

Sujet DS (entraînement)

THÈME : RÉVISIONS ANALYSE ET ALGÈBRE

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. L'énoncé est composé de deux problèmes indépendants.

Problème 1

◆◆ Fonction Gamma et intégrale de Gauss

• Préliminaires

1. Soit $f : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n(f) = \int_0^\pi f(x) \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) dx.$$

À l'aide d'une intégration par parties, justifier que $I_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Dans la suite, on admet que ce résultat reste valable pour f continue.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$J_n = \int_0^\pi \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin(x/2)} dx.$$

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} - J_n = 0$.

b) En déduire J_n .

Partie A

L'objectif de cette partie est d'établir l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2\lambda}{n^2 - \lambda^2} = \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)} - \frac{1}{\lambda} \quad (\star)$$

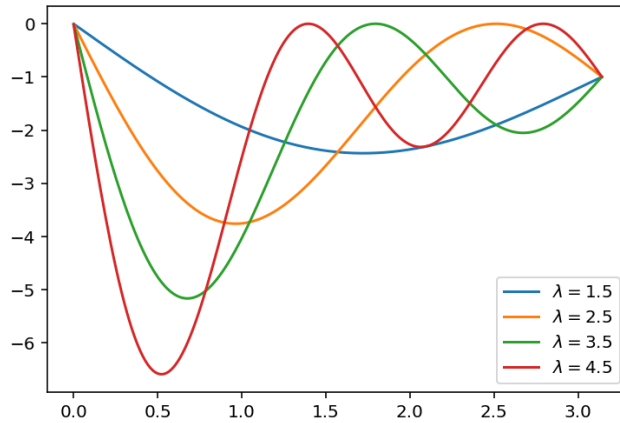
Pour cela, on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^\pi \cos(\lambda x) \cos(nx) dx$$

et la fonction $\Phi : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0; \pi], \quad \Phi(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\lambda x) - 1}{\sin(x/2)} & \text{si } x \in]0; \pi[, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. a) Proposer une fonction python qui prend en argument λ et trace le graphe de la fonction Φ sur $[0.001, \pi]$.
Ci-dessous, quelques exemples :



- b) Justifier que Φ est continue sur $[0; \pi]$.
2. a) Calculer u_n en utilisant les égalités $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ valables pour tous réels a, b .
- b) Montrer que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
3. a) Justifier que pour $x \in]0; \pi]$ et $k \in \mathbb{N}^*$,

$$2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos(kx) = \sin\left(kx + \frac{x}{2}\right) - \sin\left(kx - \frac{x}{2}\right).$$

b) En déduire que

$$1 + \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin(x/2)}.$$

4. En partant de la définition de u_n et en se servant de 3.b), montrer que

$$\sum_{k=1}^n u_k = -\frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \Phi(x) \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) dx + \int_0^\pi \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin(x/2)} dx.$$

5. En déduire la relation $(\star)$.

Partie B

Soit $\alpha \in]1; +\infty[$. Posons

$$g(\alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}, \quad I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}, \quad J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}.$$

1. Montrer que $I(\alpha)$ et $J(\alpha)$ convergent.
2. En effectuant le changement de variable $t = u^{1/(1-\alpha)}$, montrer que $I(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} g\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$.
3. Montrer que

$$\frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1} \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}.$$

4. a) Montrer que $\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- b) En déduire que $g(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k\alpha+1}$.

5. Montrer que

$$\frac{1}{\alpha-1} g\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(k+1)\alpha-1}.$$

6. a) Conclure en montrant que $J(\alpha) = \frac{\pi/\alpha}{\sin(\pi/\alpha)}$.
- b) Tester cette égalité en calculant directement $J(2)$.

Partie C

On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ et $f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} dt$.

1. Pour quelles valeurs de x , $\Gamma(x)$ est-elle définie? Même question pour $f_\alpha(x)$.
2. Calculer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Montrer que f_α est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
4. Le but de cette question est de montrer que f_α est continue à droite en 0.
 - a) En remarquant que

$$f_\alpha(0) - f_\alpha(x) = \int_0^A \frac{1 - e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} dt + \int_A^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} dt,$$

montrer que $\forall x > 0, \quad 0 \leq f_\alpha(0) - f_\alpha(x) \leq [1 - e^{-x A^\alpha}] f_\alpha(0) + \int_A^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}.$

- b) En déduire que f_α est continue à droite en 0.
5. Le but de cette question est de montrer que $f_\alpha(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
 - a) Pour tout $\eta > 0$, en remarquant que

$$f_\alpha(x) = \int_0^\eta \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} dt + \int_\eta^{+\infty} \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} dt,$$

montrer les inégalités suivantes :

$$\forall x > 0, \quad \int_0^\eta \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} dt \leq \eta \quad \text{et} \quad \int_\eta^{+\infty} \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} dt \leq e^{-x\eta^\alpha} f_\alpha(0).$$

- b) Montrer que $f_\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
6. a) Pour tout $a > 0$ et pour tout $\alpha > 1$, montrer que les intégrales suivantes convergent :

$$L_\alpha(a) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha e^{-at^\alpha}}{1+t^\alpha} dt, \quad M_\alpha(a) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{2\alpha} e^{-at^\alpha}}{1+t^\alpha} dt.$$

- b) Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour $\varphi : x \mapsto e^{-x}$ sur $[0, u]$ en 0 à l'ordre 1.
 - c) En déduire que, pour $h \rightarrow 0$, il existe une expression $R(ht^\alpha)$ telle que

$$\frac{1}{h} [f_\alpha(a+h) - f_\alpha(a)] + \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha e^{-at^\alpha}}{1+t^\alpha} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at^\alpha} R(ht^\alpha)}{h(1+t^\alpha)} dt.$$

- d) Pour $h \rightarrow 0^+$, montrer que

$$0 \leq R(ht^\alpha) \leq \frac{h^2 t^{2\alpha}}{2}.$$

- e) En déduire que f_α est dérivable en a et que

$$f'_\alpha(a) = - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha e^{-at^\alpha}}{1+t^\alpha} dt.$$

7. a) Montrer que $f'_\alpha(x) - f_\alpha(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt$.

- b) Effectuer le changement de variable $t = x^{-1/\alpha} u^{1/\alpha}$ dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt$.

Montrer que $f'_\alpha(x) - f_\alpha(x) = -x^{-1/\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right).$

8. On pose $g_\alpha(x) = e^{-x} f_\alpha(x)$. Calculer g'_α , puis calculer $\int_1^x g'_\alpha(t) dt$ de deux manières pour montrer que

$$\forall x > 0, \quad e^{-x} f_\alpha(x) + \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \int_1^x t^{-1/\alpha} e^{-t} dt = \frac{1}{e} f_\alpha(1).$$

9. a) Quelle est la limite de $f_\alpha(x)e^{-x}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$?
 b) Dans la relation C.8 faire tendre x vers $+\infty$. En écrivant

$$\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{-1/\alpha} dt = \int_1^x \dots + \int_x^{+\infty} \dots,$$

déduire que
$$e^{-x} f_\alpha(x) = \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \int_x^{+\infty} e^{-t} t^{-1/\alpha} dt.$$

10. a) Dans la formule précédente, faire tendre $x \rightarrow 0$, et en utilisant B.6, montrer que

$$\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \Gamma\left(-\frac{1}{\alpha} + 1\right) = \frac{\pi/\alpha}{\sin(\pi/\alpha)}.$$

- b) Soit $p \in]0; 1[$, montrer que $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$.

11. En prenant $p = \frac{1}{2}$, pouvez-vous en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$?

Problème 2

◆ Sous-espace engendré par les matrices nilpotentes

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On dit qu'une matrice N est nilpotente s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que N^p soit la matrice nulle. On note $\mathcal{N}$, l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F_{\mathcal{N}}$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$M \in F_{\mathcal{N}} \iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}, \quad \exists N_1, \dots, N_r \in \mathcal{N}, \quad M = \sum_{i=1}^r \lambda_i N_i.$$

On note $(E_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket}$, la base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée des matrices élémentaires. Pour rappel, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2$

$$\forall k, \ell \in \llbracket 1;n \rrbracket, \quad [E_{i,j}]_{k,\ell} = \delta_{ik} \delta_{j\ell}.$$

Dans la suite, on admet un résultat démontré en exercice : toute matrice nilpotente est de trace nulle.

Partie A : préliminaires

1. Montrer que toute matrice semblable à une matrice nilpotente reste nilpotente.
 2. a) Justifier que pour tous $i, j, k, \ell \in \llbracket 1;n \rrbracket$,

$$E_{i,j} E_{k,\ell} = \delta_{jk} E_{i\ell} = \begin{cases} E_{i,\ell} & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

- b) En déduire que $E_{i,j} \in \mathcal{N}$ si et seulement si $i \neq j$.
 3. Pour tout $\ell \in \llbracket 1;n-1 \rrbracket$, on pose $T_\ell = E_{\ell,\ell} - E_{\ell+1,\ell+1}$.
 Justifier qu'une base de $\text{Ker}(\text{Tr})$ est donnée par la famille $\mathcal{C}$ formée par les matrices

$$E_{i,j} \quad \text{avec } i, j \in \llbracket 1;n \rrbracket, i \neq j \quad \text{et} \quad T_\ell \quad \text{avec } \ell \in \llbracket n-1 \rrbracket.$$

Partie B : preuve de $F_{\mathcal{N}} = \text{Ker Tr}$

4. Justifier que $F_{\mathcal{N}} \subset \text{Ker}(\text{Tr})$.
 5. L'objectif de cette question est de prouver l'inclusion réciproque.
 a) Soient $i, j \in \llbracket 1;n \rrbracket$ avec $i \neq j$. On pose $P = I_n + E_{i,j}$.

- i) Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, simplifier $(\alpha I_n + \beta E_{ij})P$. En déduire que P est inversible et expliciter son inverse.
 - ii) Vérifier $PE_{ji}P^{-1} \in \mathcal{N}$ et expliciter cette matrice à l'aide de $E_{i,i}$, $E_{j,j}$, $E_{i,j}$ et $E_{j,i}$.
 - b) Déduire du calcul précédent que $T_\ell \in F_{\mathcal{N}}$.
6. Conclure sur l'égalité $F_{\mathcal{N}} = \text{Ker}(\text{Tr})$.

Partie C : lemme sur les matrices de trace nulle

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\text{Tr}(A) = 0$. L'objectif de cette partie est de montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit de diagonale nulle.

Dans la suite, on fixe une matrice $A = (a_{ij})_{i,j \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ de trace nulle dont la diagonale ne soit pas entièrement nulle (sinon il n'y a rien à prouver).

- 7. Justifier qu'il existe $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $a_{ii} > 0$ et $a_{jj} < 0$.
Quitte à permuter les vecteurs de la base canonique, on peut supposer dans la suite que $a_{11} > 0$ et $a_{22} < 0$.
- 8. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & \cdots & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B_\theta = R_\theta^{-1} A R_\theta.$$

- a) Vérifier que pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$.
 - b) Préciser R_θ . En déduire que R_θ est inversible et donner une formule simple pour R_θ^{-1} .
9. Vérifier que
- $$[B_\theta]_{11} = a_{11} \cos(\theta)^2 + (a_{12} + a_{21}) \sin(\theta) \cos(\theta) + a_{22} \sin(\theta)^2.$$
10. En déduire l'existence d'un réel θ tel que $[B_\theta]_{11} = 0$.
Ainsi la matrice A est semblable à une matrice dont le premier coefficient est nul.
11. Démontrer le résultat initial de cette partie : la matrice A est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.
12. À l'aide des questions 1 et 2, expliciter un entier r et des matrices nilpotentes $N_1, \dots, N_r$ telles que

$$A = \sum_{i=1}^r N_i.$$

– FIN –

Indications

Problème 1

On rappelle les formules trigonométriques.

- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,
- $\cos a \times \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
 - $\sin a \times \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$
 - $\sin a \times \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
 - $\cos a \times \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$
- Pour tous $p, q \in \mathbb{R}$,
- $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
 - $\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
 - $\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
 - $\sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

P.1 Justifier que

$$|I_n(f)| \leq \frac{2}{2n+1} \left(|f(0)| + \int_0^\pi |f'(x)| dx \right).$$

P.2.a) Utiliser les formules trigonométriques.

P.2.b) Préciser J_0 .

A.1.a) Compléter le code :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def graphe (lbda):
    x =
    y =
    plt. --
    plt. --
```

A.2.a) Vérifier que

$$u_n = (-1)^n \frac{\lambda \sin(\pi n)}{n^2 - \lambda}.$$

B.3. Penser à une somme géométrique.

4.a) Remarquer que pour $t \geq 1$

$$\left| \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} \right| \leq t^{(n+1)\alpha}.$$

B.6.a) Partir de

$$J(\alpha) = I(\alpha) + g(\alpha).$$

B.6.b) On peut calculer directement

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Problème 2

A.1. Justifier que pour $A, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec P inversible

$$(PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}.$$

A.2.a) On rappelle que si $[M]_{i,j}$ désigne le coefficient en position (i, j) de M alors pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^n [A]_{i,k} [B]_{k,j}.$$

2.b) Préciser $E_{i,j}^2$ pour $i = j$ et $i \neq j$.

3. Commencer par donner la dimension de $\text{Ker}(\text{Tr})$.

5.a)ii) Montrer que

$$PE_{j,i}P^{-1} = E_{j,i} - E_{i,j} + E_{i,i} - E_{j,j}.$$

6. Utiliser la question 3.

8.b) Que dire si $\theta' = -\theta$?

10. Utiliser un théorème d'existence.

Éléments de barème

Problème 1

- P.1** Malus de 1/4 si oubli de $\mathcal{C}^1$.
Malus de 1/2 si mauvaise gestion des valeurs absolues.
- P.2.a)** Notation binaire, soit 0/4 ou 4/4.
- P.2.b)** idem.
- A.1.a)** Au moins 1/4 pour toute tentative.
+ 1/4 si `def ___ (l bda)`.
+ 1/4 si `plt .plot`.
4/4 si tout ok.
On valorise si le code est commenté (+ 1/4).
- A.1.b)** + 1/4 si continuité sur $]0; \pi]$ juste, - 1/2 sinon.
+ 3/4 si la continuité en 0 est bien faite.
0/4 si composition d'équivalent ou somme d'équivalents.
- A.2.a)** 2/4 si la formule n'est pas simplifiée (réduction au même dénominateur).
- A.2.b)** - 1/4 si oubli de la condition sur le signe.
- 1/4 si oubli de citer les critères.
- A.3.a)** Notation binaire.
- A.3.b)** 0/4 si tentative d'arnaque. + 1/4 si tentative de télescope.
- A.5.** - 2/4 si oubli de citer la continuité de Φ .
- 1/4 si oubli de $\sin(\lambda\pi) \neq 0$
- B.1.** - 2/4 si oubli de la continuité de l'intégrande.
- 1/4 si oubli de la condition sur le signe.
0 si on compare des intégrales au lieu des intégrales. On rajoute un smiley pas content.
- B.2.** - 1/4 si oubli de dire que le changement est de classe $\mathcal{C}^1$.

B.3. - 1/4 si oubli de dire que la raison est différente de 1.

B.4.a) - 2/4 si on a seulement une majoration ou une minoration

B.5. - 2/4 si oubli de dire que $\frac{\alpha}{\alpha-1} > 1$.

B.6. - 1/4 si oubli de $\lambda \notin \mathbb{N}^*$.

Problème 2

- 1.** - 1/4 si la relation $M^r = P N^r P^{-1}$ n'est pas justifiée (récurrence).
- 2.a)** Attention aux indices. On sanctionne lourdement si la gestion des indices n'est pas claire.
- 2.b)** - 2/4 si on a seulement $E_{ij}^2 \neq 0$ et non : $\forall r E_{ij}^r \neq 0$.
- 3.** La moitié des points pour la dimension du noyau.
On est bienveillant sur la liberté de la famille.
- 5.a.i)** 2/4 pour la méthode mais erreur de calcul.
- 5.a.ii)** + 1/4 pour tout début de calcul.
+ 2/4 si la formule est proche du résultat mais des erreurs d'indice.
- 6.** + 1/4 pour l'inclusion $E_{\mathcal{N}} \subset \text{Ker}(\text{Tr})$.
+ 3/4 pour l'inclusion réciproque.
- 8.a)** Le calcul doit être bien détaillé car le résultat est donné.
- 10.** + 1/4 si mention du TVI. - 2/4 si oubli de l'hypothèse de continuité. 0/4 si confusion avec le théorème de la bijection, Rolle, etc.
- 11.** On ne demande pas de faire la récurrence. L'idée suffit.

P.1.	P.2.a)	P.2.b)	A.1.a)	A.1.b)	A.2.a)	A.2.b)	A.3.a)	A.3.b)	A.4.

A.5	B.1.	B.2.	B.3.	B.4.a)	B.4.b)	B.5.	B.6.a)	B.6.b)	1.

2.a)	2.b)	3.	4.	5.a)i)	5.a)ii)	5.b)	6.	7.	8.a)

8.b)	9.	10.	11.	12.