

DM 1 - sujet A

THÈME : RÉVISIONS EN ANALYSE

Exercice 1
 Étude d'une suite

- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
- 1. a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$.
 b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \ln(n) + 1$.
- On considère une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.
- 2. Écrire un programme Python qui prend en argument n et renvoie u_n . Adapter le code pour renvoyer la matrice

$$\begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix}.$$
- 3. Conjecturer un équivalent de u_n à l'aide du test suivant.

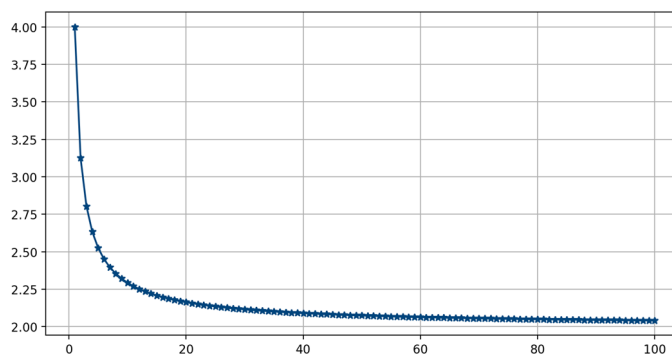
Editeur

```

n=100
U= suiteU(n)
V=np.zeros(n)
for i in range(1,n+1):
    V[i-1]=U[i]**2/i

X=np.linspace(1,n,n)
plt.grid()
plt.plot(X,V,'*-')
plt.show()

```



- 4. Vérifier que la suite u est croissante et de limite $+\infty$.
- 5. a) Pour tout entier naturel k , exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k^2 .
 b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \geq 2n.$$
- 6. a) Justifier que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}$.
 b) Établir que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$

- 7. Prouver la conjecture.

Exercice 2
Intégrales

Pour tout réel a strictement positif et tout entier naturel n , on pose :

$$I_n(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at} (1 - e^{-t})^n dt.$$

1. Justifier la convergence de l'intégrale généralisée définissant $I_n(a)$.
2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a

$$I_n(1) = \frac{1}{n+1}.$$

- b) En déduire que, pour tout réel a vérifiant $a \geq 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(a) = 0$.
3. a) Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}_*^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)(I_n(a) - I_{n+1}(a)) = aI_{n+1}(a).$$

- b) En déduire $I_{n+1}(a)$ en fonction de $I_n(a)$.
4. Pour tout réel a vérifiant $a > 1$ et tout entier naturel n , on pose : $S_n(a) = \sum_{k=0}^n I_k(a)$.

a) Prouver l'égalité : $S_n(a) = \frac{1}{a-1} - \frac{n+1}{a-1} I_n(a)$.

b) Montrer que, pour tout réel a vérifiant $a > 1$, la série $\sum I_k(a)$ converge.

5. Pour tous x et y réels strictement positifs, on pose

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad \text{et} \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

On a vu à l'exercice RA8 que

$$B(n+1, y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{n^y}$$

- a) Exprimer $I_n(a)$ sous la forme $B(\alpha, \beta)$ à l'aide du changement de variable $u = e^{-t}$.
- b) En déduire un équivalent de $I_n(a)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Retrouver et améliorer le résultat de la 4.b).
6. Écrire une fonction Python qui prend en arguments a et n puis renvoie la valeur de $S_n(a)$.

– FIN SUJET A –

DM 1 - sujet ♦

THÈME : RÉVISIONS EN ANALYSE

Problème

Sous-espace de $L^2(\mathbb{R}^+)$ et inégalités de Cauchy-Schwarz et de Carlson

Dans la suite, on pose E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$ converge.

1. Structure d'espace vectoriel

- a) Vérifier que si $f, g \in E$ alors $\int_0^{+\infty} f(t)g(t) dt$ converge.
b) En déduire que E est un espace vectoriel.

2. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout $(f, g) \in E^2$, on pose : $\varphi(f, g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t) dt$ et $\Phi(f) = \varphi(f, f)$.

- a) Soient $f, g \in E$. Justifier que l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto \Phi(f + xg)$ est une fonction polynomiale de degré au plus 2.
b) En déduire que pour tout $(f, g) \in E^2$

$$\varphi(f, g)^2 \leq \Phi(f)\Phi(g).$$

3. Calculer $\Phi(u)$ où $u : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

4. Inégalité de Carlson

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto tf(t) \in E$. L'objectif est d'établir

$$\left(\int_0^{+\infty} f(t) dt \right)^4 \leq \pi^2 \left(\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt \right) \left(\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt \right).$$

Pour simplifier les notations, on pose

$$I_f = \int_0^{+\infty} f(t) dt, \quad J_f = \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt \quad \text{et} \quad K_f = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt.$$

- a) Montrer que $f \in E$ et $I_f^2 \leq \frac{\pi}{2} (J_f + K_f)$.
b) En appliquant l'inégalité précédente à une fonction auxiliaire, déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$

$$I_f^2 \leq \frac{\pi}{2} \left(\lambda J_f + \frac{1}{\lambda} K_f \right)$$

- c) Conclure sur l'inégalité.

5. On pose $h : t \in \mathbb{R} \mapsto 1/(1+t^2)$.

- a) Calculer I_h .
b) Vérifier que pour tout $x \in [0; \pi/2[$, $h(\tan(x)) = \cos(x)^2$ et $\tan'(x) = 1/\cos(x)^2$. À l'aide d'un changement de variable, calculer J_h .
c) Simplifier $K_h + J_h$. En déduire K_h .
d) Vérifier qu'il y a égalité dans l'inégalité de Carlson avec h .

6. Application (facultatif)

Déterminer un réel $C(a)$ tel que

$$\forall a > 1, \quad \Gamma(a)^4 \leq C(a) \Gamma(2a-1) \Gamma(2a+1).$$

Pour rappel, la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$.

Exercice - informatique
Spirale de Cornu

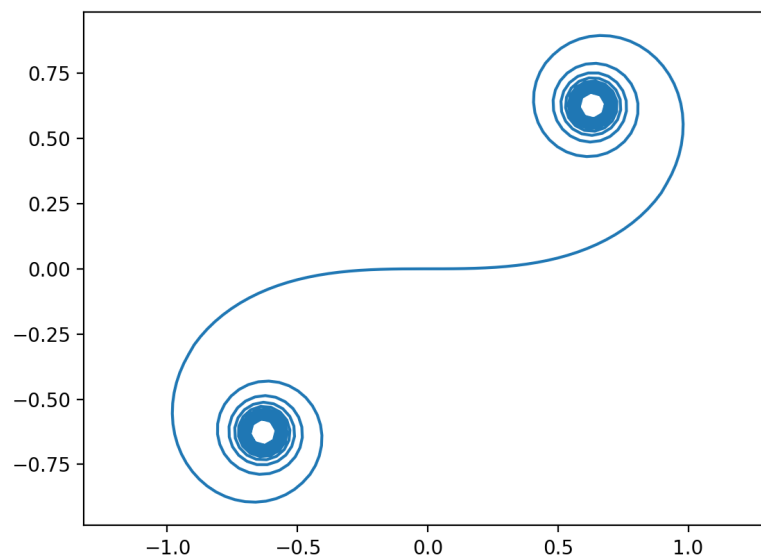
Pour tout réel t , on pose

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t \cos(s^2) \, ds \\ y(t) = \int_0^t \sin(s^2) \, ds \end{cases}$$

1. Écrire un programme qui prend en argument t et renvoie une approximation de $x(t)$ par la méthode des rectangles.
2. Proposer un programme Python qui permet de représenter l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ donnés par :

$$\left\{ (x(t), y(t)) \mid t \in [-10; 10] \right\}.$$

Ci-dessous, le résultat que vous devez obtenir.



– FIN SUJET ♦ –

DM 1 - sujet Cube

THÈME : RÉVISIONS EN ANALYSE

Problème (version cube)

Sous-espace de $L^2(\mathbb{R}^+)$ et inégalités de Cauchy-Schwarz et de Carlson

Dans la suite, on pose E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $\int_0^{+\infty} f(x)^2 dx$ converge.

1. Structure d'espace vectoriel

- a) Vérifier que si $f, g \in E$ alors $\int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx$ converge.
- b) En déduire que E est un espace vectoriel.

2. Un produit scalaire

- a) Justifier que l'application $(f, g) \in E^2 \mapsto \langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx$ est un produit scalaire. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.
- b) Calculer $\|u\|^2$ où $u : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. Inégalité de Carlson

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto xf(x) \in E$. L'objectif est d'établir

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x) dx \right)^4 \leq \pi^2 \left(\int_0^{+\infty} f(x)^2 dx \right) \left(\int_0^{+\infty} x^2 f(x)^2 dx \right).$$

Pour simplifier les notations, on pose

$$I_f = \int_0^{+\infty} f(x) dx, \quad J_f = \int_0^{+\infty} f(x)^2 dx \quad \text{et} \quad K_f = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)^2 dx.$$

- a) Montrer que $f \in E$ et

$$I_f^2 \leq \frac{\pi}{2} (J_f + K_f).$$

- b) En appliquant l'inégalité précédente à une fonction auxiliaire, déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$

$$I_f^2 \leq \frac{\pi}{2} \left(\lambda J_f + \frac{1}{\lambda} K_f \right)$$

- c) Conclure sur l'inégalité.

- d) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\gamma}{\alpha + t^2}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

4. Application

Déterminer un réel $C(a)$ tel que

$$\forall a > 1, \quad \Gamma(a)^4 \leq C(a) \Gamma(2a-1) \Gamma(2a+1).$$

Pour rappel, la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$.

Exercice - informatique
Spirale de Cornu

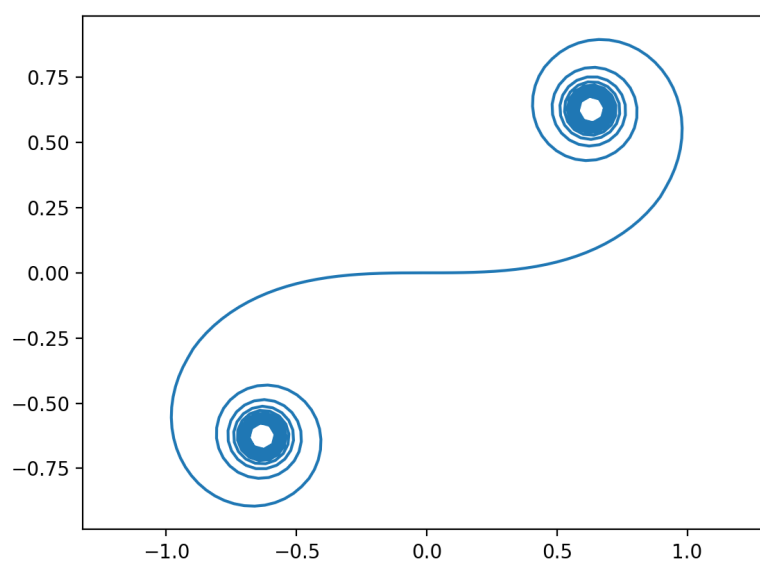
Pour tout réel t , on pose

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t \cos(s^2) \, ds \\ y(t) = \int_0^t \sin(s^2) \, ds \end{cases}$$

1. Écrire un programme qui prend en argument t et renvoie une approximation de $x(t)$ par la méthode des rectangles.
2. Proposer un programme python qui permet de représenter l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ donnés par :

$$\left\{ (x(t), y(t)) \mid t \in [-10; 10] \right\}.$$

Ci-dessous, le résultat que vous devez obtenir.



– FIN SUJET CUBE –

DM 1 A - solution

Exercice 1

Étude d'une suite

1.a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k, k+1]$, on a par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$

$$t \leq k+1 \quad \text{puis} \quad \frac{1}{t} \geq \frac{1}{k+1}.$$

En intégrant

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} = \frac{1}{k+1}((k+1) - k) = \frac{1}{k+1}.$$

1.b) En sommant entre $k=1$ et $k=n-1$, il vient par la relation de Chasles

$$\int_1^n \frac{dt}{t} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

Avec le changement d'indice $i = k+1$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - 1 = v_n - 1.$$

De plus $\int_1^n \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_1^n = \ln(n) - 0.$

Finalement

$$\ln(n) \geq v_n - 1 \quad \text{d'où} \quad v_n \leq \ln(n) + 1.$$

2.

```
def suite(n):
    u=1
    for i in range(n):
        u=u+1/u
    return u
```

• Pour le second code, on propose deux solutions :

```
import numpy as np
def suiteU(n):
    U=np.zeros(n+1)
    U[0]=1
    for i in range(n):
        U[i+1]=U[i]+1/U[i]
    return U
```

```
def suiteUbis(n):
    U=np.ones(n+1)
    u=1
    for i in range(1,n+1):
        u=u+1/u
        U[i]=u

    return U
```

3. La matrice V contient les termes

$$\begin{bmatrix} \frac{u_1^2}{1} & \frac{u_2^2}{2} & \dots & \frac{u_n^2}{n} \end{bmatrix}$$

À l'affichage, on conjecture que

$$\frac{u_n^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \neq 0.$$

D'où

$$\frac{u_n^2}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2, \quad u_n^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2n \quad \text{puis} \quad u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2n}.$$

4. Par récurrence immédiate

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0.$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} \geq 0.$$

La suite est croissante. D'après le théorème de convergence monotone, il n'y a que deux cas possibles :

→ I. La suite converge vers une limite finie ℓ ;

→ II. La suite tend vers $+\infty$.

Justifions que le premier cas est impossible pour justifier le second. En effet, si

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell \in \mathbb{R}_+^*$$

alors par passage à la limite dans la relation de récurrence

$$\ell = \ell + \frac{1}{\ell} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\ell} = 0 \quad (\text{Absurde}).$$

Ce qui conclut.

5.a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} u_{k+1}^2 - u_k^2 &= (u_{k+1} - u_k)(u_{k+1} + u_k) \\ &= \frac{1}{u_k} \left(2u_k + \frac{1}{u_k} \right) = 2 + \frac{1}{u_k^2}. \end{aligned}$$

5.b) On peut procéder par récurrence mais il est plus élégant ici de faire un télescope

$$\begin{aligned} u_n^2 - u_0^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(2 + \frac{1}{u_k^2} \right) \\ &= 2(n-1+1) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}. \end{aligned}$$

Comme $u_0^2 = 1$, on a bien

$$u_n^2 = 1 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}.$$

La minoration est directe car la somme est positive.

6.a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$u_k^2 \geq 2k \quad \text{puis} \quad \frac{1}{u_k^2} \leq \frac{1}{2k}.$$

Par somme
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} v_{n-1}.$$

Puis
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leq \frac{1}{u_0^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leq 1 + \frac{1}{2} v_{n-1}.$$

On conclut avec l'égalité de la 5.b).

6.b) Soit $n \geq 2$, $n-1 \in \mathbb{N}^*$ et on peut utiliser la 1.b) pour avoir

$$v_{n-1} \leq 1 + \ln(n-1)$$

puis

$$\begin{aligned} u_n^2 &\leq 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1} \leq 2n + 2 + \frac{1}{2} (1 + \ln(n-1)) \\ &\leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

7. On a pour tout entier $n \geq 2$

$$2n \leq u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$$

$$\text{D'où} \quad 1 \leq \frac{u_n^2}{2n} \leq 1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n-1)}{4n}.$$

D'après les croissances comparées, le membre de droite tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. Par encadrement

$$\frac{u_n^2}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

C'est-à-dire

$$u_n^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2n \quad \text{puis} \quad u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2n}.$$

La conjecture est vérifiée.

Exercice 2

Étude d'une suite d'intégrales

1. L'intégrande est continue sur $[0; +\infty[$. On a une intégrale généralisée en $+\infty$. Or, au voisinage de $+\infty$, on a

$$e^{-at} (1 - e^{-t})^n \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-at}.$$

Comme $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ converge, par le critère d'équivalence des intégrales des fonctions positives, $I_n(a)$ converge.

2.a) Posons, pour $A > 0$,

$$J_n(A) = \int_0^A e^{-at} (1 - e^{-t})^n dt.$$

On a une primitive explicite, d'où

$$J_n(A) = \left[\frac{1}{n+1} (1 - e^{-t})^{n+1} \right]_0^A = \frac{1}{n+1} (1 - e^{-A})^{n+1}.$$

$$\text{À la limite} \quad I_n(1) = \lim_{A \rightarrow +\infty} J_n(A) = \frac{1}{n+1}.$$

2.b) Pour tout réel $a \geq 1$, on a pour $t \geq 0$, $at \geq t$ donc $e^{-at} \leq e^{-t}$. Il en résulte que $0 \leq I_n(a) \leq I_n(1)$. Comme $I_n(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, par le théorème d'encadrement, $I_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

3.a) Posons $J_n(a, A) = \int_0^A e^{-at} (1 - e^{-t})^n dt$. Ainsi

$$\begin{aligned} J_n(a, A) - J_{n+1}(a, A) &= \int_0^A [e^{-at} (1 - e^{-t})^n - e^{-at} (1 - e^{-t})^{n+1}] dt \\ &= \int_0^A e^{-at} (1 - e^{-t})^n [1 - (1 - e^{-t})] dt \\ &= \int_0^A e^{-at} (1 - e^{-t})^n e^{-t} dt. \end{aligned}$$

On effectue une intégration par parties avec les fonctions, de classe $\mathcal{C}^1$, u et v définies par

$$u(t) = \frac{1}{n+1} (1 - e^{-t})^{n+1}, \quad u'(t) = e^{-t} (1 - e^{-t})^n$$

$$v(t) = e^{-at}, \quad v'(t) = -ae^{-at}.$$

$$J_n(a, A) - J_{n+1}(a, A) =$$

$$\left[\frac{1}{n+1} e^{-at} (1 - e^{-t})^{n+1} \right]_0^A + \frac{a}{n+1} \int_0^A e^{-at} (1 - e^{-t})^{n+1} dt.$$

En passant à la limite quand A tend vers $+\infty$, on obtient :

$$I_n(a) - I_{n+1}(a) = 0 + \frac{a}{n+1} I_{n+1}(a).$$

3.b) En réorganisant les termes

$$I_{n+1}(a) = \frac{n+1}{n+1+a} I_n(a).$$

4.a) Procédons par récurrence sur la propriété

$$\mathcal{P}(n): \quad S_n(a) = \frac{1}{a-1} - \frac{n+1}{a-1} I_n(a).$$

→ *Initialisation.* Pour $n = 0$, on a

$$S_0(a) = I_0(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{1}{a}.$$

D'autre part,

$$\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a-1} I_0(a) = \frac{1}{a-1} \left(1 - \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a}.$$

L'égalité est donc vraie au rang 0.

→ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n et montrons là au rang suivant.

$$S_{n+1}(a) = S_n(a) + I_{n+1}(a) = \frac{1}{a-1} - \frac{n+1}{a-1} I_n(a) + I_{n+1}(a).$$

Or $I_n(a) = \frac{n+1+a}{n+1} I_{n+1}(a)$, donc

$$\begin{aligned} S_{n+1}(a) &= \frac{1}{a-1} - \frac{n+1+a}{a-1} I_{n+1}(a) + \frac{a-1}{a-1} I_{n+1}(a) \\ &= \frac{1}{a-1} - \frac{n+1+a-a+1}{a-1} I_{n+1}(a) \\ S_{n+1}(a) &= \frac{1}{a-1} - \frac{n+2}{a-1} I_{n+1}(a). \end{aligned}$$

4.b) Comme tous les termes de la somme $S_n(a)$ sont positifs, la suite de terme général $S_n(a)$ est croissante. Elle est majorée par $\frac{1}{a-1}$ d'après la question précédente, donc la suite est bien convergente. La série converge.

5.a) On effectue le changement de variable strictement décroissant et de classe $\mathcal{C}^1$

$$u = e^{-t}, \quad -\ln(u) = t \quad \text{et} \quad dt = -\frac{du}{u}.$$

De plus, lorsque $t = 0$, on a $u = 1$, et lorsque $t \rightarrow +\infty$, on a $u \rightarrow 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I_n(a) &= \int_0^{+\infty} e^{-at} (1 - e^{-t})^n dt \\ &= \int_1^0 u^a (1 - u)^n \left(-\frac{du}{u}\right) \\ &= \int_0^1 u^{a-1} (1 - u)^n du. \end{aligned}$$

D'après la définition de la fonction bêta,

$$I_n(a) = B(a, n+1).$$

En effectuant le changement de variable $v = 1 - u$, on montre que la fonction bêta est symétrique et

$$I_n(a) = B(n+1, a).$$

5.b) D'après le résultat rappelé dans l'énoncé

$$\forall y \in \mathbb{R}_*^+, \quad B(n+1, y) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{n^y}.$$

En prenant $y = a$, on obtient avec la question précédente

$$I_n = B(n+1, a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(a)}{n^a}.$$

Ainsi,
$$I_n(a) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(a)}{n^a}.$$

D'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum I_k(a)$ est de même nature que la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^a}$. Or cette dernière converge si et seulement si $a > 1$. Donc, pour tout réel $a > 1$, la série $\sum I_k(a)$ converge. On retrouve ainsi le résultat de la question 4.b) en l'améliorant car on a établi une équivalence.

6. On découpe le programme en deux parties. La première calcule $I_n(a)$ à l'aide de la relation de récurrence de la question 3. La seconde applique la formule de la question 4.a). On obtient par exemple :

```
def calculIn(a, n):
    I = 1/a # valeur de I_0(a)
    for k in range(n):
        I = (k + 1)/(k + 1 + a) * I
    return I

def calculSn(a, n):
    I = calculIn(a, n)
    return (1 - (n + 1) * I)/(a - 1)
```

DM 1 ♦ solution

Problème

1.a) Commençons par une inégalité classique :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Pour s'en convaincre, on écrit

$$\frac{a^2 + b^2}{2} - |ab| = \frac{1}{2} (|a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|) = \frac{1}{2} (|a| - |b|)^2 \geq 0.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2} (f(x)^2 + g(x)^2).$$

Comme $f, g \in E$, on a par linéarité la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2} (f(x)^2 + g(x)^2) dx.$$

Par le critère de majoration, $\int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx$ converge absolument, elle converge.

1.b) Notons que E est une partie de l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$.

L'ensemble E est non vide, il contient l'application nulle.

Soient $f, g \in E, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$(f + \lambda g)^2(x) = f(x)^2 + 2\lambda f(x)g(x) + \lambda^2 g(x)^2.$$

Par combinaison linéaire et d'après la question précédente

$$\int_0^{+\infty} (f + \lambda g)^2(x) dx$$

converge. D'où $f + \lambda g \in E$.

En conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, c'est donc un espace vectoriel.

2.a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par linéarité d'intégrales convergentes

$$\begin{aligned} & \Phi(f + xg) \\ &= \int_0^{+\infty} (f + xg)^2(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt + 2x \int_0^{+\infty} f(t)g(t) dt + x^2 \int_0^{+\infty} g(t)^2 dt \\ &= \Phi(f) + 2x\varphi(f, g) + x^2\Phi(g). \end{aligned}$$

Sous cette dernière expression, on constate bien que l'application est polynomiale de degré au plus 2. Et même exactement 2 si $\Phi(g) \neq 0$.

2.b) On distingue deux cas.

→ Si $\Phi(g) = 0$, alors

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{g(x)^2}_{\geq 0} dx = 0.$$

Par positivité et continuité de l'intégrande, on a nécessairement

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad g(x)^2 = 0.$$

Ainsi g est la fonction nulle. D'où $\varphi(f, g) = 0$ et l'inégalité est bien vérifiée.

→ Si $\Phi(g) \neq 0$, la fonction polynomiale

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \Phi(f + xg)$$

est exactement de degré 2 et positive. Le discriminant est donc négatif ou nul. Or ce discriminant vaut

$$\Delta = (2\varphi(f, g))^2 - 4\Phi(g)\Phi(f) = 4(\varphi(f, g)^2 - \Phi(g)\Phi(f)).$$

L'inégalité s'en déduit.

Remarque. En détaillant un peu plus, on montre qu'il y a égalité si et seulement si f et g sont colinéaires.

3. La fonction u est continue sur $\mathbb{R}^+$. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\int_0^A u(t)^2 dt = \int_0^A \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_0^A \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que $u \in E$ avec

$$\Phi(u) = \int_0^{+\infty} u(t)^2 dt = \frac{\pi}{2}.$$

4. Pour $t \in \mathbb{R}^+$,

$$f(t) = u(t) \cdot \frac{1}{u(t)} f(t) = u(t) \cdot (\sqrt{1+t^2} f(t)).$$

On a vu que $u \in E$. De plus, l'hypothèse sur f impose que

$$t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{1+t^2} f(t) \in E$$

car $\sqrt{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} t$ (critère d'équivalence). Il suffit alors d'appliquer la 1.a) pour avoir la convergence de

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

Ensuite, avec la 2.b)

$$I_f^2 = \varphi\left(u, \frac{f}{u}\right)^2 \leq \Phi(u)\Phi\left(\frac{f}{u}\right).$$

Or

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{f}{u}\right) &= \int_0^{+\infty} (1+t^2) f(t)^2 dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt + \int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt \\ \Phi\left(\frac{f}{u}\right) &= I_f + K_f. \end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit.

4.b) Appliquons la relation précédente à

$$f_\lambda : t \mapsto f(\lambda t) \in E.$$

Sachant que par le changement de variable affine $x = \lambda t$,

$$\begin{aligned} I_{f_\lambda} &= \int_0^{+\infty} f_\lambda(t) dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} f(\lambda t) \lambda dt \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} f(u) du = \frac{1}{\lambda} I_f; \\ J_{f_\lambda} &= \int_0^{+\infty} f_\lambda(t)^2 dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} f(\lambda t)^2 \lambda dt = \frac{1}{\lambda} J_f; \\ K_{f_\lambda} &= \int_0^{+\infty} t^2 f_\lambda(t)^2 dt = \frac{1}{\lambda^3} \int_0^{+\infty} (\lambda t)^2 f(\lambda t)^2 \lambda dt = \frac{1}{\lambda^3} K_f. \end{aligned}$$

Ainsi
$$I_{f_\lambda}^2 \leq \frac{\pi}{2} (J_{f_\lambda} + K_{f_\lambda})$$

devient
$$\frac{I_f^2}{\lambda^2} \leq \frac{\pi}{2} \left(\frac{J_f}{\lambda} + \frac{K_f}{\lambda^3} \right).$$

Le résultat s'en déduit en multipliant par $\lambda^2 > 0$.

4.c) Précisons que si $J_f = 0$, l'inégalité est triviale car f est alors la fonction nulle. On suppose donc $J_f > 0$ dans la suite.

La majoration obtenue à la question précédente est valable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On va optimiser ce majorant en déterminant pour quelle valeur de λ , elle est la plus petite. Pour cela, on commence par étudier

$$m : \lambda \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \lambda J_f + \frac{1}{\lambda} K_f.$$

La fonction m est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par les théorèmes généraux avec

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad m'(\lambda) &= J_f - \frac{1}{\lambda^2} K_f = \frac{1}{\lambda^2} (\lambda^2 J_f - K_f) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} (\lambda \sqrt{J_f} - \sqrt{K_f}) (\lambda \sqrt{J_f} + \sqrt{K_f}). \end{aligned}$$

Le signe de $m'(\lambda)$ est celui de

$$\lambda \sqrt{J_f} - \sqrt{K_f}.$$

On en déduit que m admet un minimum global en

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{K_f}{J_f}}$$

qui vaut
$$m(\lambda_0) = 2\sqrt{J_f K_f}.$$

On a vu que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad I_f^2 \leq \frac{\pi}{2} m(\lambda).$$

Avec le choix $\lambda = \lambda_0$, on a

$$0 \leq I_f^2 \leq \frac{\pi}{2} m(\lambda_0) = \pi \sqrt{J_f K_f}.$$

Le résultat s'en déduit en passant au carré.

5.a)

$$I_h = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

5.b) Soit $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$.

$$\begin{aligned} h(\tan(x)) &= \frac{1}{1+\tan(x)^2} = \frac{1}{1+\frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2}} \\ &= \frac{\cos(x)^2}{\cos(x)^2 + \sin(x)^2} \\ h(\tan(x)) &= \cos(x)^2. \end{aligned}$$

De plus $\tan$ est dérivable par quotient avec

$$\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos} \right)' = \frac{\sin' \cos - \sin \cos'}{\cos^2} = \frac{\sin^2 + \cos^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}.$$

On effectue ensuite le changement de variable $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant

$$t = \tan(x) \iff \arctan(t) = x.$$

$$dt = \tan'(x) dx = \frac{dx}{\cos(x)^2}.$$

Lorsque x varie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, t varie entre 0 et $+\infty$.

$$\int_0^{+\infty} h(t)^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(\tan(x))^2 \frac{dx}{\cos(x)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2 dx.$$

Or, on a la formule de duplication

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos(x+x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 \\ &= \cos(x)^2 - (1 - \cos(x)^2) = \cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Finalement
$$\int_0^{+\infty} h(t)^2 dt = \frac{\pi}{4}.$$

5.c)

$$K_h + J_h = \int_0^{+\infty} (1+t^2) h(t)^2 dt = \int_0^{+\infty} h(t) dt = I_h = \frac{\pi}{2}.$$

D'où
$$K_h = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

5.d) Résumons, d'une part

$$\left(\int_0^{+\infty} h(t) dt \right)^4 = \left(\frac{\pi}{2} \right)^4.$$

D'autre part

$$\pi^2 \left(\int_0^{+\infty} h(t)^2 dt \right) \left(\int_0^{+\infty} t^2 h(t)^2 dt \right) = \pi^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4}.$$

On a donc bien égalité.

6. Soit $a > 1$. On applique l'inégalité de Carlson à la fonction

$$f : t \mapsto t^{a-1} e^{-t}.$$

sachant que f et $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto t f(t)$ appartiennent bien à E.

On a alors

$$I_f = \int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt = \Gamma(a).$$

De plus,
$$J_f = \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt = \int_0^{+\infty} t^{2a-2} e^{-2t} dt.$$

En posant $u = 2t$, on obtient

$$J_f = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{2}\right)^{2a-2} e^{-u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2^{2a-1}} \int_0^{+\infty} u^{2a-2} e^{-u} du.$$

Ainsi,

$$J_f = \frac{\Gamma(2a-1)}{2^{2a-1}}.$$

De même, avec le même changement de variable $u = 2t$, on a

$$K_f = \frac{\Gamma(2a+1)}{2^{2a+1}}.$$

D'après l'inégalité de Carlson,

$$J_f^4 \leq \pi^2 J_f K_f$$

donne
$$\Gamma(a)^4 \leq \pi^2 \frac{\Gamma(2a-1)}{2^{2a-1}} \frac{\Gamma(2a+1)}{2^{2a+1}}.$$

On peut donc prendre

$$C(a) = \frac{\pi^2}{2^{4a}}.$$

Exercice - informatique

On commence par un premier programme qui donne une approximation de $x(t)$ et $y(t)$ via la méthode des rectangles.

```
def c2(t):
    return np.cos(t**2)

def s2(t):
    return np.sin(t**2)

def approx(t,f):
    N = int(100 * (np.floor(np.abs(t)) + 1))
    # nombre de rectangles
    S = 0
    Pas = t / N
    for i in range(N):
        S += f(i * Pas)
    return S * Pas
```

puis on effectue le tracé :

```
plt.axis('equal')

m=500
T=np.linspace(-10,10,m)
X=np.zeros(m)
Y=np.zeros(m)
for i in range(m):
    X[i]=approx(T[i],c2)
    Y[i]=approx(T[i],s2)
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

DM 1 Cube solution

Problème

1.a) Commençons par une inégalité classique :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Pour s'en convaincre, on écrit

$$\frac{a^2 + b^2}{2} - |ab| = \frac{1}{2} (|a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|) = \frac{1}{2} (|a| - |b|)^2 \geq 0.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2} (f(x)^2 + g(x)^2).$$

Comme $f, g \in E$, on a par linéarité la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2} (f(x)^2 + g(x)^2) dx.$$

Par le critère de majoration, $\int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx$ converge absolument, elle converge.

1.b) Notons que E est une partie de l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$.

L'ensemble E est non vide, il contient l'application nulle.

Soient $f, g \in E, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$(f + \lambda g)^2(x) = f(x)^2 + 2\lambda f(x)g(x) + \lambda^2 g(x)^2.$$

Par combinaison linéaire et d'après la question précédente

$$\int_0^{+\infty} (f + \lambda g)^2(x) dx$$

converge. D'où $f + \lambda g \in E$.

En conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, c'est donc un espace vectoriel.

2.a) Retenons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien posée d'après la question 1.a).

Symétrie.

Soient $f, g \in E$.

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx = \int_0^{+\infty} g(x)f(x) dx = \langle g, f \rangle.$$

L'application est bien symétrique.

Bilinéarité.

Soient f, g et $h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale (dans le cas convergent),

$$\begin{aligned} \langle f + \lambda g, h \rangle &= \int_0^{+\infty} (f(x) + \lambda g(x))h(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} f(x)h(x) dx + \lambda \int_0^{+\infty} g(x)h(x) dx. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\langle f + \lambda g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \lambda \langle g, h \rangle.$$

On a donc la linéarité à gauche, puis la linéarité à droite par symétrie.

Positivité.

Soit $f \in E$.

$$\langle f, f \rangle = \int_0^{+\infty} \underbrace{f(x)^2}_{\geq 0} dx \geq 0.$$

De plus, on a égalité si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x)^2 = 0$$

(l'intégrande est positive et continue). Ainsi f est l'application nulle dans le cas d'égalité. L'application est définie positive.

On peut conclure :

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

2.b) La fonction u est continue sur $\mathbb{R}^+$. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\int_0^A u(t)^2 dt = \int_0^A \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_0^A \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que $u \in E$ avec

$$\|u\|^2 = \int_0^{+\infty} u(t)^2 dt = \frac{\pi}{2}.$$

3.a) Pour $t \in \mathbb{R}^+$,

$$f(t) = u(t) \cdot \frac{1}{u(t)} f(t) = u(t) \cdot \left(\sqrt{1+t^2} f(t) \right).$$

On a vu que $u \in E$. De plus, l'hypothèse sur f impose que

$$t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{1+t^2} f(t) \in E$$

car $\sqrt{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} t$ (critère d'équivalence). Il suffit alors d'appliquer la 1.a) pour avoir la convergence de

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

Ensuite, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$I_f^2 = \left\langle u, \frac{f}{u} \right\rangle^2 \leq \|u\|^2 \left\| \frac{f}{u} \right\|^2.$$

Or

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f}{u} \right\|^2 &= \int_0^{+\infty} (1+t^2) f(t)^2 dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt + \int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt \\ \left\| \frac{f}{u} \right\|^2 &= J_f + K_f. \end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit.

3.b) Appliquons la relation précédente à

$$f_\lambda : t \mapsto f(\lambda t) \in E.$$

Sachant que par le changement de variable affine $x = \lambda t$,

$$\begin{aligned} I_{f_\lambda} &= \int_0^{+\infty} f_\lambda(t) dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} f(\lambda t) \lambda dt \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} f(u) du = \frac{1}{\lambda} I_f; \\ J_{f_\lambda} &= \int_0^{+\infty} f_\lambda(t)^2 dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} f(\lambda t)^2 \lambda dt = \frac{1}{\lambda} J_f; \\ K_{f_\lambda} &= \int_0^{+\infty} t^2 f_\lambda(t)^2 dt = \frac{1}{\lambda^3} \int_0^{+\infty} (\lambda t)^2 f(\lambda t)^2 \lambda dt = \frac{1}{\lambda^3} K_f. \end{aligned}$$

Ainsi
$$I_{f_\lambda}^2 \leq \frac{\pi}{2} (J_{f_\lambda} + K_{f_\lambda})$$

devient
$$\frac{I_f^2}{\lambda^2} \leq \frac{\pi}{2} \left(\frac{J_f}{\lambda} + \frac{K_f}{\lambda^3} \right).$$

Le résultat s'en déduit en multipliant par $\lambda^2 > 0$.

3.c) Précisons que si $J_f = 0$, l'inégalité est triviale car f est alors la fonction nulle. On suppose donc $J_f > 0$ dans la suite.

La majoration obtenue à la question précédente est valable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On va optimiser ce majorant en déterminant pour quelle valeur de λ , elle est la plus petite. Pour cela, on commence par étudier

$$m : \lambda \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \lambda J_f + \frac{1}{\lambda} K_f.$$

La fonction m est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par les théorèmes généraux avec

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad m'(\lambda) &= J_f - \frac{1}{\lambda^2} K_f = \frac{1}{\lambda^2} (\lambda^2 J_f - K_f) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} (\lambda \sqrt{J_f} - \sqrt{K_f}) (\lambda \sqrt{J_f} + \sqrt{K_f}). \end{aligned}$$

Le signe de $m'(\lambda)$ est celui de

$$\lambda \sqrt{J_f} - \sqrt{K_f}.$$

On en déduit que m admet un minimum global en

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{K_f}{J_f}}$$

qui vaut
$$m(\lambda_0) = 2\sqrt{J_f K_f}.$$

On a vu que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad I_f^2 \leq \frac{\pi}{2} m(\lambda).$$

Avec le choix $\lambda = \lambda_0$, on a

$$0 \leq I_f^2 \leq \frac{\pi}{2} m(\lambda_0) = \pi \sqrt{J_f K_f}.$$

Le résultat s'en déduit en passant au carré.

3.d) Il y a égalité si et seulement s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz et dans la majoration du produit scalaire

$$\left\langle \frac{f_{\lambda_0}}{u}, u \right\rangle,$$

où λ_0 est le réel strictement positif fixé. Dans le cas d'égalité, les vecteurs sont colinéaires :

$$\exists \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu u = \frac{f_{\lambda_0}}{u}.$$

Soit
$$\exists \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu u^2 = f_{\lambda_0}.$$

Si on revient aux variables réelles :

$$\exists \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \mu u(x)^2 = f_{\lambda_0}(x) = f(\lambda_0 x).$$

Avec le changement de variable $t = \lambda_0 x$:

$$\exists \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \mu u\left(\frac{t}{\lambda_0}\right)^2 = f(t) = \frac{\mu}{1 + \left(\frac{t}{\lambda_0}\right)^2}.$$

Finalement, en posant

$$\gamma = \mu \lambda_0^2 \quad \text{et} \quad \alpha = \lambda_0^2 > 0,$$

on obtient
$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad f(t) = \frac{\gamma}{\alpha + t^2}.$$

4. Soit $a > 1$. On applique l'inégalité de Carlson à la fonction

$$f : t \mapsto t^{a-1} e^{-t}.$$

sachant que f et $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto t f(t)$ appartiennent bien à E .

On a alors

$$I_f = \int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt = \Gamma(a).$$

De plus,
$$J_f = \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt = \int_0^{+\infty} t^{2a-2} e^{-2t} dt.$$

En posant $u = 2t$, on obtient

$$J_f = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{2}\right)^{2a-2} e^{-u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2^{2a-1}} \int_0^{+\infty} u^{2a-2} e^{-u} du.$$

Ainsi,
$$J_f = \frac{\Gamma(2a-1)}{2^{2a-1}}.$$

De même, avec le même changement de variable $u = 2t$, on a

$$K_f = \frac{\Gamma(2a+1)}{2^{2a+1}}.$$

D'après l'inégalité de Carlson,

$$I_f^4 \leq \pi^2 J_f K_f$$

donne
$$\Gamma(a)^4 \leq \pi^2 \frac{\Gamma(2a-1)}{2^{2a-1}} \frac{\Gamma(2a+1)}{2^{2a+1}}.$$

On peut donc prendre

$$C(a) = \frac{\pi^2}{2^{4a}}.$$

On commence par un premier programme qui donne une approximation de $x(t)$ et $y(t)$ via la méthode des rectangles.

```
def c2(t):  
    return np.cos(t**2)  
  
def s2(t):  
    return np.sin(t**2)  
  
def approx(t,f):  
    N = int(100 * (np.floor(np.abs(t)) +  
        1))  
        # nombre de rectangles  
    S = 0  
    Pas = t / N
```

```
for i in range(N):  
    S += f(i * Pas)  
return S * Pas
```

puis on effectue le tracé :

```
plt.axis('equal')  
  
m=500  
T=np.linspace(-10,10,m)  
X=np.zeros(m)  
Y=np.zeros(m)  
for i in range(m):  
    X[i]=approx(T[i],c2)  
    Y[i]=approx(T[i],s2)  
plt.plot(X,Y)  
plt.show()
```