

DM 2

THÈME : RÉVISIONS D'ALGÈBRE

Exercice

Vu à l'oral ESCP 2026

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 et semblable à $2M$. Montrer que M est semblable à

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On pourra commencer par montrer que 0 est la seule valeur propre possible de M .

Problème

Exemples d'applications linéaires sur $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathbb{R}[x]$

Partie A

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n . Soit a un réel fixé. On considère, pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, l'application f_k définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par

$$f_k(P) = P^{(k)}(a)$$

où $P^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de P .

- Justifier que pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, f_k est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
- On pose, pour $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on définit le polynôme Q_j par $Q_j(x) = (x - a)^j$. Pour tout k et pour tout j dans $\llbracket 0; n \rrbracket$, calculer $f_k(Q_j)$.
- En déduire que $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est une base de l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathbb{R}_n[x]$, noté $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[x], \mathbb{R})$.
- Soit b un réel différent de a et m un entier tel que $0 \leq m \leq n$. On définit l'application g de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$g(P) = P^{(m)}(b).$$

Montrer que g est linéaire et donner les coordonnées de g dans la base $(f_0, \dots, f_n)$.
Quelle formule retrouve-t-on ?

Partie B

On note $\mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels. À tout $P \in \mathbb{R}[x]$, on associe la fonction :

$$\varphi(P) : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P(x+t) dt.$$

- Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$.

On note D l'endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$ qui à toute fonction polynôme P associe sa fonction polynôme dérivée P' .

6. a) Montrer qu'il existe une suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que l'on explicitera sous forme intégrale, telle que, pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$, on a :

$$\varphi(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n D^n(P)$$

où D^n désigne l'itéré $n^{\text{ième}}$ de D , c'est-à-dire $D^0 = \text{id}$, $D^2 = D \circ D, \dots$
On pourra utiliser la formule de la question 4.

- b) Déterminer la valeur des (a_n) en fonction de n et de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.
7. Quels sont les vecteurs propres de φ ?

Partie C (facultative)

On définit une nouvelle application linéaire

$$\varphi : P \in \mathbb{R}_2[x] \mapsto (P(-1); P(0); P(1)) \in \mathbb{R}^3.$$

8. Démontrer que φ est un isomorphisme et donner $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\varphi)$ où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ désignent respectivement la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[x]$.
9. a) Pourquoi A est inversible ?
b) À l'aide du calcul Python suivant, préciser les polynômes

$$L_1 = \varphi^{-1}((1, 0, 0)), \quad L_2 = \varphi^{-1}((0, 1, 0)), \quad L_3 = \varphi^{-1}((0, 0, 1)).$$

Editeur

```
import numpy as np

A=np.array( .... )
A_inv = np.linalg.inv(A)
print(A_inv)
[[ 0.   1.   0. ]
 [-0.5  0.   0.5]
 [ 0.5 -1.   0.5]]
```

10. On définit de plus

$$\Phi_1 : P \in \mathbb{R}_2[x] \mapsto P(-1) \in \mathbb{R}, \quad \Phi_2 : P \in \mathbb{R}_2[x] \mapsto P(0) \in \mathbb{R}, \quad \Phi_3 : P \in \mathbb{R}_2[x] \mapsto P(1) \in \mathbb{R}.$$

On admet que les applications Φ_1, Φ_2 et Φ_3 sont des applications linéaires.

Justifier que la famille $(\Phi_1; \Phi_2; \Phi_3)$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R})$.

11. On pose la forme linéaire

$$\psi : P \in \mathbb{R}_2[x] \mapsto \int_{-1}^1 P(t) dt \in \mathbb{R}.$$

Justifier l'existence de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = \alpha_1 P(-1) + \alpha_2 P(0) + \alpha_3 P(1). \quad (\bullet)$$

12. À l'aide du changement de variable $t \mapsto -t$, justifier que $\alpha_1 = \alpha_3$.
13. En déduire que la formule $(\bullet)$ est valable pour x^3 puis pour tout $P \in \mathbb{R}_3[x]$.
14. Préciser les valeurs α_1, α_2 et α_3 .
15. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. En déduire que pour $Q \in \mathbb{R}_3[x]$,

$$\int_a^b Q(t) dt = \frac{b-a}{6} \left(Q(a) + 4Q\left(\frac{a+b}{2}\right) + Q(b) \right).$$

On pourra s'aider d'une bijection affine de $[a; b]$ sur $[-1; 1]$.

- 16.** Pour une fonction $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, on peut approximer l'intégrale par

$$\int_a^b f(t) dt \simeq \Delta(f) := \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Écrire un programme Python qui prend en argument f , a et b et renvoie $\Delta(f)$.

- 17.** Améliorer le programme en suivant l'exemple des sommes de Riemann.