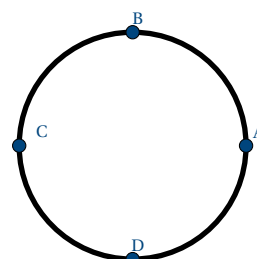
- Proposer un programme python qui simule N.
- Donner la loi de N.

Exercice 21. ♦

Un pion se déplace sur les 4 points A = (1, 0), B = (0, 1), C = (-1, 0) et D = (0, -1) du cercle trigonométrique selon la règle suivante. Au top d'horloge n , le pion

- reste sur le point où il se trouve avec une probabilité 1/2;
- se déplace sur l'un des deux points voisins avec une probabilité 1/4 pour chacun d'eux.

Au top 0, le pion est en A. On introduit les événements :



RVA65

- A_n : « le pion est sur A au top n » ;
- B_n : « le pion est sur B au top n » ;
- C_n : « le pion est sur C au top n » ;
- D_n : « le pion est sur D au top n » ;

On note $a_n = \mathbf{P}(A_n)$, $b_n = \mathbf{P}(B_n)$, $c_n = \mathbf{P}(C_n)$, $d_n = \mathbf{P}(D_n)$ et $X_n = {}^t[a_n \ b_n \ c_n \ d_n]$.

1. Trouver une matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Déterminer J telle que $A = \frac{1}{2}(I_4 + \frac{1}{2}J)$. On pose $K = \frac{1}{2}J^2$. Calculer KJ .
3. Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(I_4 + \frac{1}{2}J)^n = I_4 + u_n J + v_n K$.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + v_n$. Quel type usuel de suite reconnaît-on? Calculer w_n . En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n et v_n .
5. Conclure en exprimant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n , b_n , c_n et d_n .

Exercice 22. ♦♦♦ Lemme de Borel-Cantelli

RVA14

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements.

1. On suppose que la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ converge.
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k)$.
 - b) En déduire que l'événement $\bigcap_{m \geq 0} \bigcup_{k \geq m} A_k$ est négligeable.
 - c) Comment interpréter ce résultat?
2. On suppose que la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ diverge et que les événements $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants. On pose pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $p > n$,

$$C_{n,p} = \bigcap_{k=n}^p \overline{A_k} \quad \text{et} \quad C_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k}.$$

- a) Justifier que pour tout réel x positif, $1 - x \leq \exp(-x)$.
 - b) En déduire que : $\mathbf{P}(C_{n,p}) \leq \exp\left(-\sum_{k=n}^p \mathbf{P}(A_k)\right)$.
 - c) Vérifier que $\mathbf{P}(C_n) = 0$.
 - d) Conclure en prouvant que l'événement $\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k$ est presque sûr.
3. *Application. Le singe savant*
Un singe tape sur le clavier d'un ordinateur de manière complètement aléatoire. Justifier qu'à partir d'un certain moment, le singe écrira *À la recherche du temps perdu* puis l'intégrale des commentaires de Donald Trump sur son réseau social.

Variables aléatoires discrètes

Exercice 23. ♦ Pour chaque énoncé, proposer une loi pour la variable aléatoire réelle X . On précisera les paramètres de la loi et les éventuelles hypothèses. # RVA16

1. On lance un dé à 6 faces et on note X la variable égale au nombre obtenu.
2. On lance 10 fois un dé à 6 faces et on note X la variable égale au nombre de numéros pairs obtenus.
3. Une urne contient 15 boules (5 noires, 3 blanches et 7 rouges). On tire successivement et avec remise 20 boules et on note X la variable égale au nombre de boules noires.
4. Un jeu de 52 cartes est aligné, faces cachées, sur une table de façon aléatoire. On découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir la dame de cœur. Soit X la variable égale au nombre de cartes découvertes.
5. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire au hasard un à un avec remise jusqu'à obtenir le jeton 1. On note X la variable égale au nombre de tirages effectués.
6. On pose m questions à un étudiant. Pour chaque question, n réponses sont possibles dont une seule est correcte. L'élève répond au hasard. Soit X la variable égale au nombre de bonnes réponses.

Exercice 24. ♦♦ Étude asymptotique de la queue d'une loi de Poisson.

d'après oral HEC 2012 # RVA19

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq \lambda - 1$, on a $\mathbf{P}([X \geq n]) \leq \mathbf{P}([X = n]) \frac{n+1}{n+1-\lambda}$.
2. En déduire que $\mathbf{P}([X \geq n]) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \mathbf{P}([X = n])$.
3. Montrer que $\mathbf{P}([X > n]) = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(\mathbf{P}([X = n]))$.

TD Exercice 25. ♦♦ ♪ Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de même paramètre p . # RVA18
Calculer la probabilité que la matrice suivante soit inversible

$$A = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y & X \end{bmatrix}.$$

Exercice 26. ♦♦

RVA50

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - a) Justifier que $A^2 = 0_2$ si et seulement si $\text{Tr}(A) = 0$ et $\det(A) = 0$.
 - b) Vérifier que A est nilpotente si et seulement si $A^2 = 0_2$.
2. Soient (X_1, X_2, X_3, X_4) quatre variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi de Poisson de paramètre λ .
 - a) Déterminer la probabilité pour que la matrice ci-dessous soit nilpotente

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}.$$

- b) Donner un équivalent simple de cette probabilité lorsque λ tend vers 0^+ .

Sujets de révision

TD Exercice 27. ♦♦ ♪ **Matrices de rang 1 et indépendance de variables aléatoires**

D'après EMLyon 2013 # RVA17

1. Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si, et seulement si, il existe deux matrices colonnes non nulles U, V telles que $M = U^t V$.
2. On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose de plus : $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$. On note, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$,

$$m_{i,j} = \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]),$$

puis $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $U_X = (\mathbf{P}([X = i]))_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $U_Y = (\mathbf{P}([Y = i]))_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- a) On suppose, dans cette question, que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. Calculer $U_X^t U_Y$. En déduire que la matrice M est de rang 1.
- b) On suppose, dans cette question, que la matrice M est de rang 1. Notons $C_1, C_2, \dots, C_n$, les colonnes de M .
 - i) Vérifier que $C_1 + \dots + C_n = U_X$.
 - ii) En déduire que, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $\beta_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j = \beta_j U_X$.
 - iii) Montrer que pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathbf{P}([Y = j]) = \beta_j$.
 - iv) En déduire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

TD Exercice 28. ♦♦ **Taux de panne et caractérisation des lois géométriques**

RVA24

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X \geq n) > 0.$$

On appelle taux de panne (ou encore taux de défaillance) associé à la variable X la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \mathbf{P}_{[X \geq n]}(X = n).$$

1.
 - a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X \geq n) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - u_k)$.
 - b) Exprimer $p_n = \mathbf{P}(X = n)$ à l'aide des réels u_k .
2.
 - a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0; 1[$.
 - b) Montrer la divergence de la série $\sum u_k$.
3. Réciproquement, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $]0; 1[$ telle que la série $\sum u_k$ diverge. Justifier qu'il existe une variable aléatoire dont le taux de panne est la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
4. Montrer que la variable X suit une loi géométrique si, et seulement si, son taux de panne est une suite constante.

Exercice 29. ♦♦ **Une caractérisation de la loi géométrique**

RVA23

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes et de même loi, toutes deux définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On pose

$$I = \min(X, Y), \quad M = \max(X, Y) \quad \text{et} \quad D = M - I.$$

1. Dans cette question, on suppose que la loi commune de X et Y est géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ (on pose $q = 1 - p$).
 - a) Reconnaître la loi de la variable I .
 - b) Calculer $\mathbf{P}([I = i] \cap [D = d])$ pour tout $(i, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On séparera les cas $d = 0$ et $d > 0$.
 - c) Déterminer la loi de la variable D .
 - d) Vérifier que les variables I et D sont indépendantes.
2. Dans cette question, la loi commune de X et Y est inconnue et on suppose que les variables I et D sont indépendantes. On note $b = \mathbf{P}(D = 0)$ et, pour tout entier naturel k non nul, $p_k = \mathbf{P}(X = k)$. On suppose $p_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
 - a) Exprimer le réel b à l'aide de la famille $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.
 - b) Exprimer, pour tout entier naturel k , la probabilité $\mathbf{P}(I > k)$ à l'aide de la famille $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.
 - c) Soit $k \in \mathbb{N}$. En calculant la probabilité $\mathbf{P}([I > k] \cap [D = 0])$ établir l'égalité

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i^2 = b \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i \right)^2.$$

- d)
 - i) En déduire, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $(1 - b)p_k = 2b\mathbf{P}(X > k)$.
 - ii) Calculer p_1 en fonction de b
 - iii) Établir, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $p_{k+1} = \frac{1-b}{1+b}p_k$.
- e) En déduire que la loi commune des variables X et Y est une loi géométrique.

Espérance et espérance conditionnelle

If there is a 50-50 chance that something can go wrong, then nine times out of 10 it will.

PAUL HARVEY

Animateur radio américain (1918-2009).

1 Rappels : espérance et variance (cas discret)

1.1 Espérance et la formule de transfert

Définition-Rappel 1 (espérance)

Soit X une variable aléatoire discrète infinie. On note $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. On dit que X admet une **espérance** si la série de terme général $x_k \mathbf{P}(X = x_k)$ est *absolument convergente*. Alors on définit l'espérance de X par

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \mathbf{P}(X = x_k).$$

 **Attention.** Il ne faut pas oublier de vérifier la convergence absolue. Elle est nécessaire pour justifier que l'espérance est bien définie et ne dépend pas du choix de l'indexation $X(\Omega)$.

Exercice 1



♦ On effectue une infinité de tirages successifs, mutuellement indépendants, dans une urne contenant initialement une boule rouge et une boule bleue. À chaque tirage, on note la couleur de la boule et on la remet dans l'urne en y ajoutant une boule bleue.

On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule bleue (respectivement rouge). Pour que ces deux variables aléatoires soient bien définies, on admet que presque sûrement une boule bleue finit par apparaître, et qu'une boule rouge finit par apparaître.

1. a) Donner la loi de X .
b) X admet-elle une espérance? Si oui, la calculer.
2. Reprendre la question 1 avec la variable aléatoire Y .

EC4

Proposition 2 (existence par domination)

Soient X et Y , deux variables aléatoires discrètes sur un même espace probabilisé.

Si $\left| \begin{array}{l} \rightarrow 0 \leq |X| \leq Y. \\ \rightarrow Y \text{ admet une espérance.} \end{array} \right.$

Alors X admet une espérance et $|\mathbf{E}(X)| \leq \mathbf{E}(Y)$.

 **Attention.** Il ne faut pas confondre l'énoncé précédent avec la propriété de croissance de l'espérance dont on rappelle l'énoncé :

Si $\begin{cases} \rightarrow X \text{ et } Y \text{ admettent une espérance,} \\ \rightarrow X \leq Y, \end{cases}$ **alors** $E(X) \leq E(Y)$.

Théorème 3 (formule de transfert)

Soient X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et g une application définie sur $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in I\}$. Les énoncés suivants sont équivalents.

- i) La variable aléatoire $g(X)$ possède une espérance.
- ii) La série de terme général $g(x_k) \mathbf{P}(X = x_k)$ est absolument convergente.

Dans ce cas
$$E(g(X)) = \sum_{k \in I} g(x_k) \mathbf{P}(X = x_k).$$

Exercice 2



Les questions 1 et 2 sont indépendantes

1. Si X est une variable aléatoire admettant une espérance et X et $1 - X$ ont même loi. Que dire de l'espérance de X ?
2. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$.
 - a) Établir l'existence de $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$.
 - b) Montrer que $E\left(\frac{1}{1+X}\right) \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$.

EC5

1.2 Moments et variance

Pour tout $s \in \mathbb{N}$, le moment d'ordre s d'une variable aléatoire X est défini par :

$$m_s(X) = E(X^s).$$

En particulier pour $s = 1$, on retrouve l'espérance $m_1(X) = E(X)$.

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, et sous réserve de convergence absolue, la formule de transfert donne :

$$m_s(X) = \sum_{k \in I} x_k^s \mathbf{P}(X = x_k).$$

Exercice 3



1.  Justifier que si X a un moment d'ordre r alors, X admet un moment d'ordre s pour tout entier $s \leq r$.
2. Soit $r \in \mathbb{N}^*$, construire une variable aléatoire admettant un moment d'ordre r mais pas de moment d'ordre $r + 1$.

EC7

Définition 4 (variance et écart-type)

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

- On appelle **variance** d'une variable aléatoire X , la quantité $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$.
- On appelle **écart-type** de X , la quantité $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Proposition 5 (propriétés de la variance)

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

- $V(X) = 0$ si et seulement si X est une application presque sûrement constante.
- Pour tous réels a, b ,

$$V(aX + b) = a^2 V(X) \quad ; \quad \sigma(aX + b) = |a| \sigma(X).$$

Vocabulaire. Une variable aléatoire X est dite **centrée** si $E(X) = 0$. Elle est dite **réduite** si $\sigma(X) = 1$. Soit X une variable aléatoire non presque sûrement constante, la variable aléatoire $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée, réduite.

Théorème 6 (formule de KOENIG-HUYGENS)

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

1.3 Cas les lois usuelles discrètes

La variable X est dite **certaine**, ou **presque sûrement constante** s'il existe un réel c tel que $P(X = c) = 1$. Alors,

$$E(X) = c \quad \text{et} \quad V(X) = 0.$$

Proposition 7 (espérance et variance des lois usuelles)

Soit X , une variable aléatoire. Soient $p \in]0; 1[$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$, alors $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$.

Exercice 4



◆ Preuve via les fonctions génératrices

Soient $n \in \mathbb{N}$ et X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $[0; n]$. On définit alors la fonction génératrice G_X de X par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}([X = k]) t^k.$$

1. Justifier que $E(X) = G'_X(1)$.
2. Trouver une relation entre $V(X)$, $G''_X(1)$ et $G'_X(1)$.
3. Retrouver les résultats énoncés à la proposition précédente pour la loi binomiale.

EC9

Proposition 8 (espérance et variance, cas discret dénombrable)

Soit $p \in]0; 1[$. Posons $q = 1 - p$.

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors X admet une espérance et une variance avec : $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{q}{p^2}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance avec : $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

Exercice 5



Les questions sont indépendantes.

1. Prouver les énoncés de la proposition précédente.
2. Soit X une v.a suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Calculer $E(1/X)$.
On pourra admettre que pour tout $x \in]-1; 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1 - x)$.

EC10

Rappelons qu'un **système complet d'événements** d'un univers Ω est une famille finie ou dénombrable d'événements $(A_n)_{n \in I}$ telle que

$$(\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset) \quad \text{et} \quad \bigcup_{n \in I} A_n = \Omega.$$

Définition 9 (espérance conditionnelle, cas discret)

- Soient X , une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et A un événement de probabilité non nulle.

L'**espérance de X sachant A** est définie, sous réserve d'existence, comme l'espérance de X pour la probabilité $\mathbf{P}_A$. Elle est notée $\mathbf{E}(X|A)$.

- Dans le cas où X est une variable discrète : si la série $\sum x \mathbf{P}_A([X = x])$ converge absolument alors X admet une espérance sachant A et

$$\mathbf{E}(X|A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbf{P}_A([X = x]).$$

Remarque. Si X est une variable aléatoire finie, alors la convergence absolue est automatique. Ainsi, pour tout événement A possible ($\mathbf{P}(A) \neq 0$), X admet une espérance conditionnelle sachant A .

Exercice 6



- ♦ Soient X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ avec $X(\Omega) = \{x_k | k \in \mathbb{N}\}$ et A un événement de probabilité non nulle. Justifier que si $\mathbf{E}(X)$ existe, alors $\mathbf{E}(X|A)$ existe aussi et

$$|\mathbf{E}(X|A)| \leq \frac{1}{\mathbf{P}(A)} \mathbf{E}(|X|).$$

EC12

Théorème 10 (formule de l'espérance totale)

Soit X , une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

- Si**
- $(A_n)_{n \in I}$ est un système complet d'événements possibles.
 - Pour tout $n \in I$, $\mathbf{E}(X|A_n)$ existe.
 - La série $\sum_n \mathbf{P}(A_n) \mathbf{E}(|X| | A_n)$ converge.

Alors X admet une espérance et

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n \in I} \mathbf{P}(A_n) \mathbf{E}(X|A_n).$$

Exercice 7



- ♦ Lors d'une ponte, un esturgeon pond des œufs suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 500\,000$. Chaque œuf a une probabilité $p = 1/100\,000$ d'être un adulte. On suppose que pour chaque œuf, l'événement « cet œuf devient adulte » est indépendant des événements analogues pour les autres œufs. Combien, en moyenne, une ponte donne d'adulte esturgeon?

EC13



Attention. Il faut bien noter les valeurs absolues dans la somme $\sum_n \mathbf{P}(A_n) \mathbf{E}(|X| | A_n)$ même s'il arrive souvent que la variable X soit positive. L'exercice 25 illustre l'importance de cette condition.

Exercice 8



- ♦ ♦ 🎵 Une urne contient des boules blanches (dans une proportion $p \in]0; 1[$) et des boules noires. Dans un premier temps, on tire avec remise dans l'urne jusqu'à obtenir pour la première fois une boule blanche et on note N le nombre de tirages nécessaires. Dans un second temps, si la première boule blanche est apparue à la n -ième pioche, alors on retire maintenant n fois dans l'urne avec remise et l'on note X le nombre de boules blanches obtenues lors de ces n nouveaux lancers.

1. Donner la loi de N .
2. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(X|N = n)$. En déduire l'existence et la valeurs de $\mathbf{E}(X)$.

EC14



Exercices



Révisions et compléments

TD Exercice 9. ♦♦ D'après Oraux HEC

Soient $p \in]0; 1[$ et la fonction Python X ci-contre.

1. En s'aidant d'un lancer d'une pièce dont la probabilité d'obtenir "face" est p , interpréter ce que simule la fonction X?
2. Soit X la variable aléatoire simulée par la fonction ci-contre.
 - a) Quelle est la loi de X?
 - b) Quelle est l'espérance de X si elle existe?

Editeur

```
def X(p) :
    k=1
    y=0
    a=rd.random()
    while a>p :
        y=y+1
        k=k+1
        a=rd.random()
    while a<p :
        k=k+1
        a=rd.random()
    return k-1-y
```

EC15

Exercice 10. ♦ On suppose que $X \rightarrow \mathcal{B}(m, p)$. On note $Y = \frac{1}{X+1}$. Calculer l'espérance de Y.

EC17

Exercice 11. ♦ Rang du premier Pile-Face

EC19

Considérons une infinité de lancers mutuellement indépendants d'une pièce équilibrée. On note X la variable aléatoire qui donne le rang d'apparition du premier Pile-Face (dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k). Si une telle succession ne se produit pas, on pose $X = 0$. Notons A_i l'événement : « Un pile apparaît au i -ème lancer ».

1. En utilisant le système complet d'événements $(A_1, \overline{A_1})$, prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$,

$$\mathbf{P}([X = k + 1]) = \frac{1}{2} \mathbf{P}([X = k]) + \frac{1}{2^{k+1}}.$$

2. En déduire $\mathbf{P}([X = k])$ pour tout $k \geq 2$.
3. Préciser $\mathbf{P}([X \geq 2])$ puis $\mathbf{P}([X = 0])$.
4. Justifier que X admet une espérance. La calculer.

Exercice 12. ♦ Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$.

EC20

1. Soit $Y = (-1)^X X$. Est-ce que Y possède une espérance? Si oui, la calculer.
2. Soit Z définie par :
 - Si X prend une valeur paire, alors Z prend la valeur $\frac{X}{2}$
 - Si X prend une valeur impaire, alors Z prend la valeur 0.
 - a) Quelle relation a-t-on entre X, Y et Z?
 - b) Est-ce que Z possède une espérance? Si oui, la calculer.

TD Exercice 13. ♦ Nouvelle expression de l'espérance

EC24

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}(X = k) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(X > k) \right) - n \mathbf{P}(X > n)$.

2. On suppose dans cette question que X admet une espérance.

- a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \mathbf{P}(X > n) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k \mathbf{P}(X = k)$.

- b) Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(X > k)$ converge, et que $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k)$ (E).

3. Réciproquement, on suppose dans cette question que la série $\sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(X > k)$ converge. Montrer que X admet une espérance, et que la relation (E) est valable.

4. Adapter le raisonnement pour montrer que si X admet un moment d'ordre 2, alors $\mathbf{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1) \mathbf{P}(X > k)$.

Exercice 14. ♦♦ Inégalité de Jensen

EC22

Soit X une variable aléatoire finie et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Démontrer que $\varphi(\mathbf{E}(X)) \leq \mathbf{E}(\varphi(X))$.

Exercice 15. ♦♦ Soient X une variable aléatoire réelle admettant une variance et a, b deux réels. On note $m = \mathbf{E}(X)$.

EC25

1. Montrer que $\mathbf{E}((X-a)(b-X)) = (m-a)(b-m) - \mathbf{V}(X)$.
2. On suppose $a < b$ et $X(\Omega) \subset [a, b]$.
 - a) Montrer que $(m-a)(b-m) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$. En déduire $\mathbf{V}(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$.
 - b) Ce majorant peut-il être amélioré?

TD Exercice 16. ♦♦♦*D'après oral HEC* # EC27

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère une variable aléatoire réelle discrète X admettant des moments jusqu'à l'ordre 4 et vérifiant :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(X) = \alpha \\ \mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}(X^4) = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que α est nécessairement compris entre -1 et $+1$.
2. Trouver la loi de X .

Exercice 17. ♦♦ Un individu gravit un escalier. À chaque fois, avant de faire un pas, il lance une pièce non équilibrée donnant pile avec la probabilité p (avec $0 < p < \frac{1}{2}$) et progresse d'une marche s'il obtient «pile» et enjambe deux marches d'un coup s'il obtient «face».

RVA51

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n le nombre de marches gravies à l'issue des n premiers pas et X'_n le nombre de fois où l'individu a progressé par enjambées de 2 marches au cours des n premiers pas.
 - a) Déterminer une relation simple liant X_n et X'_n . En déduire la loi de X_n .
 - b) Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X_n .
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit Y_n le nombre aléatoire de pas justes nécessaires pour atteindre ou dépasser la $n^{\text{ème}}$ marche et $\mathbf{E}(Y_n)$ l'espérance de Y_n .
 - a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Y_n ?
 - b) Déterminer la loi de Y_1 , puis celle de Y_2 et préciser l'espérance de ces deux variables aléatoires.
 - c) Montrer que pour tout entier naturel k , et tout entier $n \geq 3$, on a :

$$\mathbf{P}(Y_n = k) = p \cdot \mathbf{P}(Y_{n-1} = k-1) + (1-p) \cdot \mathbf{P}(Y_{n-2} = k-1).$$

- d) Montrer que pour $n \geq 3$, $\mathbf{E}(Y_n) = p \cdot \mathbf{E}(Y_{n-1}) + (1-p)\mathbf{E}(Y_{n-2}) + 1$.
3. On considère l'ensemble E des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que pour tout $n \geq 3$, on ait :

$$u_n = p u_{n-1} + (1-p) u_{n-2} + 1.$$

- a) Montrer qu'il existe un réel α , que l'on déterminera, tel que la suite $(\alpha n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ appartient à E .
- b) Montrer que u appartient à E si et seulement si la suite $v : n \mapsto u_n - \alpha n$ vérifie la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = p v_{n-1} + (1-p) v_{n-2}$.
- c) En déduire la valeur de $\mathbf{E}(Y_n)$.

Exercice 18. ♦♦ Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient des boules numérotées de 1 à n ; on effectue dans cette urne des tirages aléatoires successifs d'une boule avec remise. On note $X_1, X_2, \dots$, les numéros successifs obtenus et on suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

RVA73

On note Y le rang du premier tirage après le premier pour lequel le numéro de la boule tirée est supérieur ou égal à X_1 , sous réserve qu'un tel numéro existe.

1. Pour tout entier $k \geq 2$, on pose : $B_k = [X_k < X_1]$.
 - a) En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $\mathbf{P}(B_2 \cap B_3 \cap \dots \cap B_k)$.
 - b) Montrer que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=2}^{+\infty} B_i\right) = 0$.
 - c) Que peut-on dire de l'ensemble des éléments ω de Ω pour lesquels $Y(\omega)$ existe? On admet désormais que cet ensemble est confondu avec Ω .
2. a) Montrer que pour tout entier $m \geq 1$, on a :

$$\mathbf{P}(Y = m+1) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \left(\frac{i}{n}\right)^{m-1}.$$

- b) Montrer que Y admet une espérance $\mathbf{E}(Y)$ donnée par : $\mathbf{E}(Y) = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$.

3. On ne considère plus l'entier n fixé et on note désormais $Y^{(n)}$ la variable aléatoire notée précédemment Y . Calculer pour tout entier $m \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(Y^{(n)} = m + 1)$.

Exercice 19. ♦ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue la suite d'épreuves suivante :

RVA53

- La première étape consiste à tirer un nombre au hasard uniformément dans $[[0; n]]$.
 - Pour $k \in \mathbb{N}^*$. Si on obtient i à la k -ième étape, l'étape suivante consiste à tirer au hasard un nombre dans $[[0; i]]$.
- Pour $(k, i) \in \mathbb{N}^* \times [[0; n]]$, on pose X_k la variable aléatoire indiquant le nombre obtenu à la k -ième étape,

$$p_k(i) = \mathbf{P}(X_k = i) \quad \text{et} \quad U_k = \begin{bmatrix} p_k(0) \\ p_k(1) \\ \vdots \\ p_k(n) \end{bmatrix}.$$

1. Reconnaître la loi de X_1 , son espérance, sa variance.
2. Pour $(k, i) \in \mathbb{N}^* \times [[0; n]]$, exprimer $p_{k+1}(i)$ en fonction de $(p_k(j))_{j \in [[0; n]]}$.
3. En déduire l'existence d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U_{k+1} = AU_k$.
4. a) Déterminer une matrice ligne B telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(X_k) = BU_k$.
b) En déduire $\mathbf{E}(X_k)$.
5. On note C la matrice ligne $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2^2 & \cdots & n^2 \end{bmatrix}$.
a) Justifier que $CA = \frac{1}{3}C + \frac{1}{6}B$.
b) Vérifier que

$$\mathbf{E}(X_{k+1}^2) - \frac{n}{2^{k+1}} = \frac{1}{3} \left(\mathbf{E}(X_k^2) - \frac{n}{2^k} \right).$$

6. En déduire $\mathbf{V}(X_k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Espérance conditionnelle

Exercice 20. ♦ Vrai ou faux?

EC32

Pour tout A , un événement avec $\mathbf{P}(A) \notin \{0; 1\}$ et X, Y , deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance.

1. $\mathbf{E}(X|A) = \mathbf{E}(X)$.
2. $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(X|A) + \mathbf{E}(X|\bar{A})$.
3. $\mathbf{E}(X) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{E}(X|A) + \mathbf{P}(\bar{A}) \cdot \mathbf{E}(X|\bar{A})$.
4. Si, pour tout $x \in X(\Omega)$, les événements $[X = x]$ sont indépendants de A , $\mathbf{E}(X|A) = \mathbf{E}(X)$.
5. Si $X \leq Y$ alors $\mathbf{E}(X|A) \leq \mathbf{E}(Y|A)$.
6. Si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbf{E}(Y|[X = x]) = \mathbf{E}(Y)$.

TD Exercice 21. ♦♦ ♪ Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$. La valeur de X s'affiche sur un écran. Mais ce dernier est défectueux, la valeur 0 ne s'affiche pas. Si X prend la valeur 0, alors l'écran affiche une valeur entière prise au hasard dans $[[1; n]]$, sinon elle affiche la bonne valeur de X . Notons Y_n , la variable aléatoire égale à la valeur affichée par l'écran. # EC29

1. a) Proposer un programme Python qui prend en arguments n, p et simule la variable Y_n .
b) En déduire une approximation de $\mathbf{E}(Y_{10})$ avec $p = 1/2$.
2. Exprimer $\mathbf{E}(Y_n)$ en fonction de n et p .

Exercice 22. ♦ ♪ Une urne contient initialement N boules numérotées de 1 à N . On effectue des tirages dans cette urne suivant le protocole suivant : si la boule numéro i vient d'être tirée alors on la remet dans l'urne et on enlève toutes les boules portant un numéro strictement supérieur à i . # EC34

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue lors du k -ième tirage.

1. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [[1, N]]$, Préciser $\mathbf{E}(X_{k+1} | X_k = i)$.
2. Donner une relation entre $\mathbf{E}(X_{k+1})$ et $\mathbf{E}(X_k)$.
3. En déduire $\mathbf{E}(X_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 23. ♦ Seconde preuve formule espérance totale via une indicatrice

EC42

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit A un événement de probabilité non nulle et soit X une variable aléatoire possédant une espérance. Montrer que le produit $X\mathbf{1}_A$ a une espérance et exprimer $\mathbf{E}(X\mathbf{1}_A)$ à l'aide de $\mathbf{E}(X|A)$.
2. Soient $(A_i)_{i \in [[1; n]]}$, un système complet d'événements et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et possédant une espérance. Établir l'égalité :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(X|A_k) \mathbf{P}(A_k).$$

TD Exercice 24. ♦♦ Un sachet contient initialement n bonbons Scoubidou. À chaque étape, on tire au hasard deux extrémités de Scoubidou dans le sachet. # EC37

- Si ces deux extrémités appartiennent à un même Scoubidou, on les noue pour fabriquer un rond que l'on sort du sachet.
- Si ces deux extrémités appartiennent à deux Scoubidous différents, on les noue pour fabriquer un seul Scoubidou que l'on remet dans le sachet.

1. Justifier que le processus s'arrête avec un sachet vide à la fin.
2. Soit X_n le nombre de ronds obtenus après avoir complètement vidé le sachet. Quelles sont les valeurs possibles de X_n ? Préciser $\mathbf{P}(X_n = 1)$ et $\mathbf{P}(X_n = n)$.
3. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(X_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$. En déduire que $\mathbf{E}(X_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln n$.

Exercice 25. ♦♦ Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, la suite définie par $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. # EC39

1. Déterminer la nature et la somme éventuelle des séries $\sum a_n$ et $\sum na_n$.
2. Soit X , une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^*$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad \mathbf{P}(|X| = n) = \alpha a_{|n|} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Déterminer α .

3. a) Que peut-on dire de la famille d'événements (A_n) avec $A_n = [X = n] \cup [X = -n]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?
b) Vérifier que $\mathbf{E}(X | A_n)$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Préciser sa valeur.
c) Montrer que la série de terme général $\mathbf{E}(X | A_n) \mathbf{P}(A_n)$ est absolument convergente et calculer sa somme.
4. La variable X admet-elle une espérance? Commenter ce résultat en comparant à la formule de l'espérance totale.

Sujets

TD Exercice 26. ♦♦♦ Est-ce que les moments déterminent la loi d'une variable finie? # EC26

1. Soit Y une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ qui prend les valeurs 0, 1 et 2 avec les probabilités p_0, p_1 et p_2 respectivement. On suppose que $\mathbf{E}(Y) = 1$ et $\mathbf{E}(Y^2) = 5/3$. Calculer p_0, p_1 et p_2 .
2. Soit $x_0, x_1, \dots, x_n, (n+1)$ réels distincts et soit φ l'application de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui, à tout polynôme Q de $\mathbb{R}_n[x]$, associe le $(n+1)$ -uplet $(Q(x_0), Q(x_1), \dots, Q(x_n))$.
a) Montrer que φ est une application linéaire bijective.
b) Déterminer la matrice A de φ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
c) Soit X une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs $x_0, x_1, \dots, x_n$. On suppose que l'on connaît les valeurs de $\mathbf{E}(X), \mathbf{E}(X^2), \dots, \mathbf{E}(X^n)$. Peut-on en déduire la loi de X ?

Exercice 27. ♦♦♦  Identités de Wald et sommes aléatoires de variables aléatoires # EC3

Soient X et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi et admettant une espérance. Soit N , une nouvelle variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et admettant aussi une espérance. On pose pour tout $\omega \in \Omega$

$$S(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) + \dots + X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \geq 1 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0. \end{cases}$$

On admet que S est une variable aléatoire.

1. • *Espérance de S : une formule, deux approches.*
a) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{P}(N = n) \neq 0$. Justifier l'existence et calculer l'espérance $\mathbf{E}(S | [N = n])$.
b) En déduire l'existence de l'espérance de S et l'égalité $\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(N)$.
2. a) Justifier que pour tout $t \in [-1; 1]$

$$G_S(t) = G_N(G_X(t)).$$

On pourra admettre que l'on peut intervertir les sommes doubles.

- b) En admettant que dans le cas d'absolue convergence, l'espérance de la variable X est donnée par $G'_X(1)$, retrouver le résultat de la question 1.b).
3. • *Variance*
On suppose maintenant que les variables X_i admette un moment d'ordre 2. Justifier que

$$\mathbf{E}\left((S - N\mathbf{E}(X))^2\right) = \mathbf{E}(N) \mathbf{V}(X).$$

1. L'objectif de cette question est de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme L_n tel que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_*^+, \quad \left(Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \Rightarrow \mathbf{E}(Y^n) = L_n(\lambda) \right) \quad (\bullet)$$

a) Préciser L_1 et L_2 .

b) On définit les polynômes $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ par :

$$Q_0 = 1 \quad \text{et pour tout } i \in \mathbb{N}^* \quad Q_i(x) = x(x-1) \cdots (x-i+1).$$

Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha_{0,n}, \alpha_{1,n}, \dots, \alpha_{n,n}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^n = \sum_{i=0}^n \alpha_{i,n} Q_i(x)$.

c) Soient $i \in \mathbb{N}$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Préciser $\mathbf{E}(Q_i(Y))$.

d) Vérifier que le polynôme défini par $L_n(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_{i,n} x^i$ est solution du problème $(\bullet)$.

2. Relation de récurrence.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que si on pose pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$, $\psi(\lambda) = e^\lambda L_n(\lambda)$ alors pour $\psi(\lambda) = \sum_{i=1}^{+\infty} i^n \frac{\lambda^i}{i!}$.

b) En admettant que l'on puisse dériver ψ comme une somme finie, montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_*^+, \quad L_{n+1}(\lambda) = \lambda L_n'(\lambda) + \lambda L_n(\lambda).$$

Justifier que la relation précédente est valable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) En déduire l'égalité : $L_{n+1}(1) = \sum_{i=0}^n i \alpha_{i,n} + L_n(1)$.

3. Moments de la loi $\mathcal{P}(1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit l'endomorphisme : $\Delta : \begin{cases} \mathbb{R}_n[x] & \rightarrow \mathbb{R}_n[x] \\ P & \mapsto P(x+1) - P(x). \end{cases}$

a) Expliciter $\Delta(x^n)$. Vérifier ensuite que : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \Delta(Q_i) = i Q_{i-1}$.

b) Justifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} x^i = \sum_{i=1}^n i \alpha_{i,n} Q_{i-1}(x).$$

En déduire que si $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$, alors $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \mathbf{E}(Y^i) = \sum_{i=0}^n i \alpha_{i,n}$.

c) Conclure en montrant que

$$\mathbf{E}(Y^{n+1}) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \mathbf{E}(Y^i).$$

d) Proposer un programme python qui prend en argument un entier n et renvoie la matrice ligne

$$[1 \quad \mathbf{E}(Y) \quad \mathbf{E}(Y^2) \quad \dots \quad \mathbf{E}(Y^n)].$$

On pourra utiliser la commande `sp.binom(i,j)` de la bibliothèque `scipy.special` pour le coefficient $\binom{i}{j}$.

Variables aléatoires à densité

- C.F : Bonjour ChatGPT, invente-moi une citation drôle pour un cours de maths.
- « Les mathématiques, c'est comme les chaussettes : il y a toujours une inconnue qui se cache quelque part. » Cette citation est là pour apporter un peu de légèreté à un sujet souvent perçu comme sérieux!
- C.F : Merci pour ce petit moment d'humour...

1 Rappels : intégrales impropres

1.1 Convergence et convergence absolue

Définition 1 (intégrale généralisée en b)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.

L'intégrale généralisée (ou impropre) de f sur $[a; b]$ est notée $\int_a^b f(t) dt$. Elle est dite **convergente** si $\int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers b avec $x < b$. Dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \int_a^x f(t) dt.$$

Si la limite n'existe pas ou qu'elle est infinie, l'intégrale est dite **divergente**.

Remarques.

- La définition s'étend aux fonctions continues sur $]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$.
- Si f est une fonction continue sur un intervalle $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

L'intégrale généralisée de f sur $]a, b[$ est notée $\int_a^b f(t) dt$. Elle est dite **convergente** si pour un réel $c \in]a, b[$, les intégrales généralisées $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ sont convergentes. Dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Théorème 2 (absolue convergence)

$\int_a^b f(t) dt$ est dite **absolument convergente** si $\int_a^b |f(t)| dt$ est convergente.

De plus, si $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente, **alors** elle est convergente.

 **Attention.** La réciproque est fausse. Il existe des intégrales généralisées convergentes sans être absolument convergentes.

1.2 Critères de convergence

À l'aide du théorème de convergence monotone, on montre que, pour $f : [a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue positive, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si l'application $x \in [a; b[\mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée.

Proposition 3 (critère de comparaison et de négligeabilité)

Soient f, g deux fonctions continues définies sur $[a, b[$.

- Si
 - f et g sont positives,
 - pour tout $x \in [a, b[$, $f(x) \leq g(x)$,
 - $\int_a^b g(t) dt$ est convergente,
 alors $\int_a^b f(t) dt$ est aussi convergente.
- Si
 - g est positive sur un voisinage de b ;
 - $f \underset{b^-}{=} o(g)$;
 - $\int_a^b g(t) dt$ est convergente,
 alors $\int_a^b f(t) dt$ est aussi convergente.

Proposition 4 (critère d'équivalence)

Soient f, g deux applications continues définies sur $[a, b[$.

- Si
 - f et g sont de signe constant sur un voisinage de b ,
 - $f \underset{b^-}{\sim} g$,

alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont de même nature.

Remarque. En pratique, on compare souvent aux **intégrales de Riemann**. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ distincts.

- L'intégrale généralisée $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ est convergente en a si et seulement si $\alpha < 1$;
- L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

1.3 Règles de calcul

Sous réserve de convergence, les propriétés de linéarité, de croissance de l'intégrale, l'inégalité triangulaire et la relation de Chasles sont encore valables. Par contre, pour effectuer une intégration par parties, on se ramène à un segment.

Théorème 5 (changement de variable)

Soit f continue sur un intervalle $]a, b[$.

- Si $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ est une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$,
- alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(u) du$ et $\int_\alpha^\beta \varphi'(t) f(\varphi(t)) dt$ sont de même nature.

Dans le cas de convergence,

$$\int_a^b f(u) du = \int_\alpha^\beta \varphi'(t) f(\varphi(t)) dt.$$

Remarque. L'énoncé s'étend au cas décroissant.

2.1 Définition et premières propriétés

Définition 6 (variable aléatoire à densité)

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Notons F_X la fonction de répartition de X . On dit que X est une **variable aléatoire à densité** si :

- F_X est continue sur $\mathbb{R}$.
- F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.

Remarque. Si X est une variable aléatoire à densité : pour $b \in \mathbb{R}$, on a $\mathbf{P}([X = b]) = 0$.

Plus généralement, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}([X \in]a; b[)) = \mathbf{P}([X \in [a; b[)) = \mathbf{P}([X \in]a; b]) = \mathbf{P}([X \in [a; b])).$$

Définition 7 (densité de probabilité)

On dit qu'une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une **densité de probabilité** si elle vérifie :

- f est positive sur $\mathbb{R}$.
- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.
- L'intégrale suivante est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.

Exemples

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. ♦ Montrer que l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ te^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

2. ♦♦ On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \frac{\lambda}{e^t + 1} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(t)$.

- a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{x^2 + x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.
- b) 🐞 En déduire la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que f soit une densité de probabilité.

Exercice 1

#LD1

Proposition 8 (densité de probabilité d'une variable à densité)

Soit X une variable aléatoire à densité.

Toute application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs positives qui coïncide avec F_X' sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points est une densité de probabilité. On dit que f est une densité de probabilité de la variable aléatoire X .

Proposition 9 (densité et fonction de répartition)

Soient $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et F_X, f_X respectivement la fonction de répartition et une densité de X .

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^x f_X(t) dt$ est convergente, et $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$.
- Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ tels que $a < b$, $\mathbf{P}([X \in]a; b]) = \int_a^b f_X(t) dt$.

Remarque. En particulier, on a : $\mathbf{P}([X \geq x]) = \mathbf{P}([X > x]) = 1 - F(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt.$

Exercice 2



Les deux questions sont indépendantes.

1. Calculer $\mathbf{P}(X^2 - X < 0)$ lorsque X est une variable aléatoire qui a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$.
2. On considère X une variable aléatoire à densité à valeurs dans $[1; 10]$ telle qu'une densité f coïncide sur $[1; 10]$ avec $t \mapsto 1/(t \ln(10))$. Si on pose $Y = [X]$, vérifier que

$$\mathbf{P}(Y = 1) = \mathbf{P}(Y \in \{2, 3\}) = \mathbf{P}(Y \in \{5, 6, 7, 8, 9\}).$$

LD2



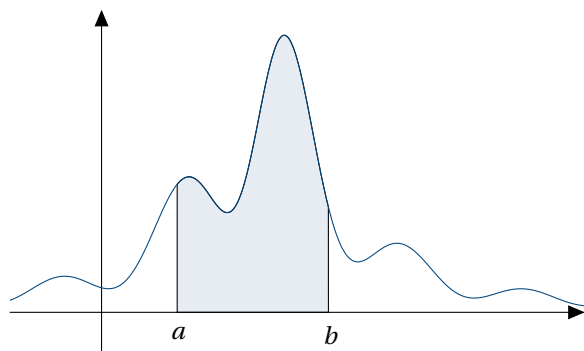
Attention. Il ne faut pas confondre fonction de répartition et densité.

Rappelons qu'une fonction de répartition est une fonction croissante de limite 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$. Le lien est, pour tout $t \in \mathbb{R}$, sauf un nombre fini,

$$f_X(t) = F_X'(t).$$

La densité d'une variable X n'est pas unique alors que la fonction de répartition l'est.

Interprétation graphique



Traçons la courbe représentative d'une densité.

L'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$, $x = b$ correspond exactement à la probabilité que la variable aléatoire prenne les valeurs comprises entre a et b .

$$\text{Aire} = \int_a^b f(t) dt = \mathbf{P}([a \leq X \leq b]).$$

Lorsque $a \rightarrow -\infty$ et $b \rightarrow +\infty$, on retrouve bien

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1 = \mathbf{P}(\Omega).$$

De nouveau, on constate que pour une variable aléatoire continue, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}([X = a]) = 0$.

Proposition 10 (la densité caractérise la loi)

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Si f est à la fois une densité de X et Y , alors X et Y ont même loi.

Remarque. En pratique, donner la loi d'une variable aléatoire à densité est équivalent à donner

$$\mathbf{P}([X \in [a, b]]) \text{ pour tous } a, b \in \mathbb{R},$$

C'est aussi équivalent à donner la fonction de répartition ou une densité de probabilité.

Proposition 11 (conditions pour une variable à densité)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Si**
- La fonction f est positive.
 - La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, éventuellement privé d'un ensemble fini de points.
 - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.

Alors il existe une variable aléatoire X dont f est une densité de probabilité.

2.2 Cas des variables du type $Y = \varphi(X)$

Comment montrer qu'une variable aléatoire est à densité et obtenir une densité?

Soit X , une première variable aléatoire à densité et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une application. On pose $Y = \varphi(X)$. Pour justifier que Y est une nouvelle variable aléatoire, on peut procéder comme suit :

- On précise $Y(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises par Y .
- On exprime la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X . En particulier, on cherche pour tout $t \in Y(\Omega)$, la probabilité $P([Y \leq t])$.
- Ensuite, on s'assure que F_Y est bien continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points (noté dans la suite D).
- On calcule la dérivée F_Y' sur $\mathbb{R} \setminus D$ afin d'avoir une densité de Y .

Exercice 3



❖ Un exemple avec la loi de Laplace

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une variable à densité et que l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout réel t par $f(t) = \lambda \exp(-|t|)$ est une densité de X .

1. Quelle est la valeur de λ ? Préciser le graphe de f .
2. Déterminer la fonction de répartition de X . *Indication. On distinguera $x \leq 0$ et $x \geq 0$.*
3. On pose $Y = 3X - 2$.
 - a) Établir une relation entre F_X et F_Y , les fonctions de répartition de X et Y .
 - b) Vérifier que Y est une variable aléatoire à densité et préciser une densité.

LD3

Exemple. 🎵 Transformation affine d'une variable à densité

Soient X une variable aléatoire à densité et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

On montre que la variable $Y = aX + b$ est à densité et une densité est donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f_Y(t) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$.

Exercice 4



♦♦ 🎵 ♦♦ Soit X une variable aléatoire à densité suivant une loi uniforme sur $[-1; 1]$. C'est-à-dire, une densité de X est donnée par $f = 1/2 \cdot \mathbf{1}_{[-1; 1]}$.

1. Justifier que $U = |X|$ est une variable à densité et donner une densité.
2. Faire de même avec $V = X^2$.
3. *Cas général.* Soit f , une densité de X . Justifier que $Z = X^2$ est une variable aléatoire réelle admettant une densité nulle sur $\mathbb{R}^-$ et donnée sur $\mathbb{R}_*^+$ par

$$g(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} (f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})).$$

LD4

3

Espérance d'une variable à densité

3.1

Définition

Définition 12 (espérance dans le cas à densité)

Soit X une variable aléatoire à densité f_X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On définit l'**espérance** de X , sous réserve de convergence absolue, comme le réel

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt.$$



Attention. Comme pour les variables aléatoires discrètes, il ne faut pas oublier la convergence absolue.

Exercice 5



Loi de Pareto

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ et X une variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(t) = \frac{1}{\alpha} t^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}} \quad \text{si } t \in [1; +\infty[\quad \text{et } f(t) = 0 \text{ sinon.}$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Pour quelles valeurs de α , X admet-elle une espérance? La calculer quand elle existe.

LD5

3.2 Règles de calculs sur l'espérance

Proposition 13 (linéarité de l'espérance)

Soient X et Y des variables aléatoires à densité admettant une espérance. Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et on a :

$$\mathbf{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbf{E}(X) + \mu \mathbf{E}(Y).$$

Vocabulaire. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On dit que X est **centrée** si X admet une espérance et $\mathbf{E}(X) = 0$. Ainsi, la variable aléatoire $X - \mathbf{E}(X)$ est toujours une variable aléatoire centrée.

Proposition 14 (existence par domination)

Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé.

Si $\begin{cases} \rightarrow |X| \leq Y. \\ \rightarrow Y \text{ admet une espérance.} \end{cases}$ **Alors**, X admet une espérance et $|\mathbf{E}(X)| \leq \mathbf{E}(Y)$.

Proposition 15 (positivité et croissance de l'espérance)

Soient X, Y des variables aléatoires à densité admettant une espérance.

- Positivité de l'espérance : si $X \geq 0$ presque sûrement, alors $\mathbf{E}(X) \geq 0$.
- Croissance de l'espérance : si $X \leq Y$ presque sûrement, alors $\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y)$.

3.3 Formule de transfert

Théorème 16 (de transfert)

Soient X une variable aléatoire admettant une densité f_X nulle en dehors de $]a, b[$ avec $(a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ et $\varphi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points. On a l'équivalence entre

- i) La variable $\varphi(X)$ admet une espérance.
- ii) L'intégrale $\int_a^b \varphi(t) f_X(t) dt$ converge absolument.

Et en cas de convergence absolue,

$$\mathbf{E}(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi(t) f_X(t) dt.$$

Exercice 6



- ♦ Soit X une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par $f = 1_{]0;1[}$. Justifier l'existence de l'espérance $E(\ln(X))$ et la calculer.

LD6

4

Moments et variance d'une variable à densité

4.1 Moments

Pour tout entier naturel s , le moment d'ordre s d'une variable aléatoire X est, sous réserve d'existence, le nombre $m_s(X)$ défini par :

$$m_s(X) = E(X^s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x) dx.$$

Exercice 7



- ♦ On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -\ln(x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
 2. Soit X une variable aléatoire de densité f .
Montrer que X admet des moments à tout ordre et les calculer.

LD7

Exercice 8



1. ♦♦ Montrer que si X a un moment d'ordre r alors, X admet un moment d'ordre s pour tout entier $s \leq r$.
2. Soit $r \in \mathbb{N}^*$, construire une variable aléatoire à densité admettant un moment d'ordre r mais pas de moment d'ordre $r + 1$.

LD8

4.2 Variance

Définition 17 (variance et écart-type)

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

- On appelle **variance** d'une variable aléatoire X , la quantité $V(X) = E((X - E(X))^2)$.
- On appelle **écart-type** de X , la quantité $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque. La quantité $\sigma(X)$ est bien définie car $(X - E(X))^2 \geq 0$. Donc, par croissance de l'espérance, $V(X) \geq 0$.

Proposition 18 (propriétés de la variance)

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

- $V(X) = 0$ si et seulement si X est une application presque sûrement constante.
- Pour tous réels a, b , $V(aX + b) = a^2 V(X)$; $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$.

Vocabulaire. Soit X une variable aléatoire. Nous avons vu qu'une variable aléatoire X est dite **centrée** si $E(X) = 0$. Elle est dite **réduite** si $\sigma(X) = 1$. La variable aléatoire $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée, réduite.

Théorème 19 (formule de KOENIG-HUYGENS)

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.



Exercices



Révisions : intégrales sur un segment

Exercice 9. ♦ Sommes de Riemann

Justifier que pour $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Exercice 10. ♦ 🎵 Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $f : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Justifier que : $\int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

RA50

Exercice 11. ♦ Variante des intégrales de Wallis avec la fonction tangente

RA51

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n dt.$$

1. Calculer u_0 et u_1 .
2. Vérifier que $\tan' = 1 + \tan^2$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + u_n = \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire une fonction Python qui prend en argument n et renvoie u_n .
4. Étudier les variations de la suite (u_n) . En déduire la convergence de la suite (u_n) et calculer la limite.
5. Effectuer le changement de variable $x = \tan t$ dans l'intégrale définissant u_n , puis en déduire $|u_n| \leq \frac{1}{n+1}$.

Révisions : intégrales généralisées

Exercice 12. ♦ Pour tout $n \geq 2$, on pose $u_n = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^n}$. Étudier la nature de la série de terme général u_n .

RA52

Exercice 13. ♦ On pose $f : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t)t^x} dt$.

D'après oral ENSAE 2025 # RA53

1. Trouver le domaine de définition de f .
2. Exprimer $f(x) + f(x+1)$ en fonction de x .
3. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

TD Exercice 14. ♦ Soit f une fonction continue bornée sur $[0, +\infty[$.

RA55

1. Démontrer que les intégrales I et J sont convergentes où

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2} dx$$

2. Vérifier que $I = J$.

3. Application. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx$.

Exercice 15. ♦♦ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

RA56

1. Donner un exemple où $f(t) \not\xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. Un graphe suffit...
2. Vérifier que la conclusion $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ devient vraie si l'on suppose en plus que f de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\int_0^{+\infty} f'(t) dt$ convergente.

Variable aléatoire à densité

Exercice 16. ♦ Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = ae^{x-ae^x}$.

LD11

1. À quelle(s) condition(s) f est-elle une densité de probabilité?
2. Si X est une variable aléatoire réelle admettant f pour densité, quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = e^X$?

Exercice 17. ♦ **Un exemple détaillé**

LD21

1. On pose pour tout $t \in]-1; 1[$, $g(t) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right)$.
 - a) Justifier que g est une bijection de $] - 1; 1[$ dans $\mathbb{R}$.
 - b) Donner une expression simple de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Justifier que g^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner $g^{-1'}$.
 - c) Soit X , une variable aléatoire de loi uniforme sur $] - 1; 1[$. On définit la variable $T = g(X)$.
 - i) Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_T(x) = F_X(g^{-1}(x))$.
 - ii) En déduire que T est une variable aléatoire à densité. On précisera une densité.
2.
 - a) Justifier que $U = |X|$ est une variable à densité et donner une densité.
 - b) Faire de même avec $V = X^2$.

TD Exercice 18. ♦♦ **On considère l'application f définie par :**

LD22

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{e^{-t}}{(e^{-t} + 1)^2}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire réelle qui admet f comme densité. Déterminer F , la fonction de répartition de X .
3. Soit φ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et $Y = \varphi(X)$.
 - a) Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] - 1; 1[$ et déterminer sa bijection réciproque.
 - b) Déterminer la loi de Y .

TD Exercice 19. ♦ **Vrai ou faux?**

LD9

Dans la suite, X est une variable aléatoire dont f est une densité. Soit $a \in \mathbb{R}$. Préciser si les énoncés suivants sont vrais ou faux, les compléter si besoin pour les rendre justes.

1. On a $\mathbf{P}(X \in \mathbb{Z}) = 0$.
2. Si f est une densité paire alors $E(X) = 0$.
3. Si X admet un moment d'ordre 2, alors sa variance est strictement positive.
4. On a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$.
5. Si $f(a) \neq 0$ alors il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $\mathbf{P}(X \in]a - \varepsilon; a + \varepsilon]) > 0$.

Exercice 20. ♦ Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0; 1[$. On lance une pièce équilibrée (le résultat est indépendant de U). Soit X définie par $X = U^2$ si la pièce donne pile et $X = 1 - U^2$ sinon. Justifier que X est à densité et donner une densité.

LD12

Exercice 21. ♦ **Loi de Weibull, taux de panne**

LD13

Soient $c \in [1; +\infty[$ et X une variable à densité dont une densité f_c est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_c(t) = \begin{cases} \alpha_c t^{c-1} e^{-t^c} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}.$$

1. Préciser la valeur de α_c .
2.
 - a) Vérifier que pour tous $s, t \in \mathbb{R}_*^+$, $\mathbf{P}(X \geq s) \geq \mathbf{P}_{[X \geq t]}(X \geq s + t)$. On pourra admettre que pour $x \in \mathbb{R}^+$ $(1+x)^c \geq 1+x^c$.
 - b) Que dire pour $c = 1$?

Exercice 22. ♦ Soit X une variable aléatoire à densité avec une densité de probabilité f paire.

LD14

1. Préciser $\mathbf{P}([X \geq 0])$.
2. On note F la fonction de répartition de X . Justifier que $x \in \mathbb{R} \mapsto F(x) - \frac{1}{2}$ est impaire.
3. On suppose que $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ converge. Démontrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 23. ♦♦ **Autour de la loi de Cauchy**

LD10

Une variable aléatoire à densité suit une loi de Cauchy si une densité est $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\pi(1+t^2)}$.

1. Une densité est donnée par $(1/2)\mathbf{1}_{]-1;1[}$.

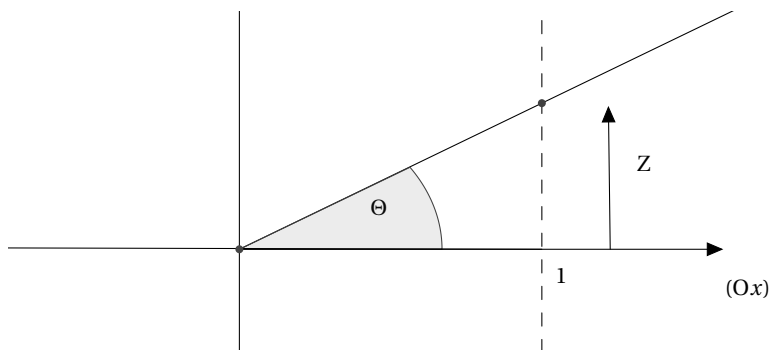
1. *Preliminaires.*

- Simplifier $\arctan(t) + \arctan(1/t)$ lorsque $t \in \mathbb{R}^*$.
- Donner la fonction de répartition d'une loi de Cauchy.

2. Soit X une variable aléatoire à densité suivant une loi de Cauchy. On pose $Y = 1/X$.

- Calculer $P([Y < 0])$, puis, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $P([0 < Y \leq x])$.
- Montrer que Y suit encore une loi de Cauchy.

3. Un tireur envoie sa balle sur un demi-plan droit. On suppose que l'angle Θ entre la trajectoire et l'axe (Ox) est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Justifier que la position Z de la balle sur la cible (d'axe $x = 1$) suit une loi de Cauchy.



TD Exercice 24. ♦ Nouvelle expression de l'espérance

Soit X une variable aléatoire à densité. On note f une densité de X et F sa fonction de répartition. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ et que $f = 0$ sur $\mathbb{R}^-$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\int_0^x (1 - F(t)) dt = x(1 - F(x)) + \int_0^x t f(t) dt. \quad (\bullet)$$

2. On suppose dans cette question que X possède une espérance.

- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq x \int_x^{+\infty} f(t) dt \leq \int_x^{+\infty} t f(t) dt$.
- En déduire que $x(1 - F(x)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

c) À l'aide de la relation $(\bullet)$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1 - F(t)) dt$ converge, et que $\int_0^{+\infty} (1 - F(t)) dt = E(X)$.

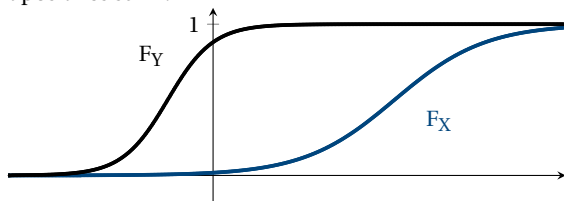
3. On étudie la réciproque.

On suppose dans cette question que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1 - F(t)) dt$ converge.

- Montrer que l'application $\varphi: x \rightarrow \int_0^x t f(t) dt$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Montrer en utilisant $(\bullet)$ que φ est majorée.
- En déduire que $E(X)$ existe et que $E(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F(t)) dt$.

4. Adapter le raisonnement pour montrer que si X admet un moment d'ordre 2, alors $E(X^2) = 2 \int_0^{+\infty} t(1 - F(t)) dt$.

Exercice 25. ♦♦ Soient X et Y deux variables à densité. On suppose que X et Y admettent une espérance et des densités strictement positives sur $\mathbb{R}$. #LD15



- Soit F_X la fonction de répartition de X . Quelle est la loi de $F_X^{-1}(U)$ où $U \sim \mathcal{U}([0; 1])$?
- La figure ci-contre est la représentation graphique des fonctions de répartition de X et Y . Quelle est la variable dont l'espérance est la plus grande? Justifier.

Exercice 26. ♦♦♦ Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X .

LD29

1. Montrer que la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = F(x+1) - F(x)$$

est une densité de probabilité.

2. Soit Y une variable aléatoire admettant pour densité de probabilité g .
Montrer que si X admet une espérance alors Y en admet également une et dans ce cas $E(Y) = E(X) - \frac{1}{2}$.

Exercice 27. ♦♦ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

LD19

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}.$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
On note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ dont f est une densité de probabilité.
2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence du moment d'ordre m de la variable X . Donner la valeur de l'espérance de X .
3. Pour tout entier n non nul et tout réel x , on pose : $H_n(x) = \int_{-\infty}^x f(t) (1 + te^{-n|t|}) dt$.
Montrer que H_n est une fonction de répartition.
4. Soit X_n une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, dont H_n est la fonction de répartition. Vérifier que pour tout réel x

$$H_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F(x)$$

où F est la fonction de répartition de X .

TD Exercice 28. ♦♦♦ On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions f et g par

LD24

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sin(2\pi \ln(x)) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\ln(x)^2/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. 🗝 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement de variable $u = \ln(t) - n$, justifier la convergence et l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) g(t) dt = 0.$$

2. Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$. Vérifier que $X = e^Y$ est une variable aléatoire à densité dont g est une densité.
3. Pour tout réel $\lambda \in]-1; 1[$, on définit la fonction $h_\lambda = (1 + \lambda f) \cdot g$. Vérifier que h_λ est une densité de probabilité.
4. a) Justifier que X admet des moments à tout ordre.
b) Soit Y_λ une variable aléatoire dont une densité est donnée par h_λ . Démontrer que Y_λ admet des moments à tout ordre et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E(Y_\lambda^n) = E(X^n).$$

Lois à densité usuelles

*J'étais alors en proie à la mathématique.
Temps sombre! enfant ému du frisson poétique,
Pauvre oiseau qui heurtait du crâne mes barreaux,
On me livrait tout vif aux chiffres, noirs bourreaux; [...]
On me tordait depuis les ailes jusqu'au bec,
Sur l'affreux chevalet des X et des Y; [...]*

VICTOR HUGO, *Les Contemplations*, 1856

1 Lois uniformes continues

Définition, espérance et variance

Définition 1 (lois uniformes continues)

Soient $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On dit que X suit la **loi uniforme continue** sur l'intervalle $[a; b]$, noté $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$, si X a pour densité

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque. Le facteur $\frac{1}{b-a}$ est imposé par le fait qu'une densité est toujours d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2 (fonction de répartition et espérance d'une loi uniforme)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([a; b])$. La fonction de répartition de X est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b. \end{cases}$$

De plus, X admet une espérance et une variance avec

$$\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

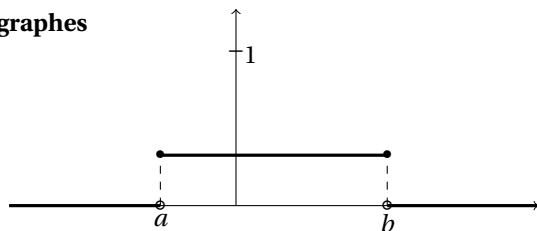
Remarque. Comme X est une variable aléatoire bornée, X admet des moments à tout ordre.

Exemple de modélisation

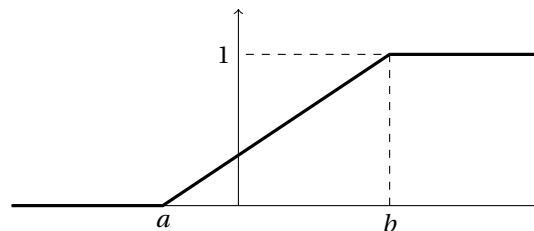
Souvent lorsqu'on ne précise pas, un tirage *au hasard* correspond à une loi uniforme.

Par exemple, choisir un nombre réel *au hasard* dans $[0; 1]$ signifie choisir un nombre suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([0; 1])$.

Les graphes



Une densité de $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$



La fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$

Transformation affine et lois uniformes

X suit une loi uniforme sur $[0; 1]$
si et seulement si
 $Y = (b - a)X + a$ suit une loi uniforme sur $[a; b]$.

Exercice 1



Les questions sont indépendantes.

1. Vrai ou faux? Si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([-1; 1])$, alors U et $-U$ ont même loi?
2. Si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1])$ et $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a < b$, quelle est la loi de $Y = [(b - a + 1)U] + a$?

#LDU2

2

Lois exponentielles

Définition, espérance et variance

Définition 3 (lois exponentielles)

Soient $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$.

On dit que X suit la **loi exponentielle** de paramètre λ , notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si X a pour densité

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

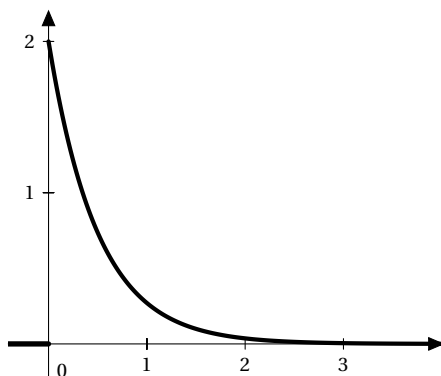
Proposition 4 (fonction de répartition et espérance d'une loi exponentielle)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. La fonction de répartition de X est

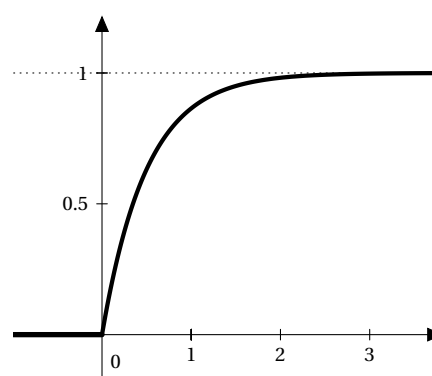
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

De plus, X admet une espérance et une variance avec $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $\mathbf{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Les graphes



Une densité de $X \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$



La fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$

Exemples de modélisation

Proposition 5 (loi sans mémoire)

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Alors X est une **variable aléatoire sans mémoire**. C'est-à-dire :

$$\forall s, t \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{P}([X > t]) = \mathbf{P}_{[X > s]}([X > s + t]).$$

Remarque. On parle aussi de propriété de *non vieillissement*.

Plus généralement, la loi exponentielle intervient dans les processus continus sans mémoire comme le temps d'émission d'un électron, le temps de vie d'un composant électronique, ...

Transformation linéaire et lois exponentielles

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$, $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et $Y = \frac{1}{\lambda} X$. On a vu la relation entre les fonctions de répartition :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = F_X(\lambda t) \Rightarrow f_Y(t) = \lambda f_X(\lambda t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Retenons :

X suit une loi exponentielle de paramètre 1
si et seulement si
 $Y = \frac{1}{\lambda} X$ suit une loi exponentielle de paramètre λ .

Exercice 2



♦ Moments de la loi exponentielle

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

1. a) Justifier que I_n est convergente et donner une relation simple entre I_{n+1} et I_n .
b) En déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Conclure en justifiant que la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ admet un moment à tout ordre et retrouver les expressions de l'espérance et la variance.

#LDU5

Exercice 3



♦ 🎵 Simulation de la loi exponentielle par la méthode d'inversion

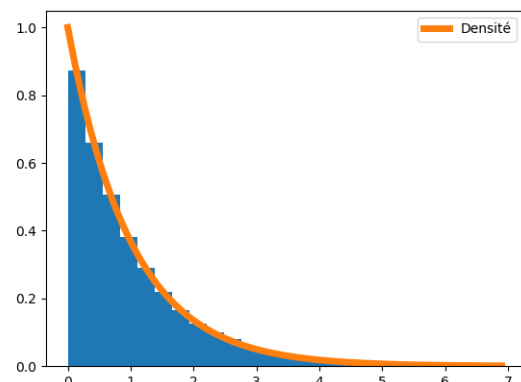
1. 🎧 Soient $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1])$ et $X = -\ln(U)$. Donner la loi de X .
2. Compléter le programme ci-dessous qui prend en argument λ et simule une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

#LDU6

Editeur

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import numpy.random as rd

def Simulation(Lda):
    U=rd.rand(50000)
    L= .....
    plt.hist(L, 25, density=True)
    # Création de l'histogramme
    x=np.linspace(0,max(L),200)
    y= ... # pour la densité
    plt.plot(x,y,linewidth=5,label="Densité")
    plt.legend()
    plt.show()
```



Avant de donner la définition, reprenons un exercice classique sur la définition et les propriétés de la fonction Γ définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Exercice 4



♦ Propriétés de la loi Γ

1. Justifier que Γ est une application bien posée sur $\mathbb{R}_*^+$.
2.
 - a) Préciser $\Gamma(1)$.
 - b) En utilisant l'intégrale de Gauss, démontrer que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
3.
 - a) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
 - b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

#LDU7

Définition, espérance et variance

Définition 6 (lois γ)

Soient $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, une variable à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et $v \in \mathbb{R}_*^+$.

On dit que X suit une **loi γ de paramètre v** , noté $X \hookrightarrow \gamma(v)$, si X a pour densité

$$f_v: t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(v)} t^{v-1} e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

Remarques.

- Le facteur $1/\Gamma(v)$ permet justement de s'assurer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_v(t) dt$ vaut bien 1 pour avoir une densité.
- Remarquons que la loi $\gamma(1)$ n'est autre que la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ qui s'utilise pour modéliser des durées de vie sans vieillissement. Nous verrons au chapitre suivant l'intérêt de ces lois lors de sommes de variables aléatoires.

Les graphes

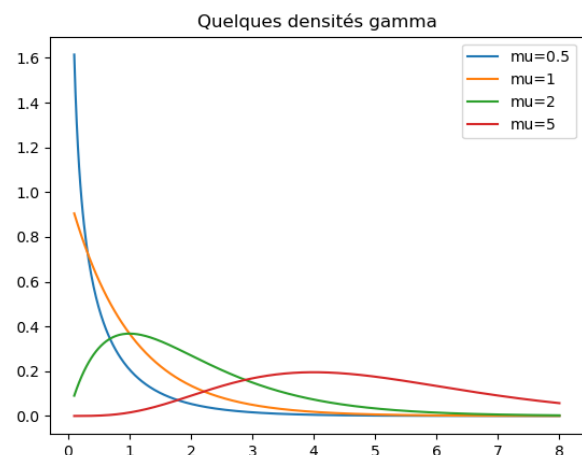
Ci-dessous, le tracé avec Python de quelques densités pour différentes valeurs du paramètre v . Noter l'utilisation de la bibliothèque **spicy** qui permet, entre autres, d'importer des fonctions de référence (dans notre cas, la fonction Γ).

```
import scipy.special as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.clf()
```

```
X=np.linspace(0.1,8,400)
for mu in [0.5, 1, 2,5] :
    Gamma=sp.gamma(mu)
    Y=X**(mu-1)*np.exp(-X)/Gamma
```

```
plt.plot(X,Y)
plt.legend(['mu=0.5', 'mu=1', 'mu=2','mu=5'])
plt.title('Quelques densités gamma')
plt.show()
```

Éditeur



Proposition 7 (espérance et variance d'une loi γ)

Si X est une variable aléatoire suivant une loi $\gamma(v)$ alors X admet une espérance et une variance avec

$$\mathbf{E}(X) = v \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = v.$$

Définition, espérance et variance

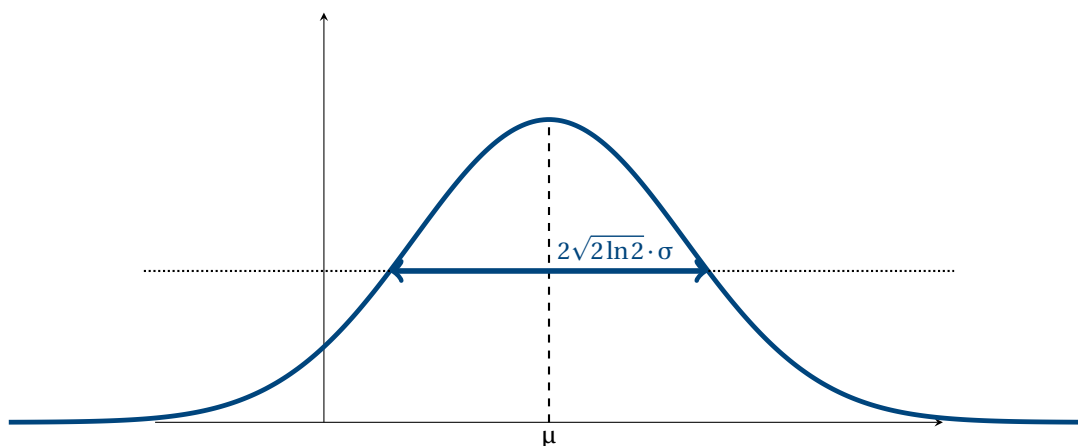
Définition 8 (lois normales)

Soient $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_*^+$.

On dit que X suit la **loi normale** de paramètres μ, σ , noté $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, si X a pour densité

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{\mu, \sigma}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Ci-dessous, l'allure en cloche de la courbe de la densité $f_{\mu, \sigma}$ de la loi normale. Plus σ est proche de 0^+ , plus la courbe est étroite.



Transformation affine et lois normales

Proposition 9 (loi normale et transformation affine)

Soient $\sigma \in \mathbb{R}_*^+$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$.

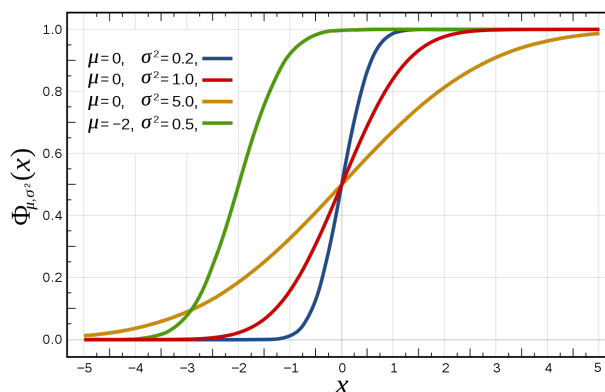
Alors la variable aléatoire $Y = \sigma X + \mu$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$.

Plus généralement, toute transformation affine d'une loi normale est encore une loi normale.

Remarque. Dans la suite, $\mathcal{N}(0; 1)$ désigne la **loi normale centrée réduite**. La densité est $f: t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$.

Il est d'usage de noter Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On démontre qu'il n'existe pas d'expression avec les fonctions usuelles de Φ . Retenons les relations suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) + \Phi(-x) = 1 \quad \text{et} \quad \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$



Espérance et variance

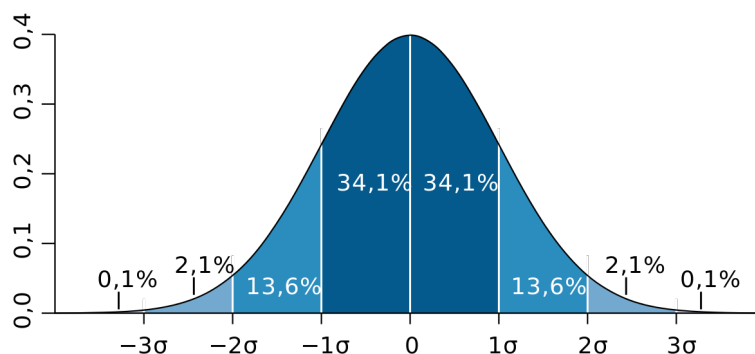
Proposition 10 (espérance et variance d'une loi normale)

Si X est une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, alors X admet une espérance et une variance avec

$$E(X) = \mu \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2.$$

Remarque. Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, alors on obtient une variable aléatoire centrée réduite via

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1).$$



Exercice 5



◇ Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(2; 9)$. Approximer $\mathbf{P}\left([X \leq -1] \cup [X \geq 5]\right)$ à l'aide de $\Phi(1) \approx 0.8413$.

#LDU8

Modélisation

Nous verrons l'importance de la loi normale grâce au théorème limite central au chapitre « Convergences des variables aléatoires ».

Les lois normales sont utilisées dans de nombreux domaines des mathématiques. Les mathématiques financières en font une large utilisation (parfois abusive). Citons, par exemple, le modèle de Black-Scholes pour l'évolution d'une action en bourse.

Autres lois classiques

Voici une sélection de quelques lois classiques qui peuvent être étudiées aux concours.

- | | |
|--------------------|---------------------|
| → Loi de Pareto. | → Loi d'Erlang. |
| → Loi de Cauchy. | → Loi du χ^2 . |
| → Loi de Rayleigh. | → Loi log-normale. |
| → Loi de Weibull. | → ... |
| → Loi de Laplace. | |

Table de la loi normale centrée réduite

z	+0,00	+0,01	+0,02	+0,03	+0,04	+0,05	+0,06	+0,07	+0,08	+0,09
0,0	0,500 00	0,503 99	0,507 98	0,511 97	0,515 95	0,519 94	0,523 92	0,527 90	0,531 88	0,535 86
0,1	0,539 83	0,543 80	0,547 76	0,551 72	0,555 67	0,559 62	0,563 56	0,567 49	0,571 42	0,575 35
0,2	0,579 26	0,583 17	0,587 06	0,590 95	0,594 83	0,598 71	0,602 57	0,606 42	0,610 26	0,614 09
0,3	0,617 91	0,621 72	0,625 52	0,629 30	0,633 07	0,636 83	0,640 58	0,644 31	0,648 03	0,651 73
0,4	0,655 42	0,659 10	0,662 76	0,666 40	0,670 03	0,673 64	0,677 24	0,680 82	0,684 39	0,687 93
0,5	0,691 46	0,694 97	0,698 47	0,701 94	0,705 40	0,708 84	0,712 26	0,715 66	0,719 04	0,722 40
0,6	0,725 75	0,729 07	0,732 37	0,735 65	0,738 91	0,742 15	0,745 37	0,748 57	0,751 75	0,754 90
0,7	0,758 04	0,761 15	0,764 24	0,767 30	0,770 35	0,773 37	0,776 37	0,779 35	0,782 30	0,785 24
0,8	0,788 14	0,791 03	0,793 89	0,796 73	0,799 55	0,802 34	0,805 11	0,807 85	0,810 57	0,813 27
0,9	0,815 94	0,818 59	0,821 21	0,823 81	0,826 39	0,828 94	0,831 47	0,833 98	0,836 46	0,838 91
1,0	0,841 34	0,843 75	0,846 14	0,848 49	0,850 83	0,853 14	0,855 43	0,857 69	0,859 93	0,862 14
1,1	0,864 33	0,866 50	0,868 64	0,870 76	0,872 86	0,874 93	0,876 98	0,879 00	0,881 00	0,882 98
1,2	0,884 93	0,886 86	0,888 77	0,890 65	0,892 51	0,894 35	0,896 17	0,897 96	0,899 73	0,901 47
1,3	0,903 20	0,904 90	0,906 58	0,908 24	0,909 88	0,911 49	0,913 09	0,914 66	0,916 21	0,917 74
1,4	0,919 24	0,920 73	0,922 20	0,923 64	0,925 07	0,926 47	0,927 86	0,929 22	0,930 56	0,931 89
1,5	0,933 19	0,934 48	0,935 74	0,936 99	0,938 22	0,939 43	0,940 62	0,941 79	0,942 95	0,944 08
1,6	0,945 20	0,946 30	0,947 38	0,948 45	0,949 50	0,950 53	0,951 54	0,952 54	0,953 52	0,954 49
1,7	0,955 43	0,956 37	0,957 28	0,958 18	0,959 07	0,959 94	0,960 80	0,961 64	0,962 46	0,963 27
1,8	0,964 07	0,964 85	0,965 62	0,966 37	0,967 12	0,967 84	0,968 56	0,969 26	0,969 95	0,970 62
1,9	0,971 28	0,971 93	0,972 57	0,973 20	0,973 81	0,974 41	0,975 00	0,975 58	0,976 15	0,976 70
2,0	0,977 25	0,977 78	0,978 31	0,978 82	0,979 32	0,979 82	0,980 30	0,980 77	0,981 24	0,981 69
2,1	0,982 14	0,982 57	0,983 00	0,983 41	0,983 82	0,984 22	0,984 61	0,985 00	0,985 37	0,985 74
2,2	0,986 10	0,986 45	0,986 79	0,987 13	0,987 45	0,987 78	0,988 09	0,988 40	0,988 70	0,988 99
2,3	0,989 28	0,989 56	0,989 83	0,990 10	0,990 36	0,990 61	0,990 86	0,991 11	0,991 34	0,991 58
2,4	0,991 80	0,992 02	0,992 24	0,992 45	0,992 66	0,992 86	0,993 05	0,993 24	0,993 43	0,993 61
2,5	0,993 79	0,993 96	0,994 13	0,994 30	0,994 46	0,994 61	0,994 77	0,994 92	0,995 06	0,995 20
2,6	0,995 34	0,995 47	0,995 60	0,995 73	0,995 85	0,995 98	0,996 09	0,996 21	0,996 32	0,996 43
2,7	0,996 53	0,996 64	0,996 74	0,996 83	0,996 93	0,997 02	0,997 11	0,997 20	0,997 28	0,997 36
2,8	0,997 44	0,997 52	0,997 60	0,997 67	0,997 74	0,997 81	0,997 88	0,997 95	0,998 01	0,998 07
2,9	0,998 13	0,998 19	0,998 25	0,998 31	0,998 36	0,998 41	0,998 46	0,998 51	0,998 56	0,998 61
3,0	0,998 65	0,998 69	0,998 74	0,998 78	0,998 82	0,998 86	0,998 89	0,998 93	0,998 97	0,999 00
3,1	0,999 03	0,999 06	0,999 10	0,999 13	0,999 16	0,999 18	0,999 21	0,999 24	0,999 26	0,999 29
3,2	0,999 31	0,999 34	0,999 36	0,999 38	0,999 40	0,999 42	0,999 44	0,999 46	0,999 48	0,999 50
3,3	0,999 52	0,999 53	0,999 55	0,999 57	0,999 58	0,999 60	0,999 61	0,999 62	0,999 64	0,999 65
3,4	0,999 66	0,999 68	0,999 69	0,999 70	0,999 71	0,999 72	0,999 73	0,999 74	0,999 75	0,999 76
3,5	0,999 77	0,999 78	0,999 78	0,999 79	0,999 80	0,999 81	0,999 81	0,999 82	0,999 83	0,999 83
3,6	0,999 84	0,999 85	0,999 85	0,999 86	0,999 86	0,999 87	0,999 87	0,999 88	0,999 88	0,999 89
3,7	0,999 89	0,999 90	0,999 90	0,999 90	0,999 91	0,999 91	0,999 91	0,999 92	0,999 92	0,999 92
3,8	0,999 93	0,999 93	0,999 93	0,999 94	0,999 94	0,999 94	0,999 94	0,999 95	0,999 95	0,999 95
3,9	0,999 95	0,999 95	0,999 96	0,999 96	0,999 96	0,999 96	0,999 96	0,999 96	0,999 97	0,999 97
4,0	0,999 97	0,999 97	0,999 97	0,999 97	0,999 97	0,999 97	0,999 98	0,999 98	0,999 98	0,999 98
4,1	0,999 98	0,999 98	0,999 98	0,999 98	0,999 98	0,999 98	0,999 98	0,999 98	0,999 99	0,999 99
4,2	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99
4,3	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99
4,4	0,999 99	0,999 99	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00
4,5	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00
4,6	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00
4,7	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00
4,8	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00
4,9	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00



Exercices



Lois exponentielles

Exercice 6. ♦ Médiane de la loi exponentielle

LDU33

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ . Justifier l'existence et déterminer les réels t qui minimisent la fonction

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{E}(|X - t|).$$

TD Exercice 7. ♦♦ Simulation d'une géométrie à partir de la loi exponentielle

LDU18

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose $Y = \lfloor X \rfloor + 1$.

1. Montrer $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - e^{-\lambda})$.
2. En déduire un programme qui simule une loi géométrique de paramètre p à partir de la loi exponentielle.

Exercice 8. ♦♦ Soit X , une variable aléatoire dont f est une densité paire et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que $X^2 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer la densité f . # LDU19

TD Exercice 9. ♦♦♦ Loi sans mémoire

LDU20

1. Préliminaires

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, non nulle et vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) \cdot f(y).$$

- a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.
 - b) i) Exprimer $f(n)$ où $n \in \mathbb{N}$ à l'aide de n et $f(1)$. En déduire $f(n)$, où $n \in \mathbb{Z}$.
ii) Déterminer ensuite une expression de $f(p/q)$, où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$.
 - c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier la limite de $\lfloor nx \rfloor / n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
 - d) En déduire $f(x)$, où $x \in \mathbb{R}$, en fonction de $f(1)$.
2. a) Montrer que toute v.a. X de loi exponentielle vérifie la relation :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{P}_{[X>y]}(X > x+y) = \mathbf{P}(X > x).$$
 - b) Réciproquement, soit X une v.a. à densité définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation précédente et telle que sa fonction de répartition F soit nulle sur $]-\infty, 0]$.
 - i) Montrer que s'il existe $x_0 > 0$ tel que $\mathbf{P}(X > x_0) = 0$, alors pour tout $x > 0$, $\mathbf{P}(X > x) = 0$.
 - ii) On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{P}(X > x) \neq 0$. Montrer que X suit une loi exponentielle.

Lois gamma

Exercice 10. ♦ Variables stochastiquement inférieures, exemple avec la loi gamma

LDU29

Soient v et μ deux réels tels que $\mu > v > 0$ et X, Y deux variables aléatoires de lois :

$$X \hookrightarrow \gamma(v) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \gamma(\mu).$$

1. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathbf{P}(X \leq x) \geq \mathbf{P}(Y \leq x)$.
2. Préciser pour quelle valeur de x la différence $\mathbf{P}(X \leq x) - \mathbf{P}(Y \leq x)$ est maximale.

Exercice 11. ♦♦♦ Convexité et application à la continuité de la fonction Γ

LDU30

• Un résultat préliminaire

1. Soit φ , une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et convexe sur un intervalle I .

- a) Justifier que pour tous $x, \alpha \in I$,

$$\varphi(x) \geq \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)(x - \alpha).$$

- b) En déduire que si X est une variable aléatoire à valeurs dans I telle que $\varphi(X)$ et X admettent une espérance, alors

$$\mathbf{E}(\varphi(X)) \geq \varphi(\mathbf{E}(X)).$$

• Application

On définit la fonction Γ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}_*^+$, donner une relation simple entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$.
3. Dans la suite, Z désigne une variable aléatoire suivant la loi gamma de paramètre x .
 - a) Soit $h \in \mathbb{R}_*^+$. Préciser la convexité/concavité de la fonction $t \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto t^h$.
 - b) Comparer les réels $\mathbf{E}(Z^h)$ et x^h en fonction de $h \in \mathbb{R}_*^+$.
4. En déduire que :

$$\forall x \in]1; +\infty[, \quad \forall h \in]0; 1[, \quad x^h \Gamma(x) \geq \Gamma(x+h) \geq (x-1)^h \Gamma(x).$$

- a) Justifier la continuité de la fonction Γ sur $]1; +\infty[$.
- b) En déduire la continuité sur $]0; +\infty[$.

Lois normales

TD Exercice 12. ♦♦ 🎵 Moments de la loi normale

LDU15

1. Justifier l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}$ de $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2/2} dx$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = (n+1)I_n$.
3. Vérifier que $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
4. Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^p p!} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = 2^p p!.$$

5. Conclure en donnant les moments de la loi normale centrée réduite à tout ordre.

Exercice 13. ♦ Soient $X \mapsto \mathcal{N}(0; 4)$ et $Y = |X|$.

LDU12

1. Justifier que Y est une variable aléatoire à densité et préciser une densité.
2. Déterminer l'espérance et la variance de Y .

Exercice 14. ♦ Soient X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, bornée ainsi que sa dérivée. # LDU13

1. Justifier que les variables $Xg(X)$ et $g'(X)$ admettent des espérances.
2. Établir l'égalité $\mathbf{E}(Xg(X)) = \mathbf{E}(g'(X))$.
3. En admettant que la relation précédente demeure lorsque g est seulement de classe $\mathcal{C}^1$, déduire la valeur des moments de X .

TD Exercice 15. ♦ Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

LDU14

1. Donner la loi de $Y = |X|$. Préciser son espérance et sa variance.
2. Trouver la fonction de répartition de $Z = \frac{X+|X|}{2}$. La variable Z est-elle à densité?

Exercice 16. ♦♦ 🎵 On note Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

LDU17

1. Montrer grâce à une intégration par partie, puis un encadrement d'intégrale, que

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) e^{-x^2/2} \leq 1 - \Phi(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-x^2/2}.$$

2. En déduire un équivalent de $1 - \Phi(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Compléments

Exercice 17. ♦♦ 🎵 Loi de Pareto

LDU37

Soient α et a des réels strictement positifs, et x_0 et λ des réels. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \mathbf{1}_{]x_0+a, +\infty[}(x) \lambda \left(\frac{a}{x-x_0} \right)^{\alpha+1}.$$

1. a) Déterminer λ pour que f soit une densité d'une variable aléatoire X . On dit alors que X suit une loi de Pareto de paramètre (α, a, x_0) .
 b) Déterminer la fonction de répartition de X .
 c) Étudier l'existence et la valeur éventuelle de $\mathbf{E}(X)$.
 d) Étudier l'existence et la valeur éventuelle de $\mathbf{V}(X)$.
2. Soient X une variable aléatoire suivant une loi de Pareto de paramètre (α, a, x_0) et des réels $r > 0$ et s . Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Y = rX + s$?
3. a) Soient X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre strictement positif μ et deux réels $\beta > 0$ et $\gamma > 1$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = \beta \cdot X^\gamma$?

- b) Étudier la réciproque de la propriété ainsi démontrée.
 c) Soient Z une variable aléatoire qui suit une loi de Pareto de paramètre $(\alpha, a, 0)$, et c un réel strictement positif. Quelle est la loi de la variable aléatoire Z^c ?

LDU35

TD Exercice 18. ♦♦ ♪ Loi de Cauchy

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

1. a) Montrer que la fonction f est une densité. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .
On considère une variable aléatoire réelle X admettant f pour densité.
 b) Déterminer la fonction de répartition F de X . Tracer l'allure de la courbe représentative de F .
 c) La variable X admet-elle une espérance ?
2. On définit la variable $Y = \frac{1}{X}$. Montrer que X et Y ont la même loi.
3. On définit la variable $Z = \frac{1+X}{1-X}$. Reconnaitre la loi de Z .

Exercice 19. ♦♦♦ Médiane(s) d'une variable aléatoire.

LDU25

Soit X une variable aléatoire à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et admettant une espérance.

1. Justifier qu'il existe un réel m tel que $\mathbf{P}([X \leq m]) = \frac{1}{2}$.
Un tel réel est une médiane de X . Notons dans la suite, $\mathcal{M}(X)$, l'ensemble des médianes de la variable X .
2. Déterminer la ou les médianes d'une variable aléatoire X de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. L'espérance de X est-elle une médiane ?
3. Dans la suite, on souhaite déterminer les réels a qui minimisent la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \varphi(a) = \mathbf{E}(|X - a|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t - a| f(t) dt.$$

- a) Justifier que φ est une fonction convexe.
 - b) On définit la fonction G sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_{-\infty}^x t f(t) dt$. Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.
 - c) En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer φ' à l'aide de la fonction de répartition F de X .
 - d) Conclure sur les réels qui minimisent φ .
4. Démontrer que l'ensemble des médianes d'une variable à densité X est un segment.
Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si pour tous $x, y \in I$, le segment $[x; y] \subset I$.

Sujets

Exercice 20. ♦♦

d'après oral HEC 2012 # LDU36

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. On note f la densité continue de X et Φ , la fonction de répartition.

1. Montrer que X admet des moments de tous ordres et établir pour tout entier naturel n , la formule :

$$\mathbf{E}(X^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{(2p)!}{2^p p!} & \text{si } n = 2p \text{ est pair } (p \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

2. a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_*^+$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x f(x) \Phi(ax) dx$ est convergente. On note alors pour tout $a > 0$:

$$F(a) = \int_0^{+\infty} x f(x) \Phi(ax) dx.$$

- b) Exprimer pour tout $a \in \mathbb{R}_*^+$, $F(a)$ en fonction de a .
3. Soit a un réel strictement positif fixé. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2f(x)\Phi(ax)$.
 a) Vérifier que g peut être considérée comme une densité de probabilité d'une variable aléatoire Y .
 b) Calculer $\mathbf{E}(Y^2)$ et exprimer la variance $\mathbf{V}(Y)$ en fonction de a .

Exercice 21. ♦♦

d'après EDHEC 2018 # LDU24

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$ et on pose $Y = \sqrt{X}$.

1. On rappelle qu'en Python, `rd.exponential(a)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $1/a$.
Écrire une (ou des) commande(s) Python permettant de simuler Y .
2. a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y .

- b) En déduire une densité f_Y de Y .
3. a) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite.
b) En déduire que Y a une espérance et donner sa valeur.
4. On pose $U = 1 - e^{-X/2}$.
a) Vérifier que $U(\Omega)$ prend ses valeurs dans $[0, 1[$.
b) Déterminer la fonction de répartition F_U de U et reconnaître la loi de U .
c) Exprimer X en fonction de U , puis en déduire une simulation Python de Y utilisant uniquement la commande `rd.rand`.

Exercice 22. ♦♦

d'après EDHEC 2015, exercice 2 #LDU23

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite (d'espérance nulle et de variance égale à 1) et on note Φ la fonction de répartition de X .

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire. On note F_Y la fonction de répartition de Y .

1. a) Exprimer, pour tout réel x positif, $F_Y(x)$ à l'aide de $\Phi(x)$. En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et donner une densité f_Y de Y .
b) Montrer que Y possède une espérance et donner sa valeur.
c) Montrer que Y possède une variance et donner sa valeur.
2. On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

- a) Vérifier, en justifiant que l'on peut procéder au changement de variable $u = \sqrt{2t}$, que :

$$\int_0^{+\infty} g(t) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du.$$

- b) En déduire que g peut être considérée comme une densité.

On considère, dans la suite, une variable aléatoire Z de densité g et on note G sa fonction de répartition.

3. a) On pose $T = \sqrt{2Z}$ et on admet que T est une variable aléatoire à densité. Exprimer la fonction de répartition F_T de T en fonction de G puis en déduire une densité f_T de T et vérifier que T suit la même loi que Y .
b) En déduire que Z possède une espérance et donner sa valeur.
4. Écrire une commande python permettant de simuler la variable aléatoire Z .
5. On considère les commandes Python suivantes :

Editeur

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
n=5000
w=rd.exponential(1,n)
s=0
for i in range(n):
    s+=w[i]**(3/2)
s=s/(n*np.pi**(1/2))
```

- a) En remarquant que $x^2 g(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} e^{-x}$, montrer que s contient une valeur approchée de $\int_0^{+\infty} x^2 g(x) dx$, pour peu que l'on entre une valeur de n assez grande.
- b) On admet que $E(X^4) = 3$. Quelle est la valeur exacte de l'intégrale dont il est question ci-dessus?

Fonctions de plusieurs variables

La science consiste à passer d'un étonnement à un autre.

ARISTOTE

Philosophe grec de l'Antiquité (384-322 av. J.-C), disciple de Platon.

1 Définitions et exemples

1.1 Norme euclidienne

Définition 1 (norme euclidienne)

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit la **norme euclidienne** de x par

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Règles de calculs

- $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^n}.$
- Homogénéité : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|.$
- Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$
- Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$
Il y a égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires.

1.2 Fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

Exemples.

- Avec les fonctions usuelles : $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + xy - y^3, \quad g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \ln(1 + x^2 e^{yz}), \quad h : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|.$
- Les fonctions polynomiales, les fonctions affines ...

1.3 Graphes et lignes de niveau

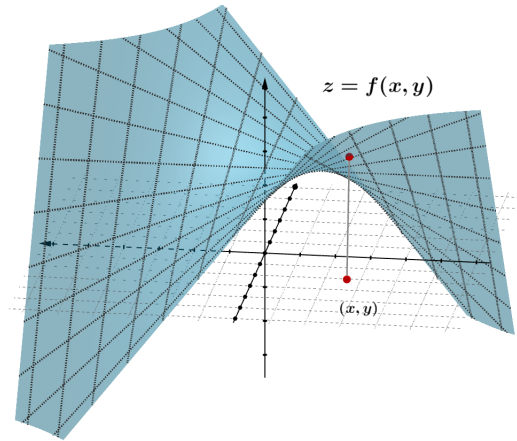
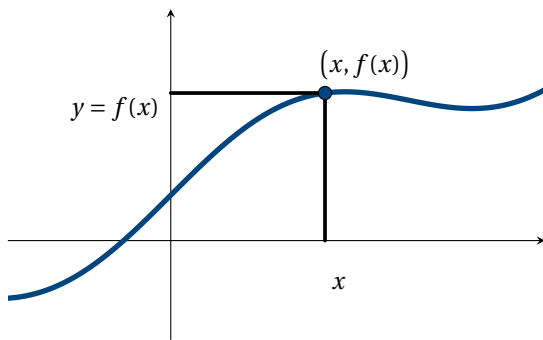
Définition 2 (graphe)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Le **graphe** de f est la partie de $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par

$$\{(x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y = f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

• Graphe d'une fonction d'une variable réelle (rappel)

Pour $n = 1$, on retrouve la courbe représentative d'une fonction.



• Graphe d'une fonction de deux variables

Ci-contre, la surface représentative de la fonction f :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy/10 + 5.$$

Suivant le même principe que pour le tracé de la courbe représentative d'une fonction d'une variable réelle, le code Python suivant permet de tracer la surface représentative d'une fonction de deux variables.

Editeur

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

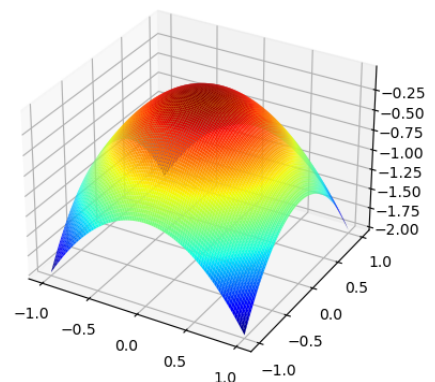
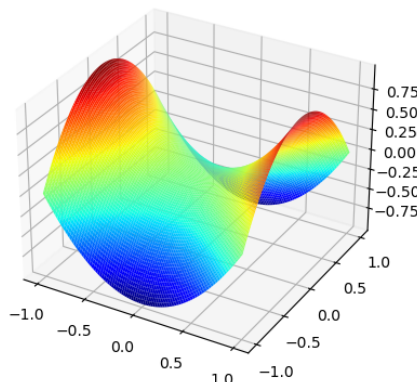
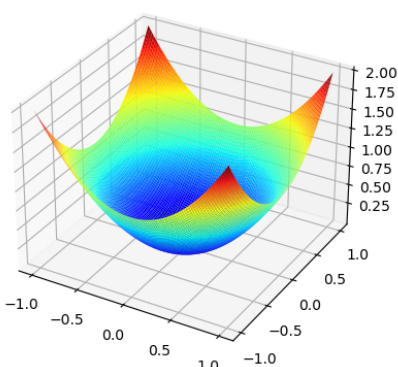
def f(x,y):
    return x**2+y**2
    # Définition de la fonction f

x = np.linspace(-1, 1, 100)
    # 100 valeurs pour la variable x espacées régulièrement entre -1 et 1
y = np.linspace(-1, 1, 100) # De même pour la variable y

X, Y = np.meshgrid(x, y)
    # Tableau contenant les points (xi,yi) où xi et yi sont calculés précédemment
Z = f(X,Y)
    # Calcul des images pour tous les points (xi,yi)

fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection='3d')
ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1, cstride=1, cmap='jet', edgecolor='none') # paramètres d'affichage
```

Exemples. Illustrons ce code à l'aide de trois exemples typiques de fonctions polynomiales de degré 2.



Editeur

```
def f1(x, y):
    return x**2 + y**2
```

```
def f2(x, y):
    return x**2 - y**2
```

```
def f3(x, y):
    return -x**2 - y**2
```

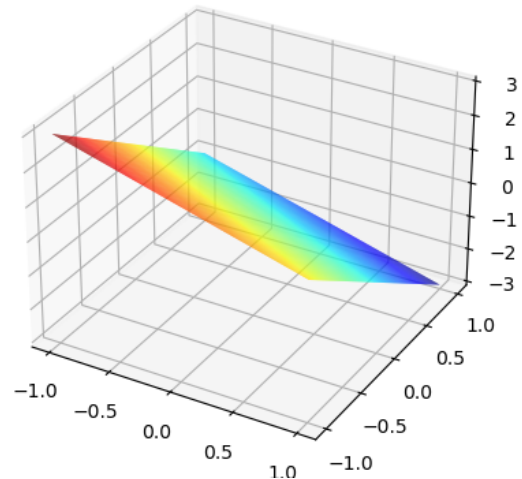
Exemple. Cas des fonctions affines

- Pour $n = 1$, le graphe d'une fonction affine sur $\mathbb{R}$ correspond à une droite.
- Pour $n = 2$, le graphe d'une fonction affine sur $\mathbb{R}^2$ correspond à un plan d'équation

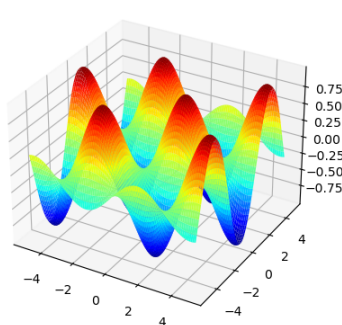
$$z = ax + by + c.$$

Ci-contre, le plan d'équation $z + x + 2y = 0$ obtenu à partir de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = -x - 2y$.

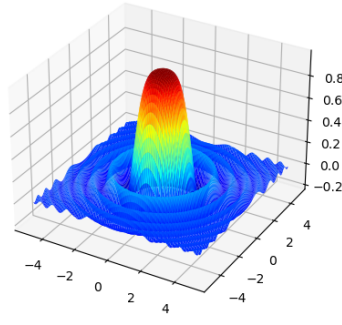
- Dans le cas général, on obtient "un hyperplan affine", c'est-à-dire un translaté d'un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$.



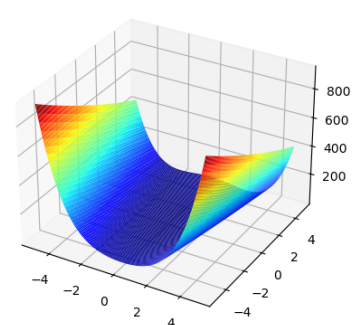
Exemples. Donnons de nouveaux graphes pour illustrer la diversité des cas possibles.



$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sin(x)\cos(y)$$



$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 0.01}$$



$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (1-x)^2 + (y-x^2)^2$$

Définition 3 (lignes de niveau)

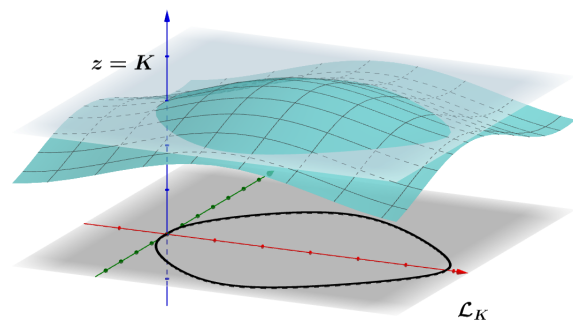
Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

La **ligne de niveau** de f associée au réel K est la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\mathcal{L}_K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = K\}.$$

Pour obtenir la ligne de niveau $\mathcal{L}_K$ d'une fonction, il suffit d'intersecter le plan horizontal $z = K$ avec la surface définie par la fonction.

Ci-dessous, un code python pour tracer la surface et les lignes de niveau.



Editeur

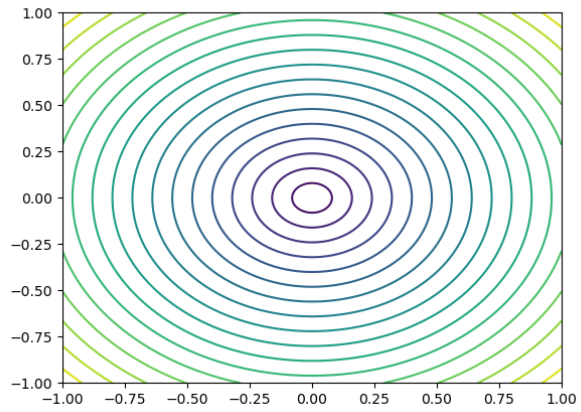
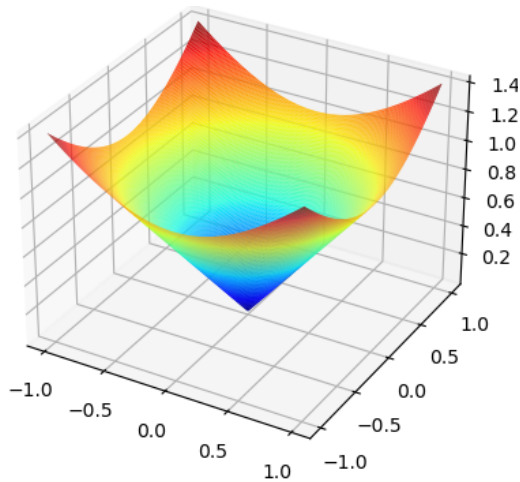
```
def f(x,y):
    return np.sqrt(x**2+y
    **2)

x=np.linspace(-1,1,200)
y=np.linspace(-1,1,200)
X , Y = np.meshgrid(x,y)
Z = f(X,Y)
```

Editeur

```
graphe = plt.contour(X,Y,Z,20)
# 20 pour obtenir 20 lignes de niveau
plt.show()

fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection='3d')
ax.plot_surface(X,Y,Z, rstride=1, cstride=1, cmap='jet',
    edgecolor='none')
# paramètres d'affichage
plt.show()
```



• Les symétries

Dans le cas des fonctions d'une seule variable, nous avons vu que la parité/imparité, la périodicité permettent de simplifier l'étude ou encore de tester la cohérence d'un résultat. Ces idées s'étendent aux fonctions de plusieurs variables.

Voici quelques conditions de symétries.

- | | | | |
|-----|---|---|--|
| I | $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = f(-x, -y)$ | II | $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = -f(-x, -y)$ |
| III | $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = f(y, x)$ | IV | $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = f(-x, y)$ |
| V | $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = -f(-x, y)$ | VI | $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = f(x, -y)$ |
| VII | $\forall a \in \mathbb{R}^2 \quad f(a) = \varphi(\ a\)$ | avec $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. | |

✧ Pour chacune des fonctions suivantes, préciser si la fonction vérifie une des symétries parmi I à VII.

Exercice 1

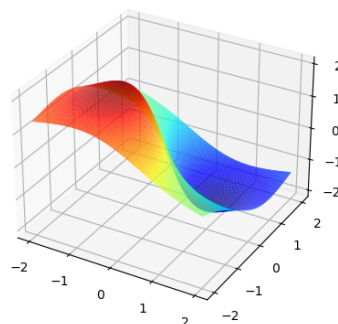
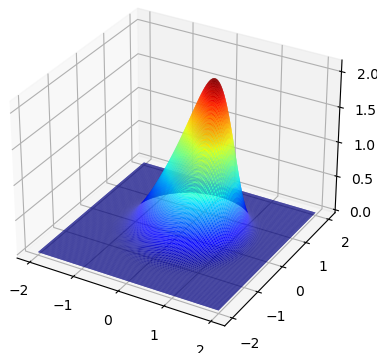
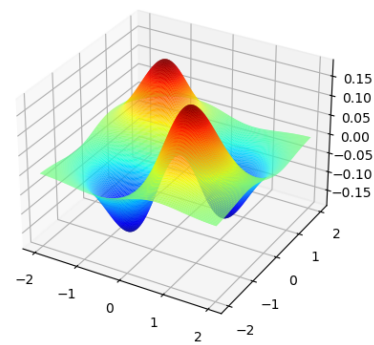
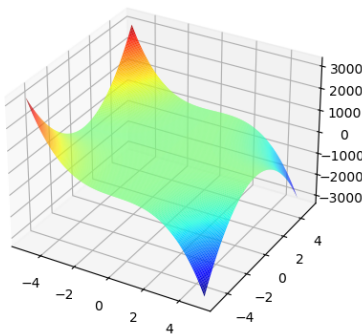
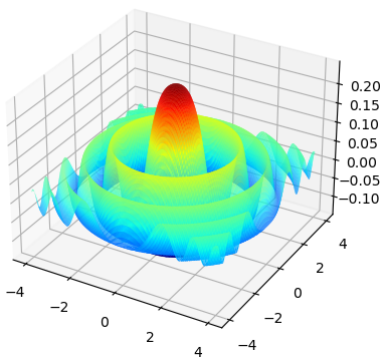


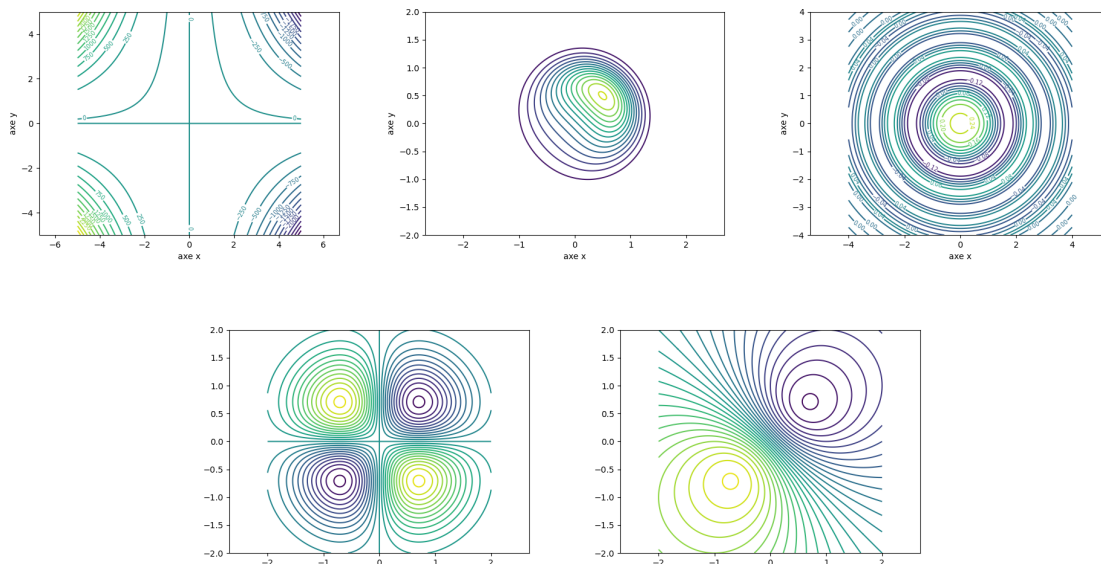
$$f: (x, y) \mapsto \frac{\cos(x^2 + y^2)}{4 + x^2 + y^2}, \quad g: (x, y) \mapsto 5xy - x^3y^2, \quad h: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{-(x^2 + y^2)^2 + x + y}$$

$$i(x, y) = -xy \exp(-x^2 - y^2), \quad j(x, y) = -3(x + y)/(1 + x^2 + y^2).$$

Associer à chaque fonction son graphe et ses lignes de niveau. Comment traduire géométriquement les symétries?

#FPV1





Remarque. Nous avons utilisé la commande `plt.axis('equal')` pour rendre le repère orthonormé.

1.4 Extrema

Définition 4 (maximum, minimum, extremum)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction.

- On dit que f admet un **maximum** en $a \in \mathbb{R}^n$ si : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) \leq f(a)$.
Dans ce cas, on dit que $f(a)$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}^n$.
- On dit que f admet un **minimum** en $a \in \mathbb{R}^n$ si : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) \geq f(a)$.
Dans ce cas, on dit que $f(a)$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}^n$.
- On dit que f admet un **extremum** en $a \in \mathbb{R}^n$ si f admet un minimum ou un maximum en a .

Exercice 2



♦ 🎵 Déterminer les extrema (s'ils existent) des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{ll}
 f_1(x, y, z) = 2x^2 + 4xy + 2y^2 + 3z^2 - 1, & f_2(x, y, z) = 2xy + y^2 + 2xz - z^2, \\
 f_3(x, y, z) = e^{2xy + y^2 + 2xz - z^2}, & f_4(x, y) = e^{1 - x^2 - y^2}, \\
 f_5(x, y) = \sin(x) \cos(y), & f_6(x, y) = \sin(x + y) \cos(x - y), \\
 f_7(x, y) = \sin(x + y) \cos(x + y). &
 \end{array}$$

FPV2

2.1 Définitions et exemples

Définition 5 (continuité en un point, sur $\mathbb{R}^n$)

- Une fonction f , définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, est continue au point $a \in \mathbb{R}^n$ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_*^+, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon \right).$$

- Une fonction f est continue sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si f est continue en tout point de $\mathbb{R}^n$.

Remarque. C'est exactement la même définition que pour les fonctions d'une variable réelle à l'exception que la valeur absolue a été généralisée par la norme.

Exemples. Continuité de la norme et continuité des applications coordonnées.

2.2 Opérations sur les fonctions continues

Proposition 6 (somme, produit, quotient)

Soient $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues sur $\mathbb{R}^n$ avec g ne s'annulant pas dans le dernier cas,

- alors**
- La somme $f + g$ est continue sur $\mathbb{R}^n$,
 - La fonction $\lambda \cdot f$ est continue sur $\mathbb{R}^n$,
 - La fonction produit $f \cdot g$ est continue sur $\mathbb{R}^n$,
 - La fonction quotient f/g est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Application. Comme les fonctions polynomiales s'obtiennent par combinaisons linéaires et produit des fonctions coordonnées (qui sont continues sur $\mathbb{R}^n$), on démontre ainsi la continuité des fonctions polynomiales.

Exemple. Le produit scalaire canonique $(x, y) \in \mathbb{R}^{n^2} \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est continu.

Proposition 7 (composition)

Soient $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

- Si**
- f continue sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans I , c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \in I$.
 - φ est continue sur I .

Alors la fonction $\varphi \circ f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \varphi(f(x)) \in \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Rédaction d'une continuité

Posons $g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto z\sqrt{(xy)^2 + 3z^4}$.

La fonction $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (xy)^2 + 3z^4$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ en tant que fonction polynomiale à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

La fonction racine carrée : $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Par composition, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \sqrt{(xy)^2 + 3z^4}$ est continue sur $\mathbb{R}^3$.

De plus, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto z$ est continue et, par produit, g est continue sur $\mathbb{R}^3$.



Exercices



Représentations graphiques

Exercice 3. ♦ Tracer les lignes de niveaux des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par

FPV3

$$f(x, y) = 2x - 3y + 1, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 5, \quad h(x, y) = e^{y-x^2}, \quad i(x, y) = xy.$$

Exercice 4. ♦ Tracer quelques lignes de niveau de la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + y \in \mathbb{R}$ sur $[-1; 1]$. En déduire par lecture graphique les extrema de f sur l'ensemble $\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

FPV11

Recherche d'extrema

TD Exercice 5. ♦ ♪ Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy \exp(-x^2 - y^2)$. Déterminer les extrema de f .

FPV12

TD Exercice 6. ♦ ♪ On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = e^x (xe^x + (yx)^2)$.

FPV4

1. ♪ Est-ce que f possède un maximum sur $\mathbb{R}^2$?
2. Étudier la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x, 0)$.
3. ♪ En déduire un minimum pour f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7. ♦ ♪ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

FPV5

1. Comparer $f(-x, -y)$ et $f(x, y)$.
2. Soit $y \in \mathbb{R}^+$, montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, y)$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$. On le note $g(y)$.
3. Étudier la fonction g et vérifier que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ atteint en deux points.

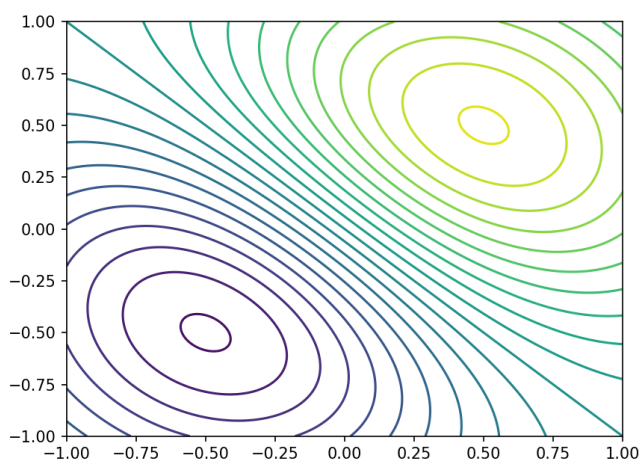
TD Exercice 8. ♦♦ Une étude en coordonnées polaires

FPV31

On définit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = (x + y)e^{-(x^2 + y^2)}.$$

1. On note $\mathcal{C}_r$ le cercle de centre l'origine O et de rayon r . Vérifier que la restriction de f à $\mathcal{C}_r$ admet un maximum et un minimum que l'on explicitera. On note $M(r)$, ce maximum et $m(r)$, le minimum.
2. Étudier les variations de M et de m sur $\mathbb{R}^+$.
3. En déduire que f admet un maximum et un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.
4. Est-ce qu'il existe une hauteur K et une droite incluse dans la ligne de niveau de f de hauteur K ?
Ci-dessous, quelques lignes de niveau pour tester la cohérence du résultat.



Continuité

Exercice 9. Justifier la continuité des fonctions suivantes :

FPV7

$$f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|^{\|x\|} \quad \text{et} \quad g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \int_{x+y^2}^{y^2} \exp(t^2) dt$$

On choisit dans le premier cas, la convention $0^0 = 1$.

Exercice 10. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

FPV8

Montrer que l'application $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto h(\sin(\|x\|))$ admet un minimum et un maximum.

TD Exercice 11. Soient $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ et f une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

FPV9

1. En considérant l'application $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = f(\cos(t), \sin(t)) - f(-\cos(t), -\sin(t)),$$

justifier qu'il existe $(x_0, y_0) \in C$ tel que $f(x_0, y_0) = f(-x_0, -y_0)$.

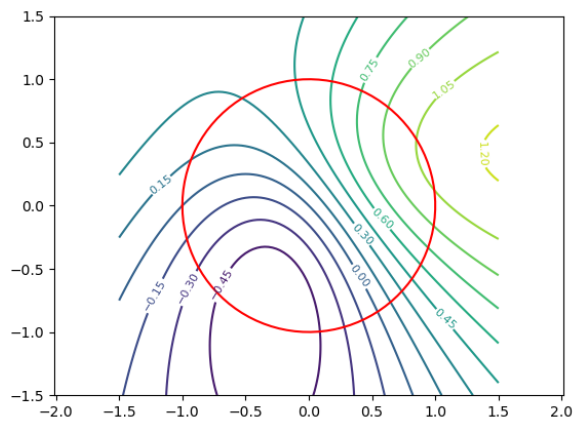
2. Que peut-on en déduire sur l'injectivité de f ?

3. Déterminer explicitement les couples (x_0, y_0) solutions pour la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y + x)/(x^2 + y^2 + 1)$. Calculer $f(x_0, y_0)$ et vérifier la cohérence de vos calculs à l'aide des quelques lignes de niveau de la fonction.

Editeur

```
plt.clf()
x = np.linspace(-1.5, 1.5, 100)
y = np.linspace(-1.5, 1.5, 100)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
Z = (X**2 + Y + X) / (X**2 + Y**2 + 1)

graphe = plt.contour(X, Y, Z,
                    [0, 1/4, 1/2, 1])
plt.axis('equal')
plt.clabel(graphe, inline=1)
# Tracé des lignes de niveau
t = np.linspace(-np.pi, np.pi, 100)
plt.plot(np.cos(t), np.sin(t))
plt.show()
```



Exercice 12.

FPV10

1. Nous savons que si une fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement monotone alors elle est injective. La réciproque est fausse. Pouvez-vous donner le graphe d'un contre-exemple?
2. L'objectif des questions suivantes est de prouver que la réciproque devient vraie si on suppose en plus que h est continue.

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}^2$ est convexe si

$$\forall a, a' \in A, \quad \forall t \in [0; 1] \quad ta + (1 - t)a' \in A.$$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, continue. On définit $f(A)$, la partie de $\mathbb{R}$ par

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

a) Montrer que pour toute partie convexe A , $f(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Pour rappel, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si pour tous $\alpha, \beta \in I$ avec $\alpha < \beta$, on a $[\alpha, \beta] \subset I$.

b) Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ injective et continue.

i) Vérifier que $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < x_2\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

ii) En considérant l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x_1, x_2) = h(x_1) - h(x_2)$, conclure que h est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

Diagonalisation

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen : redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes.^a

GOETHE

Écrivain allemand (1749-1832)

^a. Les mathématiciens sont comme les Français : quoi que vous leur disiez, ils le traduisent dans leur propre langue et le transforment en quelque chose de totalement différent.

1

Définitions

Définition 1 (endomorphisme diagonalisable)

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que φ est **diagonalisable** s'il existe une base de E qui soit composée de vecteurs propres de φ .

Exercice 1



♦ Soient $\varphi, s \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie.

Les questions sont indépendantes.

1. Justifier que si φ est diagonalisable et bijectif, φ^{-1} est aussi diagonalisable.
2. Que dire de φ si ce dernier est diagonalisable et n'admet qu'une seule valeur propre?
3. Que dire de φ si ce dernier est diagonalisable et $\text{rg}(\varphi^2) = 0$?
4. ♦♦ 🔑 Si φ est diagonalisable et s bijective. Justifier que $s \circ \varphi \circ s^{-1}$ est aussi un endomorphisme diagonalisable.

DA1

Définition 2 (matrice diagonalisable)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A est **diagonalisable** s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}.$$

Autrement dit, une matrice est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale. Dans ce cas, P est une matrice dont les colonnes forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A .

Remarque. La matrice A est diagonalisable si les colonnes de P forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A . De plus, le spectre de A s'identifie au spectre de D qui correspond donc aux coefficients diagonaux de D .

Exemples. • Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. On a montré que

$$\text{Sp}(A) = \{1, 2, -4\} \quad \text{avec} \quad E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad E_2(A) = \text{Vect} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E_{-4}(A) = \text{Vect} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

On pose
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

On vérifie numériquement :

Editeur

```
D = np.array([[1, 0, 0], [0, 2, 0], [0, 0, -4]])
#attention à l'ordre des valeurs propres
P = np.array([[1, 4, 2], [1, 3, -3], [1, -2, 2]])
P_inv = np.linalg.inv(P)
```

Editeur

```
>>> print(P @ D @ P_inv)
[[-2.22044605e-16  2.00000000e+00 -1.00000000e+00]
 [ 3.00000000e+00 -2.00000000e+00  0.00000000e+00]
 [-2.00000000e+00  2.00000000e+00  1.00000000e+00]]
```

On retrouve bien A , aux erreurs d'arrondi près.

- La matrice $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 2



♦ A. Vrai ou faux ?

1. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable. ✓ ×
2. Si A est diagonalisable alors A^2 est diagonalisable. ✓ ×
3. Si A^2 est diagonalisable alors A est diagonalisable. ✓ ×
4. Si A est inversible, A est diagonalisable si et seulement si A^{-1} est diagonalisable. ✓ ×

♦ B. Montrer que si $\text{rg}(A^2) < \text{rg}(A)$, alors A ne peut être diagonalisable.

DA2 et 3

Proposition 3 (lien en dimension finie)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice de φ dans une base $\mathcal{B}$ de E . On a l'équivalence entre les énoncés.

- i) L'endomorphisme φ est diagonalisable.
- ii) La matrice A est diagonalisable.

2

Caractérisations

2.1

Version « endomorphisme »

Proposition 4 (caractérisation avec les s.e.p)

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. On a l'équivalence entre les énoncés suivants.

- i) L'espace vectoriel E est somme directe des sous-espaces propres de φ .
- ii) L'endomorphisme φ est diagonalisable.

Exercice 3



◆ Exemple

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Posons pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$, le polynôme $\varphi(P)$ défini par

$$\varphi(P)(x) = P(1)S(x) - P(x) \quad \text{où} \quad S(x) = \sum_{k=0}^n x^k.$$

On vérifie que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$. Montrer que :

$$\mathbb{R}_n[x] = \text{Ker}(\varphi + \text{id}_{\mathbb{R}_n[x]}) \oplus \text{vect}(S).$$

En déduire que φ est diagonalisable.

DA4

Corollaire 5 (caractérisation avec les dimensions)

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. On a l'équivalence entre les énoncés suivants.

- i) $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi)} \dim(E_\lambda(\varphi)) = \dim(E).$
- ii) L'endomorphisme φ est diagonalisable.

Remarque. Comme $\dim(E_\lambda(\varphi)) \geq 1$, on retrouve le fait qu'un endomorphisme de dimension finie a au plus $\dim(E)$ valeurs propres.

Corollaire 6 (cas particulier)

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie.

- Si** φ possède $\dim(E)$ valeurs propres distinctes,
alors φ est diagonalisable et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

! Attention. La réciproque est fautive. Par exemple, pour E de dimension $n \geq 2$, l'endomorphisme id_E est diagonalisable avec seulement une valeur propre (1).

Exercice 4



◆ Exemple

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Posons pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$, le polynôme $\varphi(P)$ défini par

$$\varphi(P)(x) = \frac{1}{n}x(1-x)P'(x) + xP(x).$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on pose $P_k(x) = x^k(1-x)^{n-k}$. Calculer $\varphi(P_k)$.
3. Justifier que φ est diagonalisable.

DA5

2.2 Version « matricielle »

Regroupons et traduisons les résultats précédents.

Théorème 7 (caractérisations)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les énoncés suivants sont équivalents.

- i) La matrice A est diagonalisable.
- ii) Il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A .
- iii) $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est somme directe des sous-espaces propres de A .
- iv) $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n.$

Exemple. 🎵 La matrice Attila.

Python. La commande `eigvals` permet le calcul de valeurs propres. Par exemple :

Editeur

```
import numpy.linalg as al
# On importe la sous-bibliothèque
linalg
A=np.array([[1,3,0],[0,-2,0],[-1,-2,0]])
# On définit la matrice A
print(al.eigvals(A))
```

Console

```
>>> # script executed
[ 0.  1. -2.]
```

Selon ce calcul, 0, 1 et -2 sont toutes les valeurs propres de A. La matrice A est diagonalisable.

Proposition 8 (n valeurs propres)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si** A admet n valeurs propres distinctes,
alors A est diagonalisable et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

3 Compléments

3.1 Cas particuliers

Cas des matrices de taille 2

Rappelons que pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \iff \det(A - \lambda I_2) = 0.$$

Exercice 5



Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonalisable. Notons λ_1 et λ_2 , les deux valeurs propres éventuellement confondues de la matrice A .

1. Montrer que $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(A)$ et $\lambda_1 \lambda_2 = \det(A)$.
2. En minimisant le nombre de calculs, montrer que $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

DA6

Exercice 6



- ♦ Soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Démontrer que A est diagonalisable.

DA7

Cas des matrices triangulaires

Exercice 7



Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. 🗝 Est-ce que les matrices suivantes sont diagonalisables?

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. 🗝 À quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice $M_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ est-elle diagonalisable?

DA8

Cas des matrices symétriques réelles

Théorème 9 (cas symétrique, première version)

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Exercice 8



Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que l'endomorphisme suivant est diagonalisable.

$$\varphi: \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (2x + y + z, x + 3z, x + 3y - z). \end{cases}$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice symétrique appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^n = I_n$. Calculer A^2 .

DA9

Cas des projecteurs

- Soit p , un projecteur de E (avec $p \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $p \neq \text{id}_E$). En reprenant l'étude effectuée au chapitre précédent, on a

$$E = E_0(p) \oplus E_1(p).$$

Les projecteurs sont des endomorphismes diagonalisables. Si $\mathcal{B}$ est une base adaptée à la décomposition en sous-espaces propres, la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale.

En particulier, on constate que $\text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)) = \text{rg}(p)$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\dim E_1(p)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\dim E_0(p)}$

3.2 Pratique de la diagonalisation et applications

En reprenant les méthodes étudiées au chapitre VALEURS PROPRES, VECTEURS PROPRES, traiter les exercices suivants.

Exercice 9



- ♦ Si possible, diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Diagonaliser la matrice A signifie : donner, si possible, une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

DA10

Exercice 10



- ♦ Considérons l'application φ définie sur $\mathbb{R}_2[x]$ par $\varphi(P)(x) = x(1-x)P'(x) + 2xP(x)$.

1. Montrer que φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Exprimer la matrice de φ dans la base canonique. La diagonaliser.
3. Conclure en donnant une base de vecteurs propres de φ .

DA11

Astuce. Dans la recherche des valeurs propres, il ne faut pas oublier que pour une matrice diagonalisable

$$\text{Tr}(A) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda \times \dim(E_{\lambda}(A)).$$

Exercice 11



1. Prouver la remarque précédente.

2. *Application.* Soit A définie par $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$.

Sachant que $\text{rg}(A + 2I_3) = 1$, que peut-on en déduire sur la diagonalisation de A ?

Applications

Exercice 12



✧ Calcul des puissances

Calculer pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p où la matrice A est étudiée à l'exercice 9.

DA13

Exercice 13



✧ Polynôme et « racine carrée » d'une matrice

On pose

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Vérifier que A est diagonalisable et la diagonaliser.
2. En déduire l'inversibilité de A et préciser la matrice A^{-1} .
3. Expliquer comment calculer $Q(A)$ où $Q \in \mathbb{R}[x]$. Préciser un polynôme annulateur non nul de A .
4. Déterminer une matrice B telle que $B^2 = A$.

DA14

Les applications sont nombreuses. Citons par exemple : la recherche du commutant (voir exercice 28, p.105); la résolution des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (voir exercice 29, p.105); la résolution de systèmes différentiels linéaires.



Exercices



Exercice 14. ♦ Montrer que la matrice $A = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

DA15

Exercice 15. ♦ On considère l'application φ , qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ associe $\varphi(P) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}x^k$, où $P^{(k)}$ désigne la dérivée k -ième de P avec la convention $P^{(0)} = P$. # DA23

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

2. 🐞 Est-ce que φ est diagonalisable?

Exercice 16. ♦ Posons $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = AM$. # DA24

1. a) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique.

b) Trouver un polynôme annulateur de φ .

c) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable?

2. On définit maintenant les endomorphismes ψ et s de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définis par $\psi(M) = MA$ et $s(M) = {}^tM$.

a) Vérifier que $\psi = s \circ \varphi \circ s^{-1}$.

b) En déduire un polynôme annulateur de ψ . Est-ce que l'endomorphisme ψ est diagonalisable?

TD Exercice 17. ♦♦ **Diagonalisation avec un paramètre**

Pour tout réel a , on pose

$$M_a = \begin{bmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On vérifie par le calcul que $Q(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a$ est annulateur de M_a .

1. Justifier que pour $a = 1$, M_a ne peut être diagonalisable.

2. Déterminer les réels a pour lesquels M_a est diagonalisable.

TD Exercice 18. ♦♦ 🎵 **Diagonalisation des matrices de rang 1**

1. 🐞 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si et seulement si il existe deux matrices colonnes non nulles U, V telles que $M = U {}^tV$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note U et V deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U {}^tV$ et on note $a = \text{Tr}(A)$.

a) 🐞 Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

b) Vérifier que ${}^tVU = a$, puis que $A^2 = aA$.

c) 🐞 Justifier que si $a = 0$ alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d) On suppose dans la suite $a \neq 0$. Calculer AU . Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.

e) Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 soit diagonalisable.

Exercice 19. ♦♦ 🎵 **Mélange algèbre et probabilité**

1. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, dans quel(s) cas la matrice

$$M_{a,b} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

est-elle diagonalisable?

2. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers, indépendantes et de même loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$.

a) Rappeler la loi de $X+Y$ et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

b) Calculer la probabilité pour que la matrice $M_{X,Y}$ soit diagonalisable.

Exercice 20. ♦♦ Soit φ un endomorphisme de E admettant un polynôme annulateur P . # DA27

1. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $P(x) = x(x - \alpha)$. Vérifier que les sous-espaces propres $E_0(\varphi)$ et $E_\alpha(\varphi)$ sont supplémentaires dans E . En déduire que φ est diagonalisable.

2. On suppose maintenant que P est de degré 2 avec deux racines distinctes. Montrer que φ est diagonalisable.

TD Exercice 21. ♦ ♪ **Polynôme annulateur minimal**

DA50

Soit A une matrice diagonalisable admettant p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire de degré minimal annulateur de A et le déterminer.

TD Exercice 22. ♦♦ ♪ Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, a et b deux réels tels que $ab \neq 0$. On note $M(a, b)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ donnée par :

$$M(a, b) = \begin{bmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

- Calculer $M(a, b)^2$.
 - Montrer que $M(a, b)^2$ est diagonalisable et trouver ses deux valeurs propres.
- Soient $c, d \in \mathbb{R}^*$ et $M(c, d) = \begin{bmatrix} 0 & c & c & \cdots & c \\ d & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.
 - Montrer que si $M(c, d)$ est semblable à $M(a, b)$ alors $ab = cd$.
 - Établir la réciproque en considérant une matrice $P_\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon, 1, \dots, 1) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.
- Est-ce que la matrice $M(a, b)$ est semblable à sa transposée?
 - À l'aide de la trace, montrer que si la matrice $M(a, b)$ est diagonalisable alors $ab > 0$.
 - On suppose que $ab > 0$, vérifier que $M(a, b)$ est semblable à une matrice du type $M(\alpha, \alpha)$. En déduire que $M(a, b)$ est diagonalisable.

Exercice 23. ♦♦♦

D'après Orlaux HEC 2014 # DA28

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Montrer que $\varphi - \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ est un projecteur.
- En déduire les valeurs propres de φ .
- Combien existe-t-il de droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par φ ?
- Combien existe-t-il de plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par φ ?

Exercice 24. ♦♦♦ **Caractérisation de la diagonalisabilité via des projecteurs**

DA32

- Préliminaires**

Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E . On suppose que $E_1 \oplus \dots \oplus E_n = E$. On note p_i le projecteur sur E_i parallèlement à $\oplus_{j \neq i} E_j$.
Montrer que $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$ et que $p_1 + \dots + p_n = \text{id}_E$.
- Application**

Soient E un espace de dimension finie et φ un endomorphisme de E .

 - On suppose que φ est diagonalisable. Montrer qu'il existe des projecteurs $(p_i)_{i \in I}$ vérifiant $p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$ et des réels λ_i tels que

$$\varphi = \sum_{i \in I} \lambda_i p_i.$$

- Étudier la réciproque.

Exercice 25. ♦♦♦ ♪ Soit E un espace vectoriel de dimension finie et φ un endomorphisme de E . L'objectif de l'exercice est de prouver l'équivalence entre les énoncés :

DA33

- L'endomorphisme φ est diagonalisable.
- L'endomorphisme φ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Pour rappel, P est scindé à racines simples s'il existe r réels $a_1, \dots, a_r$ deux à deux distincts tels que $P(x) = \prod_{i=1}^r (x - a_i)$.

- Montrer que i) $\Rightarrow$ ii).
- Prouvons la réciproque. Supposons donc que φ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

a) Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Justifier que l'application suivante est bien posée, linéaire et injective

$$\Phi: \begin{cases} H & \rightarrow \text{Ker } f \\ u & \rightarrow g(u) \end{cases} \quad \text{avec } H \text{ un supplémentaire de } \text{Ker } g \text{ dans } \text{Ker } f \circ g.$$

En déduire que $\dim \text{Ker}(f \circ g) \leq \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(g))$.

b) Montrer plus généralement que pour $f_1, f_2, \dots, f_r \in \mathcal{L}(E)$, $\dim(\text{Ker}(f_1 \circ \dots \circ f_r)) \leq \sum_{j=1}^r \dim(\text{Ker}(f_j))$.

c) En déduire la réciproque ii) $\Rightarrow$ i).

3. Application

En déduire que si φ est diagonalisable et F est un sous-espace stable par φ , alors la restriction de φ à F est un endomorphisme diagonalisable.

Exercice 26. ♦♦♦ ⚙️ Un exemple de matrice par blocs

DA53

Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et C la matrice définie par blocs :

$$C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R}).$$

1. Vérifier que $\text{rg } C = \text{rg } A + \text{rg } B$.

2. En déduire que la matrice C est diagonalisable si et seulement si les matrices A et B le sont.

Exercice 27. ♦♦ Sous-espaces de matrices ne contenant que des matrices diagonalisables

Oral ESCP 2025 # DA62

Dans la suite, on note :

- $\mathcal{S}_n$, l'espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{T}_n^+$, l'espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner la dimension de $\mathcal{S}_n$.
2. À quelle condition nécessaire et suffisante, une matrice $M \in \mathcal{T}_n^+$ est diagonalisable?
3. Dans la suite, on dit qu'un sous-espace F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie la condition $(\mathcal{D})$ si toute matrice de F est diagonalisable.
 - a) Expliciter un sous-espace F vérifiant $(\mathcal{D})$ et de dimension $n(n+1)/2$.
 - b) Justifier que si F vérifie $(\mathcal{D})$ alors

$$\dim F \leq \frac{n(n+1)}{2}.$$

Quelques applications de la diagonalisation

TD Exercice 28. ♦♦♦ 🎵 Recherche du commutant

DA37

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres distinctes. On définit le commutant de A par

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

1. 🎵 Justifier que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est libre.
2. Vérifier que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\dim \mathcal{C} \geq n$.
3. Montrer l'existence d'une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
4. 🎵 Soit $M \in \mathcal{C}$. Montrer que tout vecteur propre de A est un vecteur propre de M . En déduire que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale. En déduire que $\mathcal{C}$ est de dimension inférieure ou égale à n .
5. Conclure en montrant que $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}$.

Exercice 29. ♦♦ Suite récurrente linéaire d'ordre 2

DA38

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On note E l'espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n.$$

Soit u , une suite de E . On pose $U_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix}$.

1. 🎵 Déterminer une matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.
2. a) Montrer que la matrice A est diagonalisable. Puis, préciser une matrice inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
b) En déduire A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. À partir des questions précédentes, donner l'expression de u_n en fonction de n , a , u_0 et u_1 .
4. Donner une base de E . Comparer les résultats obtenus avec la méthode classique des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

1. Préliminaires

Soient I intervalle de $\mathbb{R}$ et a , une fonction continue sur I . On considère l'équation différentielle

$$\forall x \in I, \quad y'(x) = a(x)y(x).$$

Soit A , une primitive de a sur I . Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $y(x) = Ce^{A(x)}$.

2. On considère le système différentiel suivant :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x' = 8x - 18y + 27z \\ y' = -3x + \frac{7}{2}y - 6z \\ z' = -4x + 7y - 11z \end{cases}$$

avec les conditions initiales :

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0.$$

- a) Écrire le système $(\mathcal{S})$ ci-dessus sous la forme $X' = AX$, pour une certaine matrice A de taille 3×3 à coefficients réels qu'on déterminera où on a posé :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix}.$$

- b) Vérifier que la matrice A est diagonalisable et déterminer une matrice inversible Q et une matrice diagonale D telles que $A = Q^{-1}DQ$.

Pour commencer, on pourra calculer AX_1, AX_2 où :

$$X_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On admet dans la suite que pour toute matrice Q à coefficients constants, si $Y = Q \cdot X$ alors $Y' = Q \cdot X'$.

- c) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $Y(t) = QX(t)$. Montrer que X est solution du système $(\mathcal{S})$ si et seulement si les coordonnées u, v et w de Y sont solutions d'un système différentiel diagonal.
- d) Donner l'expression de $Y(t)$ puis les expressions de x, y et z .

Sujets de révision

Problème 31. ♦♦♦ 🎵 Diagonalisation simultanée

D'après Oraux ESCP 2016 # DA40

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E diagonalisable. On note $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ l'ensemble de ses valeurs propres et $E_1, \dots, E_p$ les sous-espaces propres associés. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f , tel que $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$. Soit x un vecteur de F .

- Montrer qu'il existe un unique p -uplet $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ tel que $x = x_1 + \dots + x_p$.
- On suppose désormais $x \neq 0$. Montrer que, quitte à modifier l'ordre, on peut supposer qu'il existe $r \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $x_i = 0$ pour $i > r$ et $x_i \neq 0$ pour $i \leq r$. On a alors $x = x_1 + \dots + x_r$. On note V_x le sous-espace vectoriel engendré par $(x_1, \dots, x_r)$.
- Montrer que $(x_1, \dots, x_r)$ est une base de V_x .
 - Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $f^j(x) \in V_x$.
 - Déterminer la matrice A de la famille $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$ dans la base $(x_1, \dots, x_r)$ de V_x .
 - Notons $C_1, \dots, C_r$ les colonnes de A et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des réels tels que $\sum_{j=1}^r \alpha_j C_j = 0$.

Montrer que le polynôme $P(x) = \sum_{j=1}^r \alpha_j x^{j-1}$ est le polynôme nul. En déduire que A est inversible.

- e) Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_i \in F$, puis que $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$.

- Soit g un endomorphisme de E , diagonalisable et commutant avec f (i.e. tel que $f \circ g = g \circ f$). Montrer qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à f et g .

Problème 32. ♦♦ 🎵 Matrices compagnons

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ des nombres réels. Soit P le polynôme défini par l'expression

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n.$$

La matrice $C_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, appelée matrice compagnon de P , est définie par

$$C_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & -a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

• *Exemple*

1. **a)** Déterminer le polynôme R dont la matrice compagnon est $C_R = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.
b) Quelles sont les racines de R ? Quelles sont les valeurs propres de C_R ? Que constatez-vous?
2. La matrice C_R est-elle diagonalisable? Justifiez votre réponse.

• *Retour au cas général*

3. Déterminer le rang de C_P . *Indication.* On pourra distinguer deux cas : le cas où $a_0 = 0$ et le cas où $a_0 \neq 0$.
4. Justifier que 0 est valeur propre de C_P si et seulement si $a_0 = P(0) = 0$.
5. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $\dim(\text{Ker}(C_P - \lambda I_n)) \leq 1$.

• *La matrice M_P*

Dans la suite, on considère $M_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M_P = a_0 I_n + a_1 C_P + a_2 C_P^2 + \dots + a_{n-1} C_P^{n-1} + C_P^n$.

On note $(E_1, E_2, \dots, E_n) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

les n vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'objectif est de montrer que M_P est la matrice nulle.

6. *Retour sur l'exemple*

Vérifier que M_R est la matrice nulle, où R est le polynôme trouvé à la première question.

7. *Retour sur le cas général*

- a)** Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E_k = C_P^{k-1} E_1$.
 - b)** En déduire qu'il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(X, C_P X, \dots, C_P^{n-1} X)$ soit une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
8. Montrer que $M_P E_1 = 0$.
 9. En déduire que M_P est la matrice nulle.

• *Lien entre spectre et racines de P*

10. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de C_P et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. Montrer que λ est racine de P .
11. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = 0$.
a) On suppose uniquement dans cette question qu'il existe $X = {}^t [x_1 \ \cdots \ x_n] \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $C_P X = \lambda X$. Expliciter un système linéaire vérifiée par $(x_1, \dots, x_n)$. Montrer ensuite par récurrence que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad x_{n-k} = (a_{n-k} + \lambda a_{n-k+1} + \dots + \lambda^{k-1} a_{n-1} + \lambda^k) x_n.$$

- b)** Montrer que λ est valeur propre de C_P et exhiber un vecteur propre associé.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On considère $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des nombres réels tous distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des entiers positifs ou nuls, puis on définit le polynôme S par $S(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{\alpha_i}$.

12. Déduire de toute cette étude que la matrice compagnon C_S de S est diagonalisable si et seulement si les entiers α_i valent tous 1.
13. Est-ce que la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ est diagonalisable?

Python

PARTIE I

*La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne.
La pratique, c'est quand tout fonctionne et qu'on ne sait pas
pourquoi. Ici, nous avons réuni théorie et pratique : rien ne
fonctionne... et personne ne sait pourquoi!*

Formule souvent attribuée à ALBERT EINSTEIN

1.1 Boucles for, boucles while

Premiers exemples

Exercice 1. ✧

Que fait le code suivant?

Éditeur

```
x=float(input("Entrez un réel positif"))
n=0
while n<=x-1 :
    n+=1
print(n)
```

PY1

TP Exercice 2. ✧ Le grand théorème de Fermat

PY2

1. Écrire un programme Python qui calcule le nombre de triplets $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ solutions de

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{et} \quad 1 \leq a \leq b \leq c \leq 50.$$

2. Même question en modifiant l'exposant 2 par 3, 4, 5... Que remarque-t-on?

Exercice 3. ✧ Une preuve à l'aide de Python

PY3

L'objectif est de déterminer tous les entiers naturels a , b , c et n tels que $a! + b! + c! = n!$. On suppose qu'une telle solution existe.

1. Prouver que $n! \leq 3(n-1)!$.
2. En déduire que n est inférieur à 3 et a , b , c inférieurs à 2.
3. Écrire un programme qui teste toutes les solutions avec $a, b, c \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$ et $n \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$.
4. Conclure sur l'ensemble des solutions.

Exercice 4. ✧✧ Un peu d'ordre!

PY4

On s'interdit dans cet exercice d'utiliser les commandes préprogrammées `np.min` et `np.max`.

1. Écrire une fonction `maxi` qui prend comme argument deux nombres réels et affiche le maximum de ces deux nombres.
2. En déduire une fonction `maximum` qui prend en argument une matrice ligne `x` et renvoie le maximum des éléments de `x`.
3. En utilisant seulement la fonction `maximum`, comment obtenir un programme qui calcule le minimum?
4. Donner un programme qui teste si tous les coefficients `x` ne sont pas identiques et dans ce cas renvoie le deuxième maximum.

Exercice 5. ✧✧ ⚙️ Énigme

PY5

In the Battle of Hastings that occurred on October 14, 1066 Harold's forces formed 13 similar squares with exactly same number of soldiers in each square. When Harold himself joined the fray and was added to the number of his soldiers in those thirteen squares a single huge square could be arranged. How many men there must have been in Harold's force?

Sam Loyd



La broderie de Bayeux, longue de près de 70 mètres et confectionnée quelques années après la bataille raconte la victoire du futur Guillaume Le Conquérant sur Harold, le dernier roi anglo-saxon.

Cas particuliers des suites récurrentes, des sommes et produits

TP Exercice 6. ♦ 🎵 Calcul d'un n -ième terme via Python

PY6

1. Écrire une fonction qui prend n en argument et qui renvoie les n -ièmes termes des suites u et v définies par les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = v_n + 2n + 1. \end{cases}$$

2. Conjecturer et prouver une formule simple pour u_n et v_n .

Exercice 7. ♦ Sinus hyperbolique

D'après EDHEC 2022 # PY7

Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier n , un réel x non nul et renvoie la somme partielle d'ordre n de la série $\sum 1/\text{sh}(kx)$. Que dire de la convergence?

La fonction sh est la fonction sinus hyperbolique définie sur $\mathbb{R}$ par $\text{sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$.

TP Exercice 8. ♦ Variante de la suite de Syracuse

PY8

Soit $a \in \mathbb{N}$. On définit la suite u par son premier terme $u_0 = a$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \begin{cases} u_n/2 & \text{si } u_n \text{ pair} \\ u_n + 5 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Écrire une fonction qui prend en argument $u_0 \in \mathbb{N}^*$ et n et affiche les $n + 1$ premiers termes de la suite.
2. Tester pour $a \in [1; 6]$. Que constatez vous?

TP Exercice 9. ♦ 🎵 Conjecture et limite

PY9

On étudie dans cet exercice la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n!}{\sum_{k=0}^n k!}$.

1. Écrire une fonction `facto` qui prend en argument un entier n et renvoie la matrice ligne

$$[\quad 0! \quad 1! \quad 2! \quad 3! \quad \dots \quad (n-1)! \quad n! \quad].$$

2. En déduire un programme qui prend en argument n et renvoie u_n .
3. Tester et conjecturer la limite de la suite u . Prouver votre conjecture.

Exercice 10. ♦♦ 🎵 La série $\sum 1/n^3$ est convergente. Écrire un programme qui calcule les termes successifs de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des sommes partielles de cette série jusqu'à ce que $S_n - S_{n-1} < 10^{-10}$ et renvoie le dernier S_n calculé. # PY10

Exercice 11. ♦♦♦ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

PY11

$$u_n = \int_0^{\pi/4} \tan(t)^n dt.$$

1. Calculer u_0 , u_1 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + u_{n+2}$.
2. En déduire un programme qui prend en argument n et renvoie la matrice ligne

$$[\quad u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_{2n-1} \quad u_{2n} \quad].$$

Exercice 12. ♦ 🎵 On sait que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$.

PY12

Écrire un programme qui prend en argument un réel A et renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \geq A$.

Exercice 13. ♦ On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

PY13

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2k} \right).$$

1. Écrire un programme qui prend en argument n et renvoie u_n .
2. On admet que la suite u converge vers 0.
Écrire un programme qui renvoie la plus petite valeur n pour laquelle $u_n \leq 10^{-3}$.

Exercice 14. ♦ 🎵 Écrire un programme qui prend en argument une fonction f , un entier naturel non nul n et deux réels a, b (avec $a < b$) et renvoie la somme de Riemann d'ordre n de f . C'est-à-dire : #PY14

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

Tester ensuite votre programme en approximant $\pi = \int_0^1 \frac{4 \, dt}{1+t^2}$.

Exercice 15. ♦♦♦ **Approximation de la longueur d'une courbe**

#PY78

1. Écrire une fonction qui prend en argument deux points A (x_A, y_A) et B (x_B, y_B) de $\mathbb{R}^2$ et renvoie la distance entre A et B.

Pour rappel, $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.

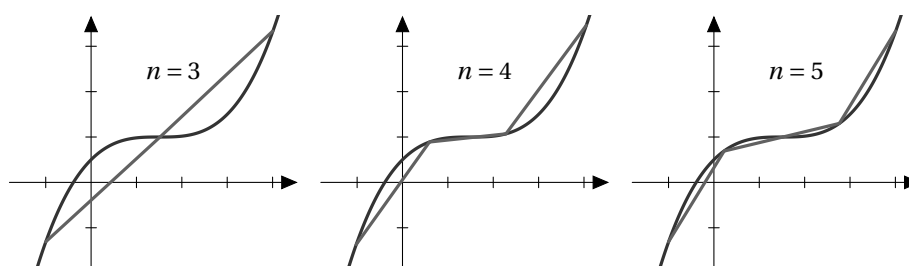
2. Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Afin d'approximer la longueur de la courbe représentative de f , on découpe l'intervalle $[a; b]$ régulièrement

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Puis, on somme les distances entre les points $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ pour tout indice i .

Écrire un programme qui prend en entrée une fonction f , un entier n et renvoie une approximation de la longueur de la courbe représentative de f .



Exercice 16. ♦♦ **Calculs des coefficients binomiaux**

#PY15

1. Méthode 1.

- a) Écrire une fonction facto qui prend un entier naturel n en argument et renvoie $n!$.
- b) En utilisant la formule explicite des coefficients binomiaux, en déduire une fonction binom1 qui prend en argument deux entiers p et n et renvoie $\binom{n}{p}$.
- c) Tester votre programme. Que pouvez vous conclure sur son efficacité?

2. Méthode 2.

- a) Justifier que pour $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$: $\binom{n}{p} = \prod_{i=1}^p \frac{n-p+i}{i}$.
- b) Compléter le programme suivant permettant le calcul de $\binom{n}{p}$.

Editeur

```
if p < n :
    coeff = ...
    for i in range( ... ):
        coeff = ...
    return coeff
else :
    return ...
```

3. Méthode 3.

Compléter et expliquer le programme suivant qui permet de construire le triangle de Pascal.

```
def binom3(n):
    pascal = eye(n) # On part de la matrice identité
    for i in range(...):
        pascal[i,0] = 1
        for j in range(...):
            pascal[i,j] = ...
    return pascal
```

Rappels. La commande `eye(n)` renvoie une matrice avec n lignes et n colonnes avec des zéros partout sauf sur la diagonale qui est remplie de 1. De plus, attention au décalage d'indices, `pascal[i, j]` renvoie le coefficient à l'intersection de la $(i + 1)$ -ème ligne et de la $(j + 1)$ -ème colonne du tableau.

Exercice 17. ♦♦ On définit une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par $u_1 = 1$, et pour tout $n \geq 1$:

PY76

$$u_{n+1} = \frac{1 + u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}{n}.$$

1. Étudier la monotonie de cette suite et donner sa limite.
2. Construire une fonction Python nommée `u` prenant en argument n qui renvoie u_n .
3. On considère le programme informatique suivant :

```
i=0
p=1
while u(i)>=p:
    i=i+1
    p=p*2
```

Ce programme affiche 7 lorsqu'on l'exécute. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n/2^n$.

4. On considère le programme informatique suivant :

```
n=1
S=1
a=1
while u(n)!=int(u(n)):
    n=n+1
```

On suppose que ce programme puisse «tourner». Il affiche 43 lors de son exécution. Que peut-on en déduire?

1.2 La bibliothèque matplotlib.pyplot

Graphe associé à une suite

Exercice 18. ♦ **Représentation des termes d'une suite - L'effet papillon**

PY16

On considère la suite définie par la récurrence : $u_0 \in]0; 1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \lambda u_n(1 - u_n)$.

1. *Étude théorique pour $\lambda \in]0; 1[$.*
 - a) Justifier que pour tout $x \in [0; 1]$, $x(1 - x) \in [0; 1/4]$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 1]$.
 - b) Montrer que la suite u est monotone.
 - c) En déduire la convergence. Préciser la limite.
2. *Représentation des termes de la suite.*
 - a) Écrire une fonction `suite` qui prend en argument un entier n , u_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$ et renvoie la liste des n premiers termes de la suite u définie avec le paramètre λ et la condition initiale u_0 .
 - b) Afficher les premières valeurs sur un graphique à l'aide de la commande `plt.plot(... , ... , 'ro')`.
3. *Simulation.*

- a) On choisit $\lambda = 2$. Que dire de la convergence de la suite u pour les conditions initiales :

$$u_0 = 1/4, \quad u_0 = 0.1, \quad u_0 = 0.0001 \dots ?$$

- b) Tester pour $\lambda = 3$ et $u_0 = 0.1$. Que dire si on modifie la condition initiale?
c) Même question avec $\lambda = 4$ et $u_0 = 0.1$, puis $u_0 = 0.1001$ et $u_0 = 0.100001$. Conclusion?

Exercice 19. ♦♦ Suites adjacentes

PY17

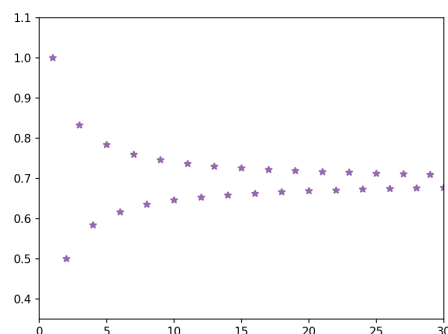
On considère le programme ci-contre et, ci-dessous, le résultat obtenu.

Editeur

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

n=30
x=np.arange(1,n+1); y=np.zeros(n)
eps=1
for i in range(n):
    y[i]=eps/(i+1)
    eps=eps*(-1)
z=np.cumsum(y)

plt.axis([0, 30, 0.35, 1.1])
plt.plot(x,z,'*'); plt.show()
```

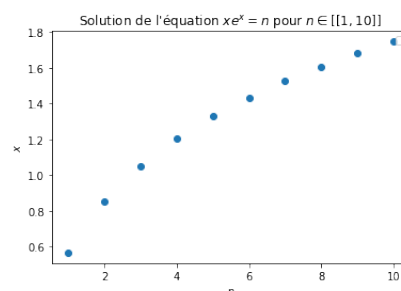


1. Préciser le contenu des variables y et z après l'exécution du programme.
2. Ce graphe suggère que deux suites sont adjacentes. Lesquelles?
3. Démontrer cette conjecture.

Exercice 20. ♦♦ 🎵 Dichotomie et suite définie de manière implicite

PY18

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier qu'il existe une unique solution à l'équation $xe^x = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Notons u_n cette solution.
2. a) Écrire une fonction qui prend en argument n puis renvoie une approximation de u_n à 10^{-3} près.
b) Modifier la fonction précédente pour retourner une approximation des n premières valeurs de la suite u .
3. Voici le résultat pour les 10 premières valeurs. Conjecturer la monotonie et la limite de la suite u . Prouver votre conjecture.



Graphes de fonctions

- Exercice 21. ✧ Quelles courbes trace le code ci-contre?

PY20

Editeur

```
x=np.linspace(-1,2,100)
y=np.exp(x)
plt.plot(x,y), plt.plot(x,x), plt.plot(y,x)
plt.show()
```

TP Exercice 22. ♦♦ Polynômes de Lagrange

PY21

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, $n+1$ nombres réels distincts deux à deux. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on définit le polynôme L_k par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L_k(x) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

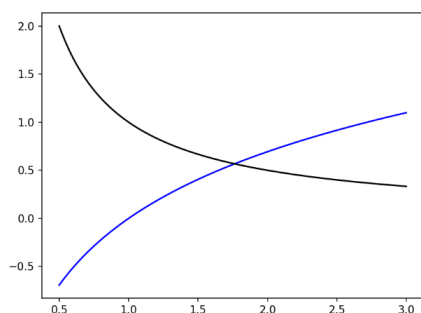
1. Écrire une fonction Lagrange(X, k, x) qui prend en entrée une matrice ligne $X = [x_0, x_1, \dots, x_n]$, un entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et un réel x , puis renvoie le nombre $L_k(x)$.
2. Tracer sur l'intervalle $[-3; 3]$ chacune des courbes des polynômes L_k correspondant à $X = [-2, -1, 0, 1, 2]$

Exercice 23. ♦♦

PY22

Expliquer l'intérêt du programme suivant.

Test: >>> mystere(np.log, 0.0001)



Editeur

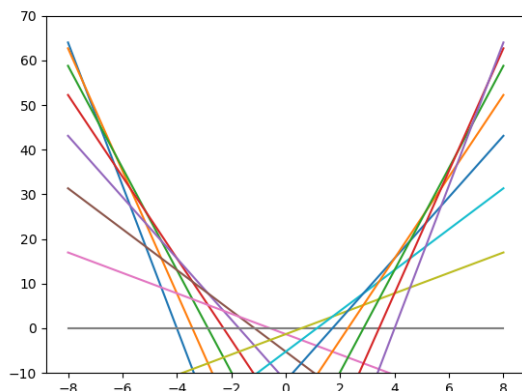
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def mystere(f,e):
    # f une fonction, e est un réel "petit"
    n=200
    x=np.linspace(0.5,3,n)
    y=np.zeros([n,1])
    z=np.zeros([n,1])
    for i in range(n):
        y[i]=f(x[i])
        z[i]=(f(x[i]+e)-f(x[i]))/e
    plt.plot(x,y,'b')
    plt.plot(x,z,'k')
    plt.show()
```

Exercice 24. ♦♦ Enveloppe convexe

PY23

Compléter le code ci-dessous afin qu'il trace les tangentes à la courbe représentative de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ au points d'abscisse $-8, -7, \dots, 0, 1, 2, \dots, 8$.



Editeur

```
n=17 # Nombre de tangentes
a=np.linspace(-8,8,n)

for i in range(n) :
    x= ...
    y= ...
    ...

plt.ylim(-10,70)
# Limite l'axe des ordonnées à [-10,70]
plt.show() #Affichage
```

Remarque. La commande `plt.clf()` pour « Clear Figure » permet de supprimer un graphique précédemment tracé.

Compléments

TP Exercice 25. ♦♦ 🎵 Vus aux concours

Les questions sont indépendantes # PY150

1. D'après Edhec 2024

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$.

- Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = 2n(J_n - J_{n+1})$.
- En déduire une fonction python qui prend en argument n et renvoie J_n .

2. D'après Edhec 2025

On considère la suite $(B_n)_{n \geq 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$

- Justifier que pour tout entier naturel n , $B_n = \prod_{k=1}^n \frac{k+n}{4k}$.
- En déduire une fonction python qui prend en argument n et renvoie B_n .

3. D'après Edhec 2026

- Montrer que l'on définit parfaitement deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en posant $u_1 = 0$, $v_1 = 2$ et, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{v_n}{u_{n+1}}.$$

b) Écrire une fonction Python qui prend en argument n et renvoie v_n .

4. D'après Ecrimage 2026

On considère une suite de polynômes $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $G_0 = 1$, $G_1 = x$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xG_k(x) = G_{k+1}(x) + kG_{k-1}(x)$$

En Python, on représente un polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ par le tableau numpy de taille $n+1$ de ses coefficients suivant les puissances croissantes. Ainsi le polynôme $P(x) = x^2 + 2x + 3$ est représenté par le tableau de taille $n+1$ $[3, 2, 1, 0, \dots, 0]$.

a) Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie le tableau correspondant au polynôme xP .

Editeur

```
def Prod(P,n):
    Q=np.zeros(n+1)
    for k in range(...):
        ....
    return Q
```

b) Écrire une fonction, en langage Python, nommée VP qui prend en argument n et un entier naturel k et qui renvoie le tableau numpy associé à G_k .

Exercice 26. ♦ Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \sin\left(2\pi(2 + \sqrt{3})^n\right).$$

PY75

1. a) Tracer le graphe de $x \in [0; \pi] \mapsto \sin(x)$ et $x \in [0; \pi] \mapsto x$. Quelle courbe est au-dessus?
b) Calculer $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ pour $n \in \llbracket 0; 20 \rrbracket$. Que remarque-t-on?
c) Écrire un programme qui calcule u_n . Que conjecturer sur la convergence de la suite u ?
2. À l'aide de ces trois informations, prouver que la suite u est bien convergente et préciser la limite.

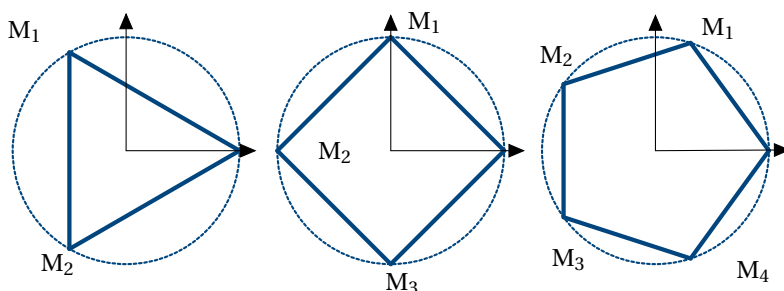
TP Exercice 27. ♦♦ Les tables de multiplication à l'aide de polygones réguliers convexes

PYS1

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère le point

$$M_k : \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \right).$$

On montre que les points $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n = M_0$ constituent les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité. Pour $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, on a un triangle équilatéral, un carré et un pentagone.



1. Écrire un programme qui prend en argument n et renvoie les matrices lignes

$$X = \left[\cos\left(\frac{2\pi}{n} \cdot 0\right), \cos\left(\frac{2\pi}{n} \cdot 1\right), \cos\left(\frac{2\pi}{n} \cdot 2\right) \dots \cos\left(\frac{2\pi}{n} \cdot n\right) \right] \quad \text{et} \quad Y = \left[\sin\left(\frac{2\pi}{n} \cdot 0\right), \sin\left(\frac{2\pi}{n} \cdot 1\right), \sin\left(\frac{2\pi}{n} \cdot 2\right) \dots \sin\left(\frac{2\pi}{n} \cdot n\right) \right].$$

2. En déduire un programme qui prend en argument un entier n et trace un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité. Tester le programme en traçant un triangle, un pentagone, un hexagone et finalement un chiliogone.

3. Visualisation des tables de multiplication

a) Donner un programme qui prend en entrée un couple d'entiers (n, a) et qui, sur un même graphique, commence par tracer le polygone régulier à n cotés, puis, à l'intérieur de ce polygone, trace pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ le segment entre M_k et M_{ak} . Indication. Pour tracer un segment entre $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, il suffit d'écrire

```
ab=[xA, xB]; ord=[yA, yB]
plt.plot(ab, ord)
```

- b) Observer les figures obtenues pour les couples (n, a) avec $(300, 2)$, $(300, 3)$, $(300, 6)$, $(84, 55)$, $(324, 28)$, $(405, 28)$ et $(993, 399)$.

4. Périmètre

- a) Écrire une fonction qui prend en argument deux points A (x_A, y_A) et B (x_B, y_B) de $\mathbb{R}^2$ et renvoie la distance entre A et B. *Pour rappel*, $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.
- b) Calculer ou donner avec python une approximation du périmètre du polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité. Que dire lorsque $n \rightarrow +\infty$?
- c) Écrire un programme qui prend en argument n et renvoie un polygone inscrit dans le cercle unité dont les n points sont choisis au hasard.
Indication. On pourra utiliser la commande `np.sort(A)` qui, à partir de la matrice ligne A, renvoie une matrice ligne dont les coefficients sont les coefficients de A ordonnés dans l'ordre croissant.
- d) Adapter le programme pour afficher en plus le périmètre du polygone. Vérifier que le périmètre obtenu est systématiquement plus petit que le périmètre du polygone régulier à n côtés.

Exercice 28. ♦♦ ⚙️ La courbe Blanc-manger

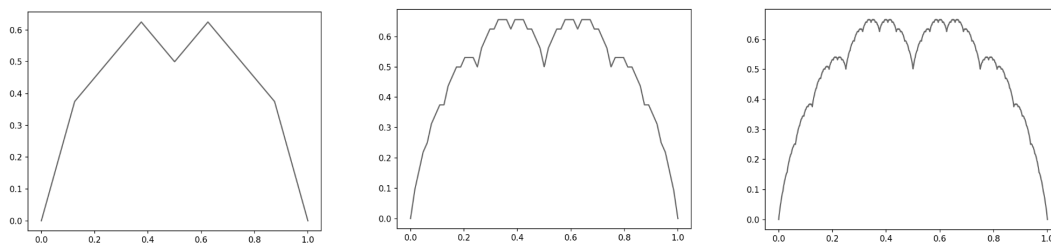
PY54

Pour tout réel x , on note $d(x)$ la distance de x avec le plus proche entier. On montre que $d(x) = \frac{1 - |1 - 2x + 2[x]|}{2}$.

- Tracer la courbe de d sur $[-3; 3]$.
- Écrire un script qui prend en argument n et renvoie la courbe représentative de S_n définie par

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{d(2^k x)}{2^k}.$$

Commenter. Ci-dessous quelques graphes pour $n \in \{3, 6, 10\}$.



- Justifier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la convergence de la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.
- Notons $S(x)$ la limite obtenue. Que peut-on conjecturer sur la régularité de la fonction S ?

2 Exemples en algèbre linéaire

2.1 Les bibliothèques

numpy

La bibliothèque numpy doit d'abord être importée via `import numpy as np`.

Elle permet d'accéder à la plupart des fonctions et constantes mathématiques comme pour la bibliothèque math, on peut par exemple utiliser π avec la commande `np.pi` ou la fonction exponentielle avec `np.exp(.)`.

Elle permet surtout de créer des tableaux de type ndarray, parfait pour représenter des matrices. Pour créer une matrice, il suffit de donner ses différentes lignes séparées par des virgules :

Console

```
>>> B = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]])
>>> B
array([[1, 2, 3],
       [4, 5, 6],
       [7, 8, 9]])
```

Pour accéder au coefficient en position (i, j) , il suffit de taper `B[i, j]` en prenant garde qu'en Python, les indices commencent à 0.

- Matrices prédéfinies

Il existe des matrices usuelles prédéfinies dans la bibliothèque numpy.

- `np.ones(n)` crée une matrice ligne de longueur n remplie de 1.
- `np.ones((m,n))` crée une matrice de taille (m,n) remplie de 1.
- `np.zeros(n)` crée une matrice ligne de longueur n remplie de 0.
- `np.zeros((m,n))` crée une matrice de taille (m,n) remplie de 0.
- `np.eye(n)` crée la matrice identité de taille (n,n) .

• Opérations sur les matrices

La plupart des opérations sur les tableaux numpy se font terme à terme, par exemple :

Editeur

```
A=np.array([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]])
print(A==2)
# On teste si chaque coefficient de la
  matrice vaut 2
```

Console

```
[[False  True False]
 [False False False]
 [False False False]]
# Un seul 2, en position (1,2)
```

 **Attention.** Comme la somme matricielle est une opération terme à terme. Pour effectuer la somme entre deux matrices A, B de même taille, il suffit d'écrire `A+B`. Par contre, la commande `A*B` renvoie le produit coefficient par coefficient et non le produit matriciel.

- `np.dot(A,B)` effectue le produit matriciel usuel AB .
- `np.shape()` renvoie la taille d'un tableau numpy.
- `transpose(A)` renvoie la transposée de la matrice A.

Exercice 29. ✧ Comment obtenir avec Python la matrice carrée $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$?

PY24

Exercice 30.

- ✧ Prévoir la réponse de la machine.

Console

```
n=10
A=np.arange(1,n+1)
B=np.ones((n,1))
print(np.dot(A,B))
```

PY25

numpy.linalg

Pour avoir plus de possibilités, on pourra importer la bibliothèque `numpy.linalg` avec la commande :

```
import numpy.linalg as al
```

- `al.inv` pour obtenir l'inverse d'une matrice (s'il il existe);
- `al.matrix_rank` pour le rang;
- `np.linalg.det` pour le déterminant;
- `al.matrix_power` pour calculer les puissances;
- `al.solve` pour résoudre une équation matricielle $AX = B$ d'inconnue X;
- `al.eig` pour obtenir le spectre de la matrice.

2.2 Les exercices

TP Exercice 31. ♦ Écrire une fonction python qui prend en argument n et renvoie les n premières lignes du triangle # PY26

```

1  0  0  0  0
2  3  0  0  0
4  5  6  0  0
7  8  9 10  0
11 12 13 14 15
...
```

Exercice 32. ♦ Résoudre, à l'aide de Python, les deux systèmes linéaires suivants. Que constatez-vous? # PY27

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} x_1 + 9x_2 + 10x_3 = -50 \\ 9x_1 + 5x_2 + x_3 = 180 \\ 5x_1 + 10x_2 + 9x_3 = 40 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} x_1 + 9x_2 + 10x_3 = -50 \\ 9x_1 + 5x_2 + x_3 = 180 \\ 5x_1 + 10x_2 + 9x_3 = 41. \end{cases}$$

TP Exercice 33. ♦ On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est à diagonale dominante si : # PY31

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad |a_{i,i}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|.$$

Écrire une fonction Python DiagoD qui prend en argument une matrice A et retourne "vrai" si A est à diagonale dominante et "faux" sinon.

Exercice 34. ♦♦ Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$. En s'aidant des instructions suivantes, calculer les puissances de A. # PY28

Editeur

```
>>> import numpy as np
>>> A = np.array([[1, -6, 0], [2, -6, 2], [2, -4, 3]])
>>> P = np.array([[6, 2, -1], [2, 1, 0], [-1, 0, 1]])
>>> P_inv = np.linalg.inv(P) # calcule l'inverse de la matrice P
>>> P_inv
array([[ 1., -2.,  1.],
       [-2.,  5., -2.],
       [ 1., -2.,  2.]])
>>> np.dot(P_inv, np.dot(A, P))
array([[ -1.00000000e+00,  0.00000000e+00,  0.00000000e+00],
       [ 6.66133815e-16, -2.00000000e+00,  0.00000000e+00],
       [ 4.44089210e-16,  0.00000000e+00,  1.00000000e+00]])
```

Exercice 35. ♦ Expliquez l'intérêt de la fonction Python suivante. # PY30

Editeur

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

def biddle(A,x) : # A est une matrice carrée et x, un réel
    [n,p]=np.shape(A)
    if n!=p :
        print('Non, la matrice n est pas carrée ...')
    elif np.linalg.matrix_rank(A-x*np.eye(n))<n :
        print('Oui !')
    else :
        print('Non !')
```

Exercice 36. ♦♦ 🎵 Permutations # PY73

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_n = \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. Une permutation f de E_n est une application bijective de E_n dans E_n . On peut la coder par une matrice ligne

$$F = [f(0) \quad f(1) \quad \dots \quad f(n-1)].$$

1. Écrire une fonction qui prend en argument une matrice ligne et teste si on a bien une permutation.
On pourra utiliser la commande `np.sort` qui permet d'ordonner la matrice ligne.
2. Écrire une fonction python prend en argument deux matrices lignes F, G associées à deux permutations f, g et renvoie la matrice ligne associée à la composition $f \circ g$.
3. Écrire une fonction python qui prend une matrice ligne associée à f et renvoie la matrice ligne associée à l'application réciproque f^{-1} .

Exercice 37. ♦ Écrire un programme qui compte le nombre de matrices non inversibles parmi les matrices de taille $(25, 25)$: # PY29

$$M(a, b) = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad -50 \leq a, b \leq 50.$$

3 Variables aléatoires discrètes

3.1 Histogrammes, diagrammes en bâtons

- Un histogramme donne une idée graphique de la répartition des valeurs d'un **échantillon** $E = \{x_1, \dots, x_n\}$. Pour cela, on découpe l'ensemble des valeurs possibles en un certain nombre d'intervalles. Notons $p \in \mathbb{N}^*$ le nombre d'intervalles choisis. Ces intervalles doivent être deux à deux disjoints, et leur réunion est égale à (ou contient) l'ensemble des valeurs possibles. Plus précisément, en notant $a_1, a_2, \dots, a_{p+1} \in \mathbb{R}$, les bornes de tous ces intervalles avec $a_1 < a_2 < \dots < a_{p+1}$, on a

$$E \subset \bigcup_{i=1}^p [a_i; a_{i+1}[.$$

L'intervalle $[a_i; a_{i+1}[$ est une **classe**. On peut ainsi définir l'**effectif** d'une classe comme le nombre d'éléments de E appartenant à la classe puis sa fréquence f_i comme le rapport de l'effectif sur le nombre total d'éléments de E . Ensuite, le graphique est obtenu en traçant, pour chaque $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, le rectangle de base $[a_i, a_{i+1}]$ sur l'axe des abscisses, et

- d'aire égale à m_i (on parle d'histogramme en effectif);
- d'aire égale à f_i (on parle d'histogramme en fréquence). Dans ce cas, la somme des aires des rectangles est égale à 1.

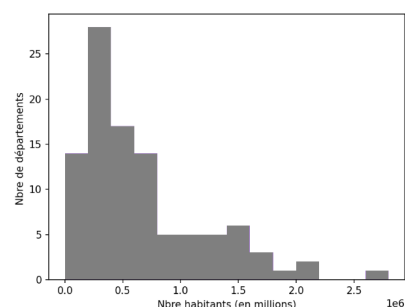
Sous Python, les histogrammes s'obtiennent par la commande `hist` obtenu dans la bibliothèque `matplotlib.pyplot`. Elle prend en argument l'échantillon E , puis on indique les bornes de tous les intervalles $a_1 < a_2 < \dots < a_{p+1}$ ou simplement le nombre p d'intervalles souhaité (Python se chargeant de créer alors p intervalles de même longueur entre la plus petite et la plus grande valeur de l'échantillon).

Exemple. Répartition du nombre d'habitants par département.

Le site de l'Insee (Institut national de la statistique et des études économiques) contient de très nombreuses statistiques en libre accès. On y trouve par exemple la liste du nombre d'habitants par département dont on trace ci-dessous l'histogramme en effectif.

Editeur

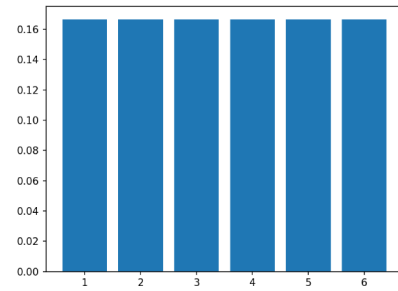
```
import matplotlib.pyplot as plt
# E désigne dans la suite la liste
# du nombre d'habitants par département
# Création d'un tableau avec les intervalles de
# longueurs 200 000 (habitants)
inter = np.linspace(0, 2.8*10**6, 15)
plt.hist(E, bins=inter)
plt.xlabel('Nbre habitants (en millions)')
plt.ylabel('Nbre de départements ')
plt.show()
```



- On peut aussi utiliser la commande `bar` (toujours dans la bibliothèque `matplotlib.pyplot`) pour le tracer de diagramme en bâtons. Voici un exemple qui permet de représenter la loi d'une variable aléatoire uniforme sur $\mathcal{U}(\llbracket 1; 6 \rrbracket)$.

```
# La loi de la variable
val=[1,2,3,4,5,6]
loi=[1/6,1/6,1/6,1/6,1/6,1/6]

# Tracé du diagramme en bâtons
# bar(abscisses,ordonnées)
plt.bar(val,loi)
plt.show()
```



Exercice 38. ♦ Comment modifier le programme précédent afin qu'il affiche la loi d'une variable aléatoire X , somme des valeurs de deux dés équilibrés? # PY32

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P([X = i])$	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36	1/6	5/36	1/9	1/12	1/18	1/36

3.2 Représentations des lois de probabilité

TP Exercice 39. ♦♦ Diagramme en bâton d'une loi géométrique

PY33

- Soient $p \in]0; 1[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
Écrire un programme qui prend en argument p et renvoie la plus petite valeur entière n_p telle que $P([X \geq n_p]) \leq 1\%$.
- En déduire un second programme qui prend en argument p et renvoie le diagramme en bâtons sur $[1; n_p]$ associé à la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

TP Exercice 40. ♦♦♦ Représentation d'une loi de Poisson

PY34

- Écrire un programme qui prend en argument $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ et renvoie la matrice-ligne

$$[p_0 \quad p_1 \quad \dots \quad p_n] \quad \text{où} \quad p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}.$$

On pourra remarquer que $p_{i+1} = \lambda p_i / (i+1)$.

- Soient $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ et $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Écrire un programme qui prend en argument λ et renvoie la plus petite valeur entière n_λ telle que $P([X \geq n_\lambda]) \leq 1\%$.
- En déduire un second programme qui prend en argument λ et renvoie le diagramme en bâtons sur $[0; n_\lambda]$ associé à la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 41. ♦♦♦ Calcul des probabilités d'une loi binomiale

PY35

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n défini par

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n.$$

En Python, on peut coder le polynôme P à l'aide d'une matrice-ligne formée de ses coefficients : $L = [a_0, a_1, \dots, a_n]$. Dans ce cas, la commande $L[k]$ renvoie le coefficient de P de degré k .

- Soient $p, q \in \mathbb{R}$. Donner la relation entre les coefficients du polynôme P et les coefficients du polynôme $Q_{p,q}$ défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q_{p,q}(x) = (q + px)P(x).$$

- Compléter le programme ci-contre qui prend en argument la matrice L des coefficients d'un polynôme P , les réels p et q et renvoie la liste des coefficients de $Q_{p,q}$.

- À l'aide de la formule du binôme, développer $(q + px)^n$.
En déduire une fonction qui prend en argument un réel $p \in [0; 1]$, un entier naturel n et renvoie les probabilités associées à la loi $\mathcal{B}(n; p)$.

```
def Bino(liste,p,q) :
    m = len(liste)
    B = ...
    for i in range(1,m) :
        ...
    return B
```

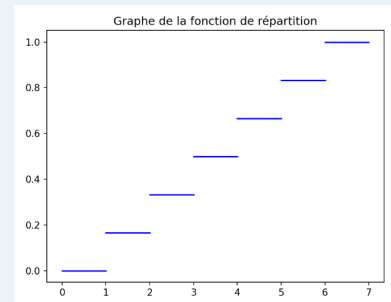
Complément : tracé d'une fonction de répartition, cas discret

Ci-dessous, un code pour tracer la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète finie à partir de sa loi.

Editeur

```
def FctionRepartition(val,loi) :
    plt.clf()
    n=len(val)
    val=[val[0]-1]+val+[val[-1]+1]
    LoiCumulee=[sum(lois[0:i:1]) for i in range(0, n+1)]
    for i in range(n+1) :
        x=[val[i],val[i+1]]
        y=[LoiCumulee[i],LoiCumulee[i]]
        plt.title("Graphe de la fonction de répartition")
        plt.plot(x,y,'b')
    plt.show()

# On teste avec la loi uniforme sur [1,6]
val=[1,2,3,4,5,6]; lois=[1/6,1/6,1/6,1/6,1/6,1/6]
FctionRepartition(val,lois)
```



3.3 Simulation des variables aléatoires discrètes

Premiers exemples avec les lois usuelles

Pour simuler des variables aléatoires, on peut utiliser la bibliothèque `random` que l'on importe par :

Editeur

```
import numpy.random as rd
```

- **rd.random()**

La commande `rd.random()` renvoie un réel choisi au hasard dans l'intervalle $[0;1[$ suivant une loi de probabilité uniforme continue sur $[0;1[$.

En particulier, pour simuler à l'aide de Python une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p , on peut écrire `rd.random() < p` qui renverra `True` avec une probabilité p . On identifie alors `True` avec 1 et `False` avec 0.

- **rd.randint(debut,fin)**

De la même façon, on peut tirer au hasard (et uniformément) un entier plutôt qu'un réel. Dans ce cas, la commande à utiliser est `rd.randint(debut,fin)` qui tire au hasard avec une probabilité uniforme un entier dans l'intervalle $[debut,fin[$. Noter que l'on peut aussi simuler directement une variable aléatoire $X \mapsto \mathcal{U}([a;b])$ en écrivant (voir exercice 1, p. 78) :

Console

```
np.floor((b+1-a)*rd.random()+a)
```

- **rd.geometric(p)**

La fonction `rd.geometric(p)` permet de simuler une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p . Pour rappel, si X renvoie le rang du premier succès dans une infinité d'expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes, $X \mapsto \mathcal{G}(p)$ où p est la probabilité d'un succès.

- **rd.binomial(n,p)**

De la même façon, on peut simuler une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n, p avec la commande `rd.binomial(n,p)`. Pour rappel, le nombre de succès obtenus lors d'une répétition de n expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes de probabilité de succès p suit une loi binomiale de paramètres n, p .

- **rd.poisson(lambda)**

Enfin, `rd.poisson(lambda)` simule une variable qui suit une loi de Poisson de paramètre λ .

Remarque. Toutes les méthodes précédentes peuvent aussi renvoyer une liste de valeurs tirées selon les différentes lois de probabilité plutôt qu'une seule valeur. Pour faire cela, il suffit de donner comme argument supplémentaire à

l'instruction la taille de la liste voulue. Par exemple, `rd.randint(1,100,200)` renvoie un tableau numpy contenant 200 entiers pris aléatoirement entre 1 et 100. De plus, la commande `rd.randint(1,100,[200,10])` renvoie une matrice de taille (200,10).

Exemple. Reprenons l'exemple d'un lancer de dé et comparons les probabilités théoriques avec les valeurs d'un échantillon par une simulation informatique. Plus l'échantillon est important, plus l'histogramme a de chance d'être très proche du diagramme en bâtons représentant la loi.

Editeur

```
# La loi de la variable
val=[1,2,3,4,5,6]
loi=[1/6,1/6,1/6,1/6,1/6,1/6]

# Simulation de la variable aléatoire
ech=np.floor(6*np.random.rand(m))+1

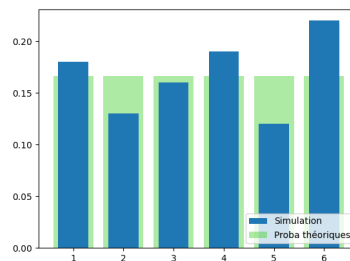
# Tracé du diagramme en bâtons
# bar(abscisses,ordonnées)
plt.bar(val,loi,color=(0.2, 0.8, 0.1, 0.4),label=
        'Proba théoriques')

# Tracé de l'histogramme
# hist(echantillon, bins=classe)
classe=[0.5,1.5,2.5,3.5,4.5,5.5,6.5]
plt.hist(ech,bins=classe,density=True,rwidth=0.6,
        label='Simulation')

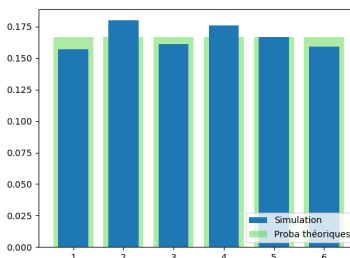
# density='true' pour un histogramme en fréquence

plt.legend(loc = 'lower right')
plt.show()
```

Échantillon de taille $m = 100$:



Échantillon de taille $m = 1000$:



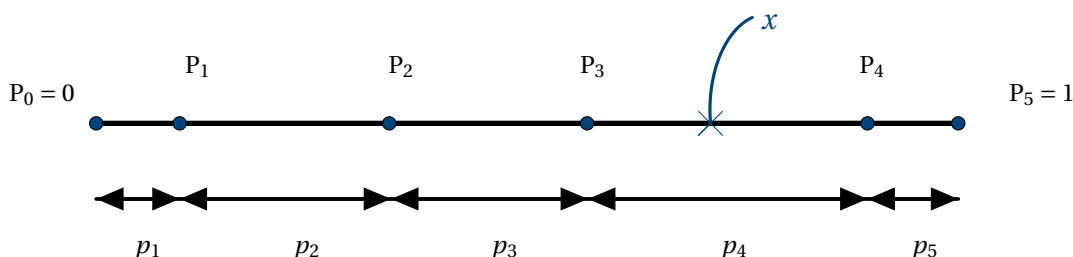
Exercice 42. ✧ Comment modifier le programme précédent pour une variable X donnant la somme de deux dés? # PY36

Simulation pour une loi discrète finie

Soit X une variable aléatoire finie. Pour simplifier le programme, on suppose $X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$. On note

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad p_i = \mathbf{P}(X = i) \quad \text{et} \quad P_i = \sum_{k=1}^i p_k.$$

On souhaite simuler la variable X uniquement avec la commande `rand()`. L'idée est la suivante : on simule la loi de X en tirant un réel x , au hasard dans $[0; 1]$ et en renvoyant l'entier k si x appartient à l'intervalle $[P_{k-1}; P_k]$. La probabilité que l'entier k soit choisi est alors $P_k - P_{k-1} = p_k = \mathbf{P}(X = k)$ (avec la convention $P_0 = 0$).



TP Exercice 43. ♦♦♦ 🎵 Simulation des v.a finies

PY37

1. Que représente les réels P_i en termes de probabilités et de X ?
2. Écrire un programme qui prend en argument la matrice-ligne $(p_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ correspond à la loi de X et simule X .
3. Tester votre programme sur la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1; 10 \rrbracket)$ et vérifier la cohérence du programme à l'aide d'un histogramme.

Exemple de simulation dans le cas infini dénombrable - la loi de Poisson

On peut toutefois étendre la méthode précédente au cas où X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Prenons le cas de $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Notons pour $k \in \mathbb{N}$,

$$p_k = \mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{et} \quad P_k = \sum_{j=0}^k p_j.$$

En particulier, on a
$$P_{k+1} = P_k + \frac{\lambda}{k+1} p_k.$$

TP Exercice 44. ♦♦ Simulation d'une loi de Poisson

PY38

1. Adapter la méthode précédente pour simuler $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
2. Comparer l'histogramme obtenu aux valeurs théoriques (diagramme en bâtons construit à l'exercice 8).

3.4 Quelques programmes de référence

Estimation d'une probabilité

Lorsque le calcul d'une probabilité d'un événement A est délicat, on peut se contenter d'une approximation. D'après la loi des grands nombres, il suffit de simuler informatiquement « un grand nombre de fois l'expérience » et de regarder la fréquence empirique du nombre de succès.

$$\mathbf{P}(A) \simeq F_N = \frac{\text{Nombre de succès}}{\text{Nombre d'essais}}.$$

Exemple. Le code permet d'avoir une approximation de la probabilité de faire un double avec deux dés.

Plusieurs essais à comparer à la valeur théorique $1/6$.

Editeur

```
# rd.randint(1,7) renvoie
# un nombre au hasard dans [1,6]

Compteur=0
for i in range(N):
    if rd.randint(1,7)==rd.randint(1,7):
        Compteur+=1
print(Compteur/N)
```

Console

```
>>> # script executed
0.161
>>> # script executed
0.1695
>>> # script executed
0.1765
```

Exercice 45. ♦ Paradoxe du prince de Toscane

PY39

1. Écrire une fonction Python qui prend en argument $k \in \llbracket 3; 18 \rrbracket$ et renvoie une approximation de la probabilité que la somme de trois dés équilibrés donne k .
2. Voici deux tests :

Console

```
compte(9)           compte(10)
>>> 0,1133          >>> 0,1257
```

On constate que la probabilité de faire 10 est légèrement supérieure à celle de 9. Pourtant, comme l'avait remarqué le prince de Toscane au XVII^e siècle, il y a autant de façons d'écrire 9 et 10 comme sommes de nombres compris entre 1 et 6 :

$$\begin{array}{ll} 9 & = 1+2+6 \\ & = 1+3+5 \\ & = 1+4+4 \\ & = 2+2+5 \\ & = 2+3+4 \\ & = 3+3+3 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ll} 10 & = 1+3+6 \\ & = 1+4+5 \\ & = 2+2+6 \\ & = 2+3+5 \\ & = 2+4+4 \\ & = 3+3+4 \end{array}.$$

Pouvez-vous expliquer ce paradoxe?

Exercice 46. ♦♦*d'après oraux HEC 2023* #PY40

Soient X, Y deux variables aléatoires qui suivent une loi uniforme sur $[[1; n]]$. Écrire un programme Python qui permet de donner une valeur approchée de

$$P(E_n) \quad \text{où } E_n \text{ est l'événement "X/Y est un entier."}$$

Estimation d'une espérance

Soit X , une variable aléatoire réelle admettant une espérance.

En utilisant une nouvelle fois la loi faible des grands nombres, on peut approximer $E(X)$ en simulant un grand nombre de fois la variable aléatoire X et en effectuant la moyenne arithmétique de l'échantillon obtenu.

$$E(X) \simeq \frac{x_1 + \dots + x_N}{N} \quad \text{où } N \text{ représente la taille de l'échantillon } (x_1, \dots, x_N).$$

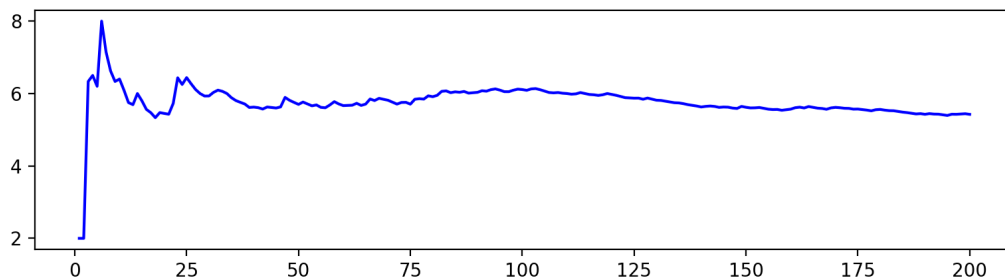
TP Exercice 47. ♦ 🎵*d'après Ecricome 2021, voie E* #PY41

On lance indéfiniment une pièce équilibrée. On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux «Pile» consécutifs.

1. Recopier et compléter la fonction Python ci-contre afin qu'elle simule les lancers de la pièce jusqu'à l'obtention de deux «Pile» consécutifs, et qu'elle renvoie le nombre de lancers effectués.
2. Écrire une fonction moyenne d'argument n qui simule n fois l'expérience ci-dessus et renvoie la moyenne des résultats obtenus.
3. On calcule moyenne(n) pour chaque entier n de $[[1, 200]]$, et on trace les résultats obtenus dans le graphe suivant. Que pouvez-vous conjecturer sur la variable aléatoire X ?

Editeur

```
def simulX():
    tirs=0
    pile=0
    while pile ... :
        if rd.random() < 1/2 :
            pile ...
        else :
            pile ...
            tirs ...
    return ...
```

**TP Exercice 48. ♦♦ Estimation de l'espérance et de la variance**

#PY42

Une urne contient trois boules : une rouge, une bleue et une blanche. On tire avec remise dans l'urne jusqu'à l'apparition de la première boule blanche. Soit X , la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées. Écrire un programme qui permet d'approximer l'espérance et la variance de X .

3.5 Les exercices**Exercice 49. ♦ Moments**

#PY43

Soit X une variable aléatoire sur un univers fini. On rappelle que donner la loi de X signifie donner

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \quad \text{et} \quad \forall i \in [[1; m]], \quad P([X = x_i]).$$

Dans ce cas, on définit les listes val et Loi par :

$$\text{val} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_m] \quad \text{et} \quad \text{Loi} = [P([X = x_1]) \quad P([X = x_2]) \quad \dots \quad P([X = x_m])]$$

1. Écrire une fonction Python, nommée moment, qui prend en argument les deux listes (val, Loi), un entier s et renvoie renvoie le moment d'ordre s : $E(X^s)$.

2. En utilisant uniquement la fonction `moment`, écrire une nouvelle fonction qui calcule la variance.

Exercice 50. ♦ 🎵 **Lois usuelles uniquement avec la commande `random()`**

PY44

Une urne contient 5 boules (1 rouge et 4 bleues). On considère l'expérience suivante :

On tire une boule au hasard et on note la couleur. On replace ensuite la boule dans l'urne.

1. Soit X la variable aléatoire qui renvoie 1 si la boule est rouge et 0 sinon.
Préciser la loi de X .
En utilisant uniquement la commande `random`, écrire un programme qui simule la variable X .
2. On répète maintenant n fois l'expérience élémentaire. On suppose les tirages mutuellement indépendants. On note Y le nombre de boules rouges obtenues.
Quelle est la loi de Y ?
Avec la commande `random`, écrire un programme qui prend en argument n et simule Y .
3. On répète maintenant une infinité de fois l'expérience élémentaire. On suppose toujours les tirages mutuellement indépendants. On note Z le numéro du tirage où on a obtenu la première boule rouge.
Quelle est la loi de Z ? Écrire un programme qui simule la variable Z .
4. Modifier le programme précédent pour simuler la variable X_2 qui donne le numéro du tirage où on obtient la seconde boule rouge.
Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Généralisez la question avec X_r , la variable aléatoire qui renvoie le tirage de la r -ième boule rouge.

Exercice 51. ♦♦ **Le problème du collectionneur**

PY46

Afin de relancer ses ventes, une marque met en ligne une nouvelle série de 20 figurines Schtroumpfs dans ses paquets de céréales. Blaise, père attentionné, souhaite obtenir la collection complète pour son enfant tout en maîtrisant son budget petit-déjeuner.

Plutôt que de faire les calculs, Blaise simule le problème pour répondre à la question :

Quelle est la probabilité d'obtenir la collection complète avec 50 paquets?

Pour simuler l'achat de n paquets, Blaise propose le pseudo-code :

- Les figurines sont numérotées de 0 à 19.
On suppose qu'elles ont la même probabilité d'apparition.
- L est une matrice ligne avec 20 coefficients. Chaque coefficient $L[k]$ peut prendre deux valeurs : 1 si Blaise possède la figurine k , 0 sinon.
Au début de la simulation, L est donc la matrice nulle $0_{1,20}$.
- Pour i variant de 1 à n , Blaise tire au hasard une figurine. Notons j , le numéro de la figurine. On affecte 1 au j -ème coefficient de L .
- Au bout des n tirages, on affiche L .
Si L ne contient que des 1, Blaise possède la collection complète.

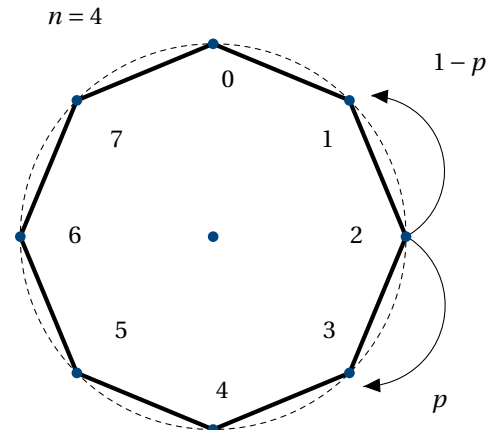
1. a) Écrire une fonction, qui prend comme argument n et renvoie la matrice L .
Rappel. La commande `randint(p, q)` renvoie un entier dans $[p; q - 1]$ choisi au hasard.
b) Écrire une fonction qui prend en arguments deux entiers n, m et simule m tirages indépendants de n paquets et renvoie la fréquence empirique de l'événement « La collection est complète ».
Indication. Pour vérifier que la collection est complète, on pourra vérifier que la somme des coefficients de L vaut 20.
2. a) Donner une réponse à la question de Blaise à l'aide de Python.
b) Combien de paquets faut-il acheter pour avoir la collection complète avec une probabilité supérieure à 90%?

Exercice 52. ♦♦ Mobile sur un polygone

PY47

On place $2n$ points numérotés de 0 à $2n-1$ sur un cercle. Les points sont répartis uniformément. Un mobile part initialement de 0 et à chaque étape, il avance d'une unité avec une probabilité p et recule avec probabilité $1-p$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, le nombre d'étapes. On note :

- Pour tout $k \in \llbracket 0; N \rrbracket$, on note X_k la position du mobile à la k -ième étape.
- T_p la variable aléatoire égale au temps de retour à l'origine. Si le mobile ne retourne pas à l'origine au bout des N étapes, on pose $T_p(\omega) = 0$.



1. Compléter ce programme qui prend en argument p , simule les 100 premières étapes du mobile et renvoie la position finale du mobile.

Editeur

```
...
def simulation(p,n) :
    X=0
    for i in range(100) :
        ...
        X=X%(2*n) # renvoie le reste de la division par 2n
    return X
```

2. Modifier le programme pour afficher le temps T_p de premier retour à l'origine 0.
3. En déduire une approximation de l'espérance de T .
4. Comparer $E(T_p)$ et $E(T_{1-p})$.

Exercice 53. ♦♦

vu à l'oral HEC 2024 # PY48

Un pion se trouve à l'origine de l'axe des abscisses. Il se déplace vers la gauche ou vers la droite d'une unité à chaque fois de manière équiprobable.

Écrire une fonction python qui prend en argument $n \in \mathbb{N}$ et qui simule son déplacement en renvoyant :

- un tableau à une ligne de $n+1$ colonnes dont le coefficient en position k est la position du pion après k déplacements;
- un tableau à deux lignes et $2n+1$ colonnes où la première ligne contient les entiers de $-n$ à n , la deuxième ligne indique le nombre de fois où le pion est passé par cette case.

Exercice 54. ♦♦ 🎵

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de même paramètre p . Soit $f(p)$, la probabilité que la matrice suivante soit inversible # PY49

$$A = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y & X \end{bmatrix}.$$

1. Proposer un programme qui prend en argument p et donne une approximation de $f(p)$ (notée dans la suite $\tilde{f}(p)$).
2. Tracer le graphe de $p \mapsto \tilde{f}(p)$ pour $p \in]0; 1[$.
3. Faire le calcul exact de $f(p)$ et comparer avec les résultats précédents.

TP

Exercice 55. ♦♦♦ 🎵 Deux méthodes pour approximer une somme

PY50

1. Justifier la convergence de la série $\sum \sqrt{1+e^k} \frac{2^k}{k!}$. Dans la suite, on pose $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{1+e^k} \frac{2^k}{k!}$.
2. En calculant les sommes partielles, donner une approximation de S .
3. En utilisant une variable X suivant une loi de Poisson de paramètre 2, exprimer S sous forme d'une espérance. En déduire une approximation de S .

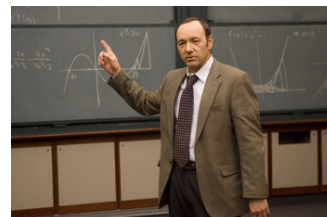
Exercice 56. ♦♦♦ ⚙️ Résolution et simulation du Monty-Hall

#PY51

Dans le film *Las Vegas 21*, Micky Rosa est professeur au M.I.T. Il soumet à ses étudiants, dont Ben, le problème du Monty-Hall.

Micky Rosa : Ben, vous participez à un jeu télévisé et on vous donne la possibilité de choisir entre trois portes différentes, d'accord ? Derrière l'une des trois portes, il y a une voiture neuve, et derrière les deux autres, des chèvres. Quelle porte choisiriez-vous, Ben ?

Ben : Porte n°1 ?



Micky Rosa : Ben choisit la porte n°1 et là, l'animateur de jeu télé qui, soit dit en passant, sait ce qu'il y a derrière chacune des trois portes, décide d'ouvrir une autre des trois portes ; disons qu'il choisit la n°3, derrière laquelle se trouve une chèvre. Bien. Ben... L'animateur s'approche et dit "Ben, vous voulez garder la porte n°1 ou prendre la porte n°2 ?". Alors, est-il dans votre intérêt de changer de choix ?

Ben : Oui.

Micky Rosa : Attendez. Souvenez-vous : l'animateur sait où est la voiture. Alors, comment être sûr qu'il ne joue pas avec vous, qu'il n'essaie pas de vous déstabiliser pour vous faire choisir la chèvre ?

Est-ce que Ben a raison de changer de porte ?

Pour cela, on simulera un grand nombre de parties de Monty Hall (avec un choix aléatoire de porte) en distinguant les deux cas : on garde la porte, puis on change de porte.



[Lien vers l'extrait du film
Game Theory Scene | 21\(2008\) | Now Playing](#)



[Lien vers un documentaire
Voyages au pays des maths | ARTE](#)

4

Variables aléatoires à densité

4.1 Lien entre histogramme et densité

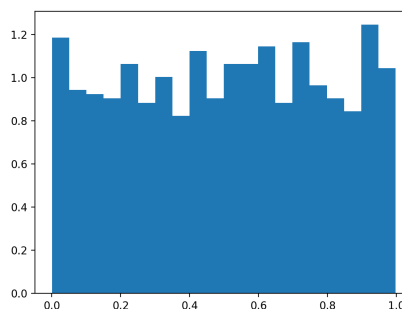
Commençons par l'exemple d'une simulation d'une loi uniforme.

Le script Python ci-dessous renvoie m réels uniformément dans $[0; 1]$, puis affiche l'histogramme.

Editeur

```
m=1000
L= np.random.rand(m)
classes =np.linspace(0,1,10)

plt.hist(L, bins=20, density=True)
# Création de l'histogramme
plt.show()
```

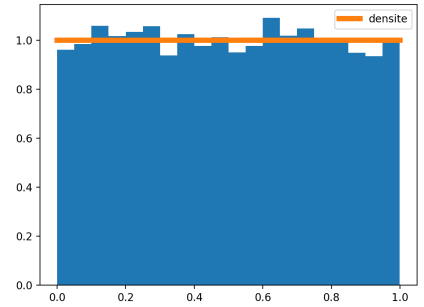
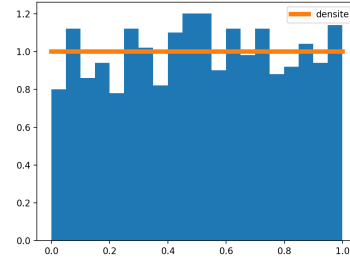


Expliquons les commandes :

- `density=True` : Trace l'histogramme en fréquence.
- `bins=...` : Si on met une valeur entière en argument, on définit le nombre de classes. Sinon, c'est une liste (ou un tableau) qui définit les différents intervalles des classes.
- `rwidth=...` : Largeur relative de la barre par rapport à l'intervalle (facultatif).

Dans cet exemple, il est utile de rajouter la courbe représentative d'une densité et d'augmenter la taille de l'échantillon. On constate alors que **plus la taille de l'échantillon augmente, plus on a de chance que l'histogramme « se rapproche » de la courbe représentative de la densité.**

```
x=[0,1]; y=[1,1]
plt.plot(x,y,linewidth=5,label="densite")
plt.legend()
plt.show()
# test avec m=1000, puis m=10000
```



4.2 Simulation de variables aléatoires à densité

Premiers exemples

Comme pour les variables discrètes, la bibliothèque `numpy.random` importée via `rd` permet de simuler les lois à densité usuelles.

- La commande `rd.random()` simule une loi uniforme continue sur $]0;1[$.
- `rd.exponential(a)` renvoie la simulation d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $1/a$.

Attention, c'est l'inverse du paramètre.

- `rd.normal(mu,sigma)` renvoie la simulation d'une variable aléatoire de loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ .
- `rd.gamma(a)` renvoie la simulation d'une variable aléatoire de loi gamma de paramètre a .

• Pour une loi uniforme sur $[a;b]$, on peut utiliser la commande `rd.uniform(a, b)`. On pourra toutefois remarquer que la simulation la loi uniforme sur $[a;b]$ s'obtient directement à l'aide de la commande `rd.random()`.

Exercice 57. ♠ 🎵 En utilisant uniquement la commande `rd.random()`, expliquer comment simuler une variable aléatoire suivant une loi uniforme continue sur $[a,b]$. # PY52

Remarque. Comme dans le cas discret, toutes ces commandes peuvent aussi renvoyer une liste de valeurs tirées selon les différentes lois de probabilité plutôt qu'une seule valeur. Pour faire cela, il suffit de donner comme argument supplémentaire à l'instruction la taille de la liste voulue. Par exemple, `rd.rd.uniform(1,2,500)` renvoie un tableau `numpy` contenant 500 nombres pris au hasard dans $[1;2]$.

La méthode d'inversion

L'idée repose sur l'énoncé suivant :

Si	$\rightarrow U$ suit la loi uniforme sur $]0;1[$. $\rightarrow X$ est une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition F est une bijection de $]a;b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ sur $]0;1[$.
----	--

Alors La variable $Y = F^{-1}(U)$ suit la même loi que X .

Exercice 58. ♠ 🎵 Prouver l'énoncé précédent.

PY53

On dit qu'une variable aléatoire X à densité suit une loi de Cauchy si une densité est donnée par $f : t \in \mathbb{R} \mapsto 1/(\pi(1+t^2))$. On a vu que la fonction de répartition est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \arctan(x)/\pi + 1/2$. La fonction F est strictement croissante, continue de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$. Le théorème de la bijection s'applique

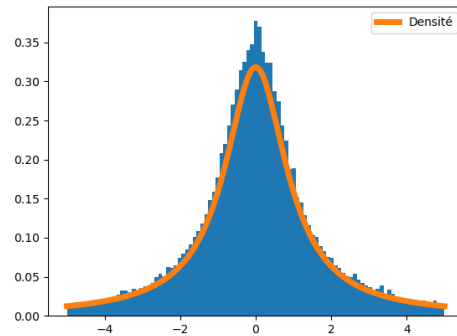
$$\forall t \in]0;1[, \quad F^{-1}(t) = \tan(\pi(t - 1/2)).$$

D'après l'exercice précédent, si U suit une loi uniforme continue sur $]0;1[$, alors la variable $F^{-1}(U)$ suit une loi de Cauchy. Ci-dessous, un histogramme d'un échantillon obtenu par simulation par la méthode d'inversion. On vérifie bien que l'histogramme obtenu est très proche d'une densité de la loi de Cauchy.

```

U= np.random.rand(50000)
L=np.tan(np.pi*(U-1/2))
inter=np.linspace(-5,5,100)
plt.hist(L, bins=inter, density=True)
# Création de l'histogramme
x=np.linspace(-5,5,200)
y=1/(np.pi*(1+x**2))
plt.plot(x,y,linewidth=5,label="Densité")
plt.legend()
plt.show()

```



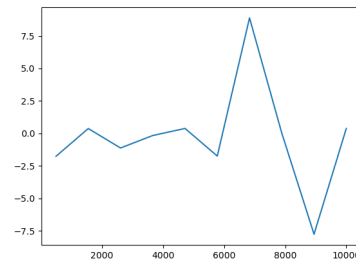
Exercice 59. ♦♦ 🎵 Expliquer l'intérêt du code suivant? Qu'illustre-t-on sur la loi de Cauchy?

PY55

```

Liste=100*np.linspace(5,100,10)
E=np.zeros(10)
for i in range(10):
    U= np.random.rand(Liste[i])
    L=np.tan(np.pi*(U-1/2))
    e=sum(L)/Liste[i]
    E[i]=e
plt.plot(Liste,E)
plt.show()

```



TP Exercice 60. ♦ 🎵 Adapter la méthode précédente pour simuler une loi exponentielle de paramètre λ .

PY56

Méthode par rejet

Soit X , une variable à densité et f , une densité. On suppose que f est bornée et à support borné. C'est-à-dire, qu'il existe $K \in \mathbb{R}^+$, $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ tels que

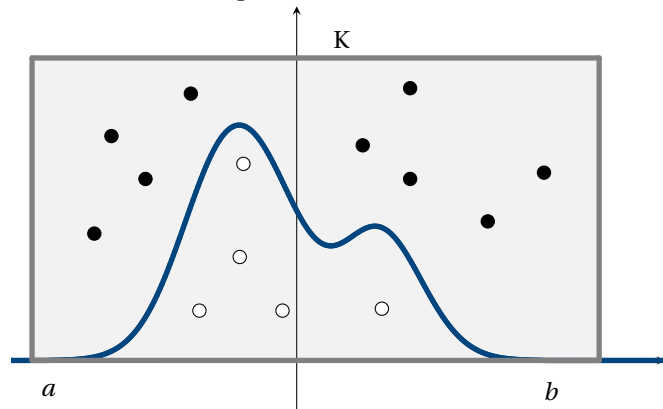
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq f(x) \leq K \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \text{ si } x \notin [a; b].$$

Rappelons que l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$, $x = b$ correspond exactement à la probabilité que la variable aléatoire prenne les valeurs comprises entre a et b .

$$\text{Aire} = \int_a^b f(t) dt = \mathbf{P}([a \leq X \leq b]).$$

Ainsi, pour simuler la variable X , on peut tirer un point au hasard sous la courbe représentative de f de manière uniforme. On prend alors pour réalisation l'abscisse de ce point.

Précisons que pour tirer un point sous la courbe, on tire un point au hasard dans le rectangle $[a; b] \times [0; K]$ à l'aide de deux lois uniformes. Si ce dernier est sous la courbe, on le garde. Sinon, on recommence.



Exercice 61. ♦ Quelle est la loi du nombre d'essais avant de tirer un point qui est bien situé sous la courbe de f ? # PY57

TP Exercice 62. ♦♦ **Exemple de simulation par la méthode de rejet**

PY58

Soit X une variable aléatoire dont une densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f . Quelles valeurs choisir pour a , b et K ?
2. a) Comment tirer un point au hasard dans le rectangle $[a; b] \times [0; K]$ à l'aide de la commande `rd.random`?
b) En déduire un programme Python qui simule la variable X .

4.3 Compléments sur les variables à densité

TP Exercice 63. ♦♦ 🎵 Simulation d'une loi géométrique à partir d'une loi exponentielle

PY59

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose $Y = \lfloor X \rfloor + 1$.

1. Montrer $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - e^{-\lambda})$.
2. En déduire un programme qui simule une loi géométrique de paramètre p à partir de la loi exponentielle.

Exercice 64. ✧ Simulation d'un loi de Pareto

PY60

Soient $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta x^{1+1/\theta}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.
On considère dans la suite une variable aléatoire X strictement positive de densité f et on note F sa fonction de répartition.
2. On pose $Y = \ln(X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X . On note G sa fonction de répartition.
Justifier que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
3. On rappelle qu'en Python, la commande `rd.exponential(a)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $1/a$. Écrire une fonction Python `simuP` prenant en argument θ et permettant de simuler la variable X .
4. Commenter les résultats des lignes suivantes.

Editeur

```
def mystere(theta):
    A=np.zeros(5)
    for p in range(2,7):
        S=0
        for k in range(1,10**p):
            S+=simuP(theta)
        A[p-2]=round(S/10**p,3)
        # round(..,3) arrondit
        # le résultat à 10**(-3)
    return A
```

Console

```
>>> mystere(1/2)
array([2.197, 2.103, 2.011, 1.992, 2.   ])

>>> mystere(1)
array([ 4.892,  8.204, 15.007, 10.577,
        13.309])

>>> mystere(1.2)
array([ 7.318, 12.865, 29.35 , 502.559,
        187.655])
```

TP Exercice 65. ♦ 🎵 Simulation d'une loi de Laplace

PY61

Une variable aléatoire à densité X suit la loi de Laplace si une densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

1. Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$. Donner la loi de $X = -\ln(U)$.
2. Méthode 1.
 - a) Justifier que si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé qui suivent une loi exponentielle de paramètre 1 alors la différence $X - Y$ suit une loi de Laplace.
 - b) En déduire un programme Python qui simule une loi de Laplace en utilisant uniquement la commande `rd.random()`.
 - c) Tester votre programme en comparant les histogrammes obtenus avec la densité.
3. Méthode 2.
On considère deux variables aléatoires X et Y , définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, et indépendantes. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre 1. On suppose par ailleurs que la loi de Y est donnée par

$$\mathbf{P}(Y = 1) = \mathbf{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}.$$

L'indépendance de X et Y se traduit par les égalités suivantes, valables pour tout réel x :

$$\mathbf{P}([X \leq x] \cap [Y = 1]) = \mathbf{P}(X \leq x)\mathbf{P}(Y = 1) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([X \leq x] \cap [Y = -1]) = \mathbf{P}(X \leq x)\mathbf{P}(Y = -1).$$

On pose $Z = XY$ et on admet que Z est, elle-aussi, une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

- a) Vérifier que Z suit une loi de Laplace.
- b) Comment simuler la variable Y ?
- c) En déduire un nouveau programme qui simule une loi de Laplace.

4. Compléments sur la loi de Laplace.

d'après Essec 2017 E

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}^+$. On dit qu'une variable aléatoire réelle à densité suit une loi de Laplace de paramètre (α, β) , notée $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$, si elle admet comme densité la fonction f donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|t - \alpha|}{\beta}\right)$$

- a) Montrer que si U suit la loi $\mathcal{L}(0; 1)$, alors $V = \beta U + \alpha$ suit la loi $\mathcal{L}(\alpha; \beta)$.
- b) Conclure en donnant un programme qui simule une variable de loi $\mathcal{L}(\alpha; \beta)$.

TP Exercice 66. ♦♦ 🎵 Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $J_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt$. L'objectif est d'obtenir une valeur #PY63 approchée de l'intégrale J_n à l'aide de Python.

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose :

$$Y_n = \frac{-X}{1 + e^{-nX}}.$$

Exprimer, à l'aide du changement de variable $u = -\ln(t)$, $E(Y_n)$ en fonction de J_n .

2. On rappelle que dans la bibliothèque Python `numpy.random` importée par `rd` se trouve l'instruction `rd.exponential(a)` qui renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $1/a$. Écrire une fonction qui prend en argument n et permet d'approximer J_n .

Exercice 67. ♦ Écrire un programme qui prend en argument une matrice ligne $x \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et un entier p et #PY74 renvoie

$$S_p(x) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}.$$

Tirer au hasard une matrice $x \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$ et tracer $(S_p(x))_{p \in \llbracket 1; 20 \rrbracket}$. Que constatez-vous?



Lettres grecques



Α α alpha	Β β beta	Γ γ gamma	Δ δ delta	Ε ε epsilon
Ζ ζ zeta	Η η eta	Θ θ theta	Ι ι iota	Κ κ kappa
Λ λ lambda	Μ μ mu	Ν ν nu	Ξ ξ xi	Ο ο omikron
Π π pi	Ρ ρ rho	Σ σ/ς sigma	Τ τ tau	Υ υ upsilon
Φ φ phi	Χ χ chi	Ψ ψ psi	Ω ω omega	



Il est utile de connaître les lettres grecques. Il est parfois difficile de suivre les étudiants lorsqu'ils confondent deux lettres de leurs énoncés.

Rapport de Jury : Oral, HEC 2021

Exercice : Traduire $0 + 0 = \theta\tau\tau$.