

DM 2

THÈME : RÉVISIONS D'ALGÈBRE

Exercice

Vu à l'oral ESCP 2026

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 et semblable à $2M$. Montrer que M est semblable à

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On pourra commencer par montrer que 0 est la seule valeur propre possible de M .

Problème

Exemples d'applications linéaires sur $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathbb{R}[x]$

Partie A

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n . Soit a un réel fixé. On considère, pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, l'application f_k définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par

$$f_k(P) = P^{(k)}(a)$$

où $P^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de P .

- Justifier que pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, f_k est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
- On pose, pour $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on définit le polynôme Q_j par $Q_j(x) = (x - a)^j$. Pour tout k et pour tout j dans $\llbracket 0; n \rrbracket$, calculer $f_k(Q_j)$.
- En déduire que $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est une base de l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathbb{R}_n[x]$, noté $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[x], \mathbb{R})$.
- Soit b un réel différent de a et m un entier tel que $0 \leq m \leq n$. On définit l'application g de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$g(P) = P^{(m)}(b).$$

Montrer que g est linéaire et donner les coordonnées de g dans la base $(f_0, \dots, f_n)$.
Quelle formule retrouve-t-on ?

Partie B

On note $\mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels. À tout $P \in \mathbb{R}[x]$, on associe la fonction :

$$\varphi(P) : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P(x+t) dt.$$

- Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$.

On note D l'endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$ qui à toute fonction polynôme P associe sa fonction polynôme dérivée P' .

6. a) Montrer qu'il existe une suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que l'on explicitera sous forme intégrale, telle que, pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$, on a :

$$\varphi(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n D^n(P)$$

où D^n désigne l'itéré $n^{\text{ième}}$ de D , c'est-à-dire $D^0 = \text{id}$, $D^2 = D \circ D, \dots$
On pourra utiliser la formule de la question 4.

- b) Déterminer la valeur des (a_n) en fonction de n et de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.
7. Quels sont les vecteurs propres de φ ?

Partie C (facultative)

On définit une nouvelle application linéaire

$$\varphi : P \in \mathbb{R}_2[x] \mapsto (P(-1); P(0); P(1)) \in \mathbb{R}^3.$$

8. Démontrer que φ est un isomorphisme et donner $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\varphi)$ où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ désignent respectivement la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[x]$.
9. a) Pourquoi A est inversible ?
b) À l'aide du calcul Python suivant, préciser les polynômes

$$L_1 = \varphi^{-1}((1, 0, 0)), \quad L_2 = \varphi^{-1}((0, 1, 0)), \quad L_3 = \varphi^{-1}((0, 0, 1)).$$

Editeur

```
import numpy as np

A=np.array( .... )
A_inv = np.linalg.inv(A)
print(A_inv)
[[ 0.   1.   0. ]
 [-0.5  0.   0.5]
 [ 0.5 -1.   0.5]]
```

10. On définit de plus

$$\Phi_1 : P \in \mathbb{R}_2[x] \mapsto P(-1) \in \mathbb{R}, \quad \Phi_2 : P \in \mathbb{R}_2[x] \mapsto P(0) \in \mathbb{R}, \quad \Phi_3 : P \in \mathbb{R}_2[x] \mapsto P(1) \in \mathbb{R}.$$

On admet que les applications Φ_1, Φ_2 et Φ_3 sont des applications linéaires.

Justifier que la famille $(\Phi_1; \Phi_2; \Phi_3)$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R})$.

11. On pose la forme linéaire

$$\psi : P \in \mathbb{R}_2[x] \mapsto \int_{-1}^1 P(t) dt \in \mathbb{R}.$$

Justifier l'existence de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = \alpha_1 P(-1) + \alpha_2 P(0) + \alpha_3 P(1). \quad (\bullet)$$

12. À l'aide du changement de variable $t \mapsto -t$, justifier que $\alpha_1 = \alpha_3$.
13. En déduire que la formule $(\bullet)$ est valable pour x^3 puis pour tout $P \in \mathbb{R}_3[x]$.
14. Préciser les valeurs α_1, α_2 et α_3 .
15. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. En déduire que pour $Q \in \mathbb{R}_3[x]$,

$$\int_a^b Q(t) dt = \frac{b-a}{6} \left(Q(a) + 4Q\left(\frac{a+b}{2}\right) + Q(b) \right).$$

On pourra s'aider d'une bijection affine de $[a; b]$ sur $[-1; 1]$.

- 16.** Pour une fonction $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, on peut approximer l'intégrale par

$$\int_a^b f(t) dt \simeq \Delta(f) := \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Écrire un programme Python qui prend en argument f , a et b et renvoie $\Delta(f)$.

- 17.** Améliorer le programme en suivant l'exemple des sommes de Riemann.

DM 2 - solution

Exercice

- Justifions dans un premier temps que 0 est la seule valeur propre possible de M.

Deux matrices semblables ont même spectre. Dès lors si $\lambda \in \text{Sp}(M)$ alors $2\lambda \in \text{Sp}(2M) = \text{Sp}(M)$. Par récurrence immédiate, on a donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad 2^p \lambda \in \text{Sp}(M).$$

Si $\lambda \neq 0$, le spectre de M contiendrait une infinité de valeurs propres. Absurde, le spectre d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient au plus n valeurs propres. Ainsi $\lambda = 0$, ou encore $\text{Sp}(M) \subset \{0\}$.

- Utilisons maintenant la condition sur le rang. Soit f , l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M. Comme $\dim \text{Im}(f) = \text{rg}(f) = 1$, il existe donc $y \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(y)$. Or $f(y)$ appartient aussi à l'image, il existe donc $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $f(y) = \mu y$. Autrement dit, y est vecteur propre, μ est valeur propre. D'après la remarque préliminaire, $\mu = 0$. Ainsi $f(y) = 0$ et $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ (cela prouve que M est nilpotente, $M^2 = 0$). Soit maintenant x_0 un antécédent de y par f . Comme y est non nul, $x_0 \notin \text{Ker}(f)$. On a $y \in \text{Ker}(f)$ et on peut compléter la famille libre (y) du noyau en une base (y, y') du noyau. On vérifie ensuite que (y', y, x_0) est une base de $\mathbb{R}^3$ (test de liberté et bon cardinal). Comme $f(y') = f(y) = 0$ et $f(x_0) = y$, la matrice de f dans cette base est bien

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les deux matrices sont semblables car elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

Remarque. La condition sur le rang est nécessaire car on peut montrer que la matrice suivante est semblable à son double :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Problème

Partie A

- Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_k(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q)^{(k)}(a) = P^{(k)}(a) + \lambda Q^{(k)}(a) \\ &= f_k(P) + \lambda f_k(Q) \end{aligned}$$

par linéarité de la dérivation. Comme l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$, f_k est bien une forme linéaire.

- Vérifier que

$$f_k(Q_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ j! & \text{si } j = k. \end{cases}$$

- Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k f_k = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[x], \mathbb{R})}.$$

En évaluant en Q_j la relation précédente pour un $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ fixé,

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k f_k(Q_j) = 0.$$

D'après le calcul précédent, on a $j! \lambda_j = 0$ puis $\lambda_j = 0$. La famille $(f_0, \dots, f_n)$ est donc libre. De plus

$$\dim \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[x], \mathbb{R}) = \dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1.$$

Il y a donc autant de vecteurs dans la famille que la dimension, c'est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[x], \mathbb{R})$.

- En reprenant la question 1, on prouve que g est linéaire. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$g = \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k.$$

De nouveau, en évaluant en Q_j pour un certain entier j fixé

$$g(Q_j) = \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k(Q_j).$$

Relation qui devient pour $m \leq j$:

$$\frac{j!}{(j-m)!} (b-a)^{j-m} = Q_j^{(m)}(b) = \lambda_j \cdot j!$$

et $0 = \lambda_j \cdot j!$, si $m > j$. Finalement,

$$g = \sum_{k=m}^n \frac{1}{(k-m)!} (b-a)^{k-m} \cdot f_k.$$

Les m premières coordonnées de g sont nulles.

Pour $m = 0$, on retrouve la formule de Taylor pour les polynômes

$$P(b) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k.$$

Partie B

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'application $t \mapsto e^{-t^2} P(x+t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\varphi(P)(x)$ est une intégrale généralisée en $\pm\infty$. De plus, à l'aide des croissances comparées

$$e^{-t^2} P(x+t) = o_{\pm\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right).$$

Les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2} dt$ de fonctions positives sont convergentes par le critère de Riemann. Par le critère de négligeabilité,

$\varphi(P)(x)$ est convergente.

Soit n le degré de P , la formule de Taylor, rappelée à la question précédente, donne pour $b = x+t$ et $a = x$

$$P(x+t) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(x)}{k!} t^k.$$

Par linéarité des intégrales convergentes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P(x+t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(x)}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt.$$

Sous cette dernière expression, on vérifie bien que

$$\varphi(P) \in \mathbb{R}[x].$$

La linéarité de φ découle de la linéarité des intégrales convergentes. En conclusion,

φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$.

6.a) Si on pose

$$a_k = \frac{1}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt.$$

on a

$$\varphi(P)(x) = \sum_{k=0}^n a_k P^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k P^{(k)}(x).$$

Expression qu'on peut réécrire sous la forme :

$$\varphi(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k(P).$$

6.b) Par parité, si n est impair, la fonction

$$t \mapsto t^n e^{-t^2}$$

est impaire. Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt = 0,$$

et donc $a_n = 0$ si n est impair.

Supposons maintenant n pair et écrivons $n = 2p$, avec $p \in \mathbb{N}$. Posons

$$I_p = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt.$$

Pour $p \geq 1$, effectuons une intégration par parties en écrivant

$$t^{2p} e^{-t^2} = t^{2p-1} t e^{-t^2}.$$

Les fonctions considérées sont de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$I_p = -\frac{1}{2} \left[t^{2p-1} e^{-t^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2p-1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p-2} e^{-t^2} dt.$$

Par croissances comparées,

$$t^{2p-1} e^{-t^2} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } t \longrightarrow \pm\infty.$$

Ainsi,

$$I_p = \frac{2p-1}{2} I_{p-1}.$$

→ Rédaction par récurrence

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Par récurrence,

$$I_p = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 3 \cdot 1}{2^p} \sqrt{\pi}.$$

Comme

$$(2p)! = (2 \cdot 4 \cdots 2p)(1 \cdot 3 \cdots (2p-1)) = 2^p p! (1 \cdot 3 \cdots (2p-1)),$$

il vient

$$I_p = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}.$$

→ Rédaction par télescope

Calculons alors I_p par télescope. Pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{k=1}^p \frac{I_k}{I_{k-1}} = \prod_{k=1}^p \frac{2k-1}{2}.$$

Ainsi,

$$\frac{I_p}{I_0} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2p-1)}{2^p}.$$

Or

$$(2p)! = (2 \cdot 4 \cdots 2p)(1 \cdot 3 \cdots (2p-1)) = 2^p p! (1 \cdot 3 \cdots (2p-1)),$$

donc

$$1 \cdot 3 \cdots (2p-1) = \frac{(2p)!}{2^p p!}.$$

Comme

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

on obtient

$$I_p = \frac{(2p)!}{4^p p!} \sqrt{\pi}.$$

Par conséquent,

$$a_{2p} = \frac{1}{(2p)!} I_p = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p} p!}.$$

Finalement,

$$a_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{2^n \left(\frac{n}{2}\right)!}, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

7. Partons de l'équation d'un vecteur propre

$$\varphi(P) = \lambda P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n D^n(P).$$

$$\iff (\lambda - a_0)P = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n D^n(P) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n D^n(P)$$

car $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$.

Pour des questions de degré $\lambda = a_0$ et $P'' = 0$. Finalement les seuls vecteurs propres sont les polynômes de degré au plus 1 (non nul).

Partie C

8. Soit $P \in \ker \varphi$. On en déduit que P a trois racines alors qu'il est de degré au plus 2. C'est donc le polynôme nul. φ est injective, comme la dimension de l'espace d'arrivée égale celle de départ, c'est un isomorphisme. De plus, on a

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= (1, 1, 1) \\ \varphi(x) &= (-1, 0, 1) \\ \varphi(x^2) &= (1, 0, 1).\end{aligned}$$

$$\text{D'où} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

9.a). L'application φ est un isomorphisme, donc A est inversible.

9.b) À la lecture des colonnes de A^{-1}

$$\begin{aligned}L_1 &= 0 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{2} x(x-1) \\ L_2 &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot x - 1x^2 = 1 - x^2 \\ L_3 &= 0 \cdot 1 + \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{2} x(1+x)\end{aligned}$$

Notons que par construction

$$\begin{aligned}\Phi_1(L_1) &= 1 & \Phi_2(L_1) &= 0 & \Phi_3(L_1) &= 0. \\ \Phi_1(L_2) &= 0 & \Phi_2(L_2) &= 1 & \Phi_3(L_2) &= 0. \\ \Phi_1(L_3) &= 0 & \Phi_2(L_3) &= 0 & \Phi_3(L_3) &= 1.\end{aligned}$$

10. Comme la famille contient autant de vecteurs que la dimension de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R})$.

$$\dim \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}) = \dim \mathbb{R}_2[x] = 2 + 1 = 3.$$

Il suffit de montrer que la famille est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 + \lambda_3 \Phi_3 = 0$$

c'est-à-dire

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[x], \quad \lambda_1 \Phi_1(P) + \lambda_2 \Phi_2(P) + \lambda_3 \Phi_3(P) = 0.$$

En évaluant en L_1, L_2, L_3 et en utilisant la remarque précédente, on obtient directement

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

La famille est libre, c'est une base.

11. Comme (Φ_1, Φ_2, Φ_3) est génératrice de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R})$ et que ψ est une forme linéaire, il existe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\psi = \alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2 + \alpha_3 \Phi_3.$$

D'où pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 P(t) dt &= \psi(P) \\ &= \alpha_1 \Phi_1(P) + \alpha_2 \Phi_2(P) + \alpha_3 \Phi_3(P) \\ &= \alpha_1 P(-1) + \alpha_2 P(0) + \alpha_3 P(1).\end{aligned}$$

12. Le changement de variable affine $t \rightarrow -t$ donne

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = \int_{-1}^1 P(-t) dt.$$

En appliquant la relation de la question 11 à $t \mapsto P(-t)$,

$$\int_{-1}^1 P(-t) dt = \alpha_1 P(1) + \alpha_2 P(0) + \alpha_3 P(-1).$$

Or les coefficients $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sont uniques (car on a une base), nécessairement

$$\alpha_1 = \alpha_3.$$

13. Par imparité pour $P(x) = x^3$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 P(t) dt &= 0 \quad \text{et} \quad \alpha_1 P(-1) + \alpha_2 P(0) + \alpha_3 P(1) \\ &= -\alpha_1 + 0 + \alpha_3 = 0\end{aligned}$$

On a donc égalité pour $P(x) = x^3$.

Vérifions que cette égalité s'étend à $\mathbb{R}_3[x]$ par linéarité. Soit $P \in \mathbb{R}_3[x]$. On peut écrire

$$P(x) = ax^3 + Q(x) \quad Q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$$

Puis, en utilisant la formule pour x^3 et Q :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 P(t) dt &= a \int_{-1}^1 t^3 dt + \int_{-1}^1 Q(t) dt \\ &= a \left(\alpha_1 (-1)^3 + \alpha_2 0^3 + \alpha_3 1^3 \right) \\ &\quad + (\alpha_1 Q(-1) + \alpha_2 Q(0) + \alpha_3 Q(1)) \\ &= \alpha_1 P(-1) + \alpha_2 P(0) + \alpha_3 P(1).\end{aligned}$$

14. Testons avec $P = L_2$

$$\int_{-1}^1 L_2(t) dt = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 0 = \alpha_2$$

Or, on a aussi

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 L_2(t) dt &= \int_{-1}^1 1 - t^2 dt \\ &= \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = 2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

$$\text{Puis} \quad \alpha_2 = \frac{4}{3}.$$

De même, on a

$$\frac{1}{3} = \int_{-1}^1 L_1(t) dt = \alpha_1 = \alpha_3.$$

15. On effectue un changement de variable affine

$$t = \frac{b-a}{2} u + \frac{b+a}{2}$$

$$\frac{2(t - (b+a)/2)}{b-a} = u \quad \frac{2 dt}{b-a} = du.$$

On obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b Q(t) dt &= \int_{-1}^1 Q\left(\frac{b-a}{2}u + \frac{b+a}{2}\right) \cdot \frac{b-a}{2} du \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \tilde{Q}(u) du \quad \text{avec } \tilde{Q} \in \mathbb{R}_3[x] \\ &= \frac{b-a}{2} (\alpha_1 \tilde{Q}(-1) + \alpha_2 \tilde{Q}(0) + \alpha_3 \tilde{Q}(1)) \\ &= \frac{b-a}{2} \left(\frac{1}{3} Q(a) + \frac{4}{3} Q\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3} Q(b) \right)\end{aligned}$$

D'où le résultat.

16.

```
def Delta(f,a,b) :
    D=(b-a)/6*(f(a)+4*f((a+b)/2)+f(b))
```

```
return D
```

17. L'idée est de subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en n sous-segments comme pour les sommes de Riemann

```
import numpy as np
def Approx(f,a,b,n) :
    abscisse=np.linspace(a,b,n+1)
    S=0
    for i in range(n):
        ai=abscisse[i]
        bi=abscisse[i+1]
        S=S+Delta(f,ai,bi)
    return S
```

Remarque. Cette méthode est connue sous le nom de la méthode de Simpson. Précisons : C'est Thomas Simpson (et non ...), mathématicien anglais du XVIIIe siècle.

