Mathématiques approfondies Cours ECG 2

Partie V

Chapitres

- 8. Fonctions de plusieurs variables (introduction)
- 9. Diagonalisation
- 10. Algèbre bilinéaire



Lycée Saint Louis 2025/2026

Fonctions de plusieurs variables

La science consiste à passer d'un étonnement à un autre.

ARISTOTE

Philosophe grec de l'Antiquité (384-322 av. J.-C), disciple de Platon.

Définitions et exemples

1.1 Norme euclidienne

Définition 1 (norme euclidienne)

Pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit la **norme euclidienne** de x par

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Règles de calculs

- $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $||x|| = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^n}$.
- Homogénéité: $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.
- Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $||x + y|| \le ||x|| + ||y||$.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \le ||x|| \cdot ||y||$. Il y a égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires.

1.2 Fonctions définies sur \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}

Exemples.

- Avec les fonctions usuelles : $f:(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + xy y^3$, $g:(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \ln(1+x^2e^{yz})$, $h:x \in \mathbb{R}^n \mapsto ||x||$.
- · Les fonctions polynomiales, les fonctions affine ...

1.3 Graphes et lignes de niveau

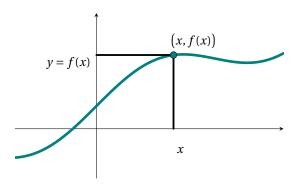
Définition 2 (graphe)

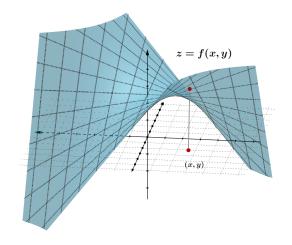
Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. Le **graphe** de f est la partie de \mathbb{R}^{n+1} définie par

$$\{(x_1,...,x_n,y)\in\mathbb{R}^{n+1}\mid y=f(x_1,...,x_n)\}.$$

• Graphe d'une fonction d'une variable réelle (rappel)

Pour n=1, on retrouve la courbe représentative d'une fonction.





• Graphe d'une fonction de deux variables

Ci-contre, la surface représentative de la fonction $f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto xy/10+5.$

Suivant le même principe que pour le tracé de la courbe représentative d'une fonction d'une variable réelle, le code Python suivant permet de tracer la surface représentative d'une fonction de deux variables.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

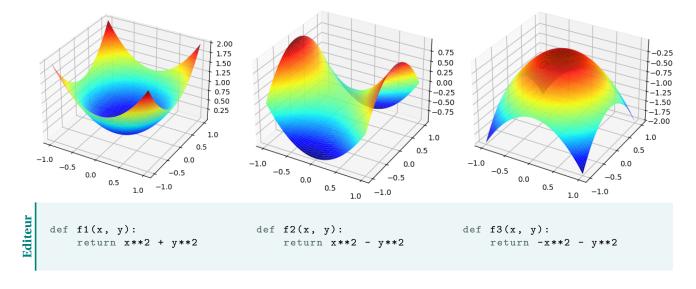
def f(x,y):
    return x**2+y**2
# Définition de la fonction f

x = np.linspace(-1, 1, 100)
# 100 valeurs pour la variable x espacées régulièrement entre -1 et 1
y = np.linspace(-1, 1, 100) # De même pour la variable y

X, Y = np.meshgrid(x, y)
# Tableau contenant les points (xi,yi) où xi et yi sont calculés précédemment
Z = f(X,Y)
# Calcul des images pour tous les points (xi,yi)

fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection='3d')
ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1, cstride=1, cmap='jet', edgecolor='none') # paramètres d
    'affichage
```

Exemples. Illustrons ce code à l'aide de trois exemples typiques de fonctions polynomiales de degré 2.



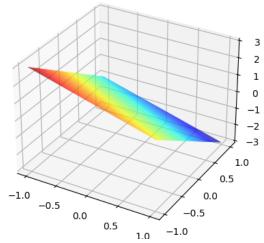
Exemple. Cas des fonctions affines.

- \rightarrow Pour n=1, le graphe d'une fonction affine sur $\mathbb R$ correspond à une droite.
- \rightarrow Pour n=2, le graphe d'une fonction affine sur \mathbb{R}^2 correspond à un plan d'équation

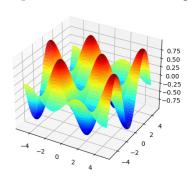
$$z = ax + by + c$$
.

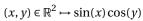
Ci-contre, le plan d'équation z + x + 2y = 0 obtenu à partir de la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par f(x, y) = -x - 2y.

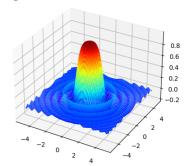
 \rightarrow Dans le cas général, on obtient "un hyperplan affine", c'est-à-dire un translaté d'un hyperplan vectoriel de \mathbb{R}^{n+1} .



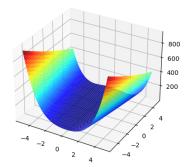
Exemples. Donnons de nouveaux graphes pour illustrer la diversité des cas possibles.







$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 0.01}$$



$$(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto (1-x)^2+(y-x^2)^2$$

Définition 3 (lignes de niveau)

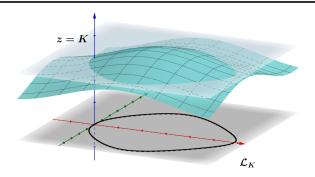
Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction.

La **ligne de niveau** de f associée au réel K est la partie de \mathbb{R}^2 définie par

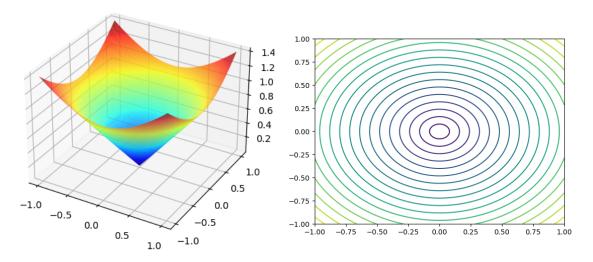
$$\mathscr{L}_{K} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^{2} \mid f(x, y) = K \}.$$

Pour obtenir la ligne de niveau \mathcal{L}_K d'une fonction, il suffit d'intersecter le plan horizontal z = K avec la surface définie par la fonction.

Ci-dessous, un code python pour tracer la surface et les lignes de niveau.



```
diteur
```



• Les symétries

Dans le cas des fonctions d'une seule variable, nous avons vu que la parité/imparité, la périodicité permettent de simplifier l'étude ou encore de tester la cohérence d'un résultat. Ces idées s'édentent aux fonctions de plusieurs variables. Voici quelques conditions de symétries.

I
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
 $f(x, y) = f(-x, -y)$ II $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x, y) = -f(-x, -y)$ III $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x, y) = f(-x, y)$ IV $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x, y) = f(-x, y)$ VI $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x, y) = f(x, -y)$

 $\text{VII} \qquad \forall \, a \in \mathbb{R}^2 \qquad \quad f(a) = \phi \big(\| \, a \| \big) \qquad \text{avec} \quad \phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$

♦ Pour chacune des fonctions suivantes, préciser si la fonction vérifie une des symétries parmi I à VII.

Exercice 1

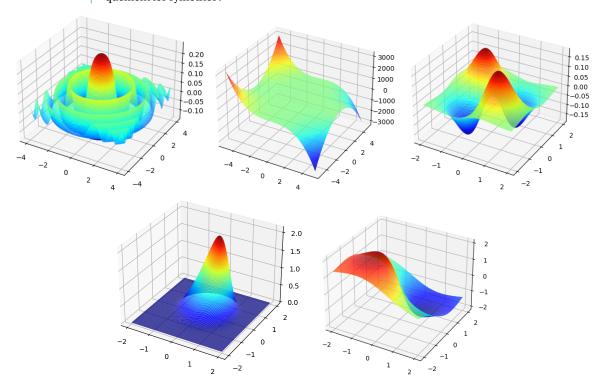


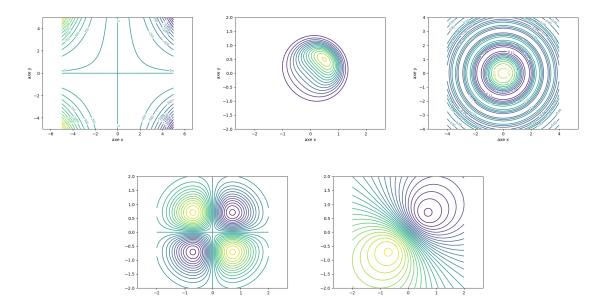
$$f:(x,y)\mapsto \frac{\cos(x^2+y^2)}{4+x^2+y^2}, \qquad g:(x,y)\mapsto 5xy-x^3y^2, \quad h:(x,y)\in \mathbb{R}^2\mapsto \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)^2+x+y}$$

$$i(x,y) = -xy \exp(-x^2 - y^2), \quad j(x,y) = -3*(x+y)/(1+x^2+y^2).$$

Associer à chaque fonction son graphe et ses lignes de niveau. Comment traduire géométriquement les symétries?

FPV1





Remarque. Nous avons utilisé la commande plt.axis ('equal') pour rendre le repère orthonormé.

1.4 Extrema

Définition 4 (maximum, minimum, extremum)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, une fonction.

- On dit que f admet un **maximum** en $a \in \mathbb{R}^n$ si : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \leq f(a)$. Dans ce cas, on dit que f(a) est le maximum de f sur \mathbb{R}^n .
- On dit que f admet un **minimum** en $a \in \mathbb{R}^n$ si : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \ge f(a)$. Dans ce cas, on dit que f(a) est le maximum de f sur \mathbb{R}^n .
- On dit que f admet un extremum en $a \in \mathbb{R}^n$ si f admet un minimum ou un maximum en a.

Exercice 2



 \bullet Déterminer les extrema (s'ils existent) des fonctions suivantes définies sur \mathbb{R}^3 ou \mathbb{R}^2 .

$$\begin{array}{lllll} f_1(x,y,z) & = & 2x^2 + 4xy + 2y^2 + 3z^2 - 1, & f_2(x,y,z) & = & 2xy + y^2 + 2xz - z^2, \\ f_3(x,y,z) & = & \mathrm{e}^{2xy + y^2 + 2xz - z^2}, & f_4(x,y) & = & \mathrm{e}^{1-x^2 - y^2}, \\ f_5(x,y) & = & \sin(x)\cos(y), & f_6(x,y) & = & \sin(x+y)\cos(x-y), \\ f_7(x,y) & = & \sin(x+y)\cos(x+y). & \end{array}$$

FPV2

2.1 Définitions et exemples

Définition 5 (continuité en un point, sur \mathbb{R}^n)

• Une fonction f, définie sur \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} , est continue au point $a \in \mathbb{R}^n$ si :

$$\forall \, \varepsilon \in \mathbb{R}_{*}^{+}, \quad \exists \, \alpha \in \mathbb{R}_{*}^{+}, \quad \forall \, x \in \mathbb{R}^{n}, \qquad \Big(\, \|x - a\| \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad \Big| f(x) - f(a) \Big| \leq \varepsilon \, \Big).$$

• Une fonction f est continue sur \mathbb{R}^n si et seulement si f est continue en tout point de \mathbb{R}^n .

Remarque. C'est exactement la même définition que pour les fonctions d'une variable réelle à l'exception que la valeur absolue a été généralisée par la norme.

Exemples. Continuité de la norme et continuité des applications coordonnées.

2.2 Opérations sur les fonctions continues

Proposition 6 (somme, produit, quotient)

Soient f, $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues sur \mathbb{R}^n avec g ne s'annulant pas dans le dernier cas,

alors

- \rightarrow La somme f + g est continue sur \mathbb{R}^n ,
- \rightarrow La fonction $\lambda \cdot f$ est continue sur \mathbb{R}^n ,
- \rightarrow Le produit $f \cdot g$ est continue sur \mathbb{R}^n ,
- \rightarrow Le quotient f/g est continue sur \mathbb{R}^n .

Application. Comme les fonctions polynomiales s'obtiennent pas somme et produit des fonctions coordonnées (qui sont continues sur \mathbb{R}^n), on démontre ainsi la continuité des fonctions polynomiales.

Exemple. Le produit scalaire canonique $(x, y) \in \mathbb{R}^{n^2} \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est continue.

Proposition 7 (composition)

Soient $\varphi: I \to \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$ et $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Si $\mid f$ continue sur \mathbb{R}^n et à valeurs dans I, c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \in I$.

 $\rightarrow \varphi$ est continue sur I.

Alors la fonction $\varphi \circ f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \varphi(f(x)) \in \mathbb{R}$ est continue sur \mathbb{R}^n .

Rédaction d'une continuité

Posons $g:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mapsto z\sqrt{(xy)^2+3z^4}$.

La fonction $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (xy)^2 + 3z^4$ est continue sur \mathbb{R}^3 en tant que fonction polynomiale à valeurs dans \mathbb{R}^+ . La fonction racine carrée : $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur \mathbb{R}^+ . Par composition, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \sqrt{(xy)^2 + 3z^4}$ est continue sur \mathbb{R}^3 .

De plus, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto z$ est continue et, par produit, g est continue sur \mathbb{R}^3 .

Méthode



Exercices



Représentations graphiques

Exercice 3. \diamondsuit Tracer les lignes de niveaux des fonctions définies sur \mathbb{R}^2 .

FPV3

$$f: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 2x - 3y + 1, \quad g(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2 - 5, \quad h(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{y - x^2}, \quad i(x, y) \in \mathbb{R} \mapsto xy.$$

Recherche d'extrema

Exercice 4. \spadesuit On définit la fonction f sur \mathbb{R}^2 par $f(x,y) = e^x \left(xe^x + (yx)^2 \right)$.

FPV4

- 1. \triangleleft Est-ce que f possède un maximum sur \mathbb{R}^2 ?
- **2.** Étudier la fonction g définie sur \mathbb{R} par g(x) = f(x, 0).
- **3.** \triangleleft En déduire un minimum pour f sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 5. \spadesuit Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

FPV5

- 1. Comparer f(-x, -y) et f(x, y).
- **2.** Soit $y \in \mathbb{R}^+$, montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, y)$ admet un minimum sur \mathbb{R} . On le note g(y).
- **3.** Étudier la fonction g et vérifier que f admet un minimum sur \mathbb{R}^2 atteint eu deux points.

Exercice 6. ***

FPV6

- 2. \P Soit $a = (a_i) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Étudier les extrema de $f_a : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right)^2 \prod_{i=1}^n e^{-x_i^2}$.

Continuité

Exercice 7. \diamondsuit Sustifier la continuité des fonctions suivantes :

FPV7

$$f: x \in \mathbb{R}^n \to ||x||^{||x||}$$
 et $g: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to \int_{x+y^2}^{y^2} \exp(t^2) dt$

On choisit dans le premier cas, la convention $0^0 = 1$.

Exercice 8. $\spadesuit \spadesuit$ Soit $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

FPV8

Montrer que l'application $f: x \in \mathbb{R}^n \mapsto h(\sin(||x||))$ admet un minimum et un maximum.

Exercice 9. ***

- 1. Nous savons que si une fonction $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement monotone alors elle est injective. La réciproque est fausse. Pouvezvous donner le graphe d'un contre-exemple?
- 2. L'objectif des questions suivantes est de prouver que la réciproque devient vraie si on suppose en plus que h est continue.

On dit qu'une partie A de \mathbb{R}^2 est convexe si

$$\forall a, a' \in A, \quad \forall t \in [0; 1] \quad ta + (1 - t)a' \in A.$$

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continue. On définit f(A), la partie de \mathbb{R} par

$$f(A) = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, \ y = f(x) \}.$$

- a) Montrer que pour toute partie convexe A, f(A) est un intervalle de \mathbb{R} . Pour rappel, I est un intervalle de \mathbb{R} si pour tous α , $\beta \in I$ avec $\alpha < \beta$, on a $[\alpha, \beta] \subset I$.
- **b)** Soit $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injective et continue.
 - i) \P Vérifier que $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < x_2\}$ est une partie convexe de \mathbb{R}^2 .
 - ii) \P En considérant l'application f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x_1, x_2) = h(x_1) h(x_2)$, conclure que h est strictement monotone sur \mathbb{R}

Exercice 10. $\spadesuit \spadesuit$ Soient $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ et f une application continue de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

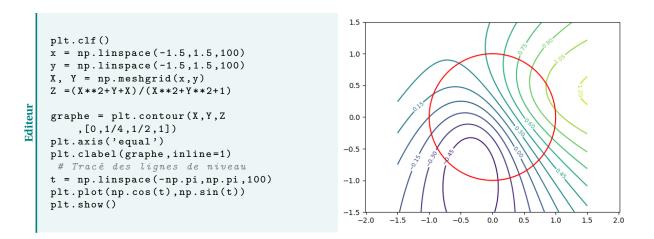
FPV9

1. \P En considérant l'application $g:[0,2\pi] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = f(\cos(t), \sin(t)) - f(-\cos(t), -\sin(t)),$$

justifier qu'il existe $(x_0, y_0) \in C$ tel que $f(x_0, y_0) = f(-x_0, -y_0)$.

- **2.** Que peut-on en déduire sur l'injectivité de f?
- **3.** Déterminer explicitement les couples (x_0, y_0) solutions pour la fonction $f: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y + x)/(x^2 + y^2 + 1)$. Calculer $f(x_0, y_0)$ et vérifier la cohérence de vos calculs à l'aide des quelques lignes de niveau de la fonction.



Exercice 11. \blacklozenge Soient $X_1,...,X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi, admettant chacune une #FPV32 espérance et un écart-type notés respectivement μ et $\sigma \neq 0$.

Pour tout $(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note :

$$f(x_1,...,x_n) = \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n x_i X_i - \mu\right)^2\right).$$

On rappelle que dans le cas de variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, l'espérance du produit est égale au produit des espérances.

- **1.** Justifier l'égalité : $f(x_1,...,x_n) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \mu^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i 1\right)^2$.
- **2.** Justifier, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, l'inégalité : $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \le n \sum_{i=1}^n x_i^2$.
- **3.** En déduire le minimum de f sur l'ensemble $\mathcal{H} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n = 1\}$.

Diagonalisation

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen : redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes. a

GOETHE

#DA1

Écrivain allemand (1749-1832)

a. Les mathématiciens sont comme les Français : quoi que vous leur disiez, ils le traduisent dans leur propre langue et le transforment en quelque chose de totalement différent.

1 Définitions

Définition 8 (endomorphisme diagonalisable)

Soit $\omega \in \mathcal{L}(E)$

On dit que φ est **diagonalisable** s'il existe une base de E qui soit composée de vecteurs propres de φ .

Exercice 12



- ♦ Soient φ , $s \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie.
- Les questions sont indépendantes.
- 1. Justifier que si φ est diagonalisable et bijectif, φ^{-1} est aussi diagonalisable.
- 2. Que dire de φ si ce dernier est diagonalisable et n'admet qu'une seule valeur propre?
- 3. Que dire de φ si ce dernier est diagonalisable et rg $(\varphi^2) = 0$?
- **4.** •• Si φ est diagonalisable et *s* bijective. Justifier que $s \circ φ \circ s^{-1}$ est aussi un endomorphisme diagonalisable.

Définition 9 (matrice diagonalisable)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A est **diagonalisable** s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$
.

Autrement dit, une matrice est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale. Dans ce cas, P est une matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à une base de vecteurs propres de la matrice A.

Remarque. La matrice A est diagonalisable si les colonnes de P forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A. De plus, le spectre de A s'identifie au spectre de D qui correspond donc aux coefficients diagonaux de D.

Exemples. • Soit
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
. On a montré que

$$Sp(A) = \{1, 2, -4\} \quad avec \quad E_1(A) = Vect \left(\begin{bmatrix} 1\\1\\1 \end{bmatrix} \right), \quad E_2 = Vect \left[\begin{array}{c} 4\\3\\-2 \end{array} \right] \quad et \quad E_{-4} = Vect \left[\begin{array}{c} 2\\-3\\2 \end{array} \right].$$

On pose

$$P = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{array} \right].$$

Noter que P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base de vecteurs propres de A. On vérifie numériquement :

On retrouve bien A (attention aux arrondis près).

• La matrice $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 13



◆ A. Vrai ou faux?

- 1. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.
- 2. Si A est diagonalisable alors A² est diagonalisable. ✓
- **3.** Si A² est diagonalisable alors A est diagonalisable.
- **4.** Si A est inversible, A est diagonalisable si et seulement si A^{-1} est diagonalisable. \checkmark ×
- ♦ **B.** Montrer que si $rg(A^2) < rg(A)$, alors A ne peut-être diagonalisable.

DA2 et 3

Proposition 10 (lien en dimension finie)

Soit E, un espace vectoriel de dimension finie.

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice de φ dans une base \mathscr{B} de E. On a l'équivalence entre les énoncés.

- i) L'endomorphisme φ est diagonalisable.
- ii) La matrice A est diagonalisable.

2 Caractérisations

2.1 Version « endomorphisme »

Proposition 11 (caractérisation avec les s.e.p)

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. On a l'équivalence entre les énoncés suivants.

- i) L'espace vectoriel E est somme directe des sous-espaces propres de ϕ .
- ii) L'endomorphisme φ est diagonalisable.

♦ Exemple

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Posons pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$, le polynôme $\varphi(P)$ défini par

Exercice 14



 $\varphi(P)(x) = P(1)S(x) - P(x)$ où $S(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{k}$.

$$\rho(P)(x) = P(1)S(x) - P(x)$$
 où $S(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{k}$.

On vérifie que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$. Montrer que :

$$\mathbb{R}_n[x] = \operatorname{Ker}(\varphi + \operatorname{id}_{\mathbb{R}_n[x]}) \oplus \operatorname{vect}(S).$$

En en déduire que φ est diagonalisable.

#DA4

Corollaire 12 (caractérisation avec les dimensions)

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. On a l'équivalence entre les énoncés suivants.

- $\textstyle \sum\limits_{\lambda \in Sp(\phi)} dim \left(E_{\lambda}(\phi) \right) = dim(E).$
- L'endomorphisme ϕ est diagonalisable. ii)

Remarque. Comme $\dim(E_{\lambda}(\phi)) \ge 1$, on retrouve le fait qu'un endomorphisme de dimension finie a au plus $\dim(E)$

Corollaire 13 (cas particulier)

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie.

φ possède dim(E) valeurs propres distinctes, Si

 φ est diagonalisable et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

Attention. La réciproque est fausse. Par exemple, pour E de dimension $n \ge 2$, l'endomorphisme id_E est diagonalisable avec seulement une valeur propre (1).

Exercice 15

♦ Seemple

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Posons pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$, le polynôme $\phi(P)$ défini par

 $\varphi(P)(x) = \frac{1}{n}x(1-x)P'(x) + xP(x).$

- **1.** Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
- **2.** Pour tout $k \in [[0; n]]$, on pose $P_k(x) = x^k (1 x)^{n k}$. Calculer $\varphi(P_k)$.
- 3. Justifier que φ est diagonalisable.

DA5

2.2 Version « matricielle »

Regroupons et traduisons les résultats précédents.

Théorème 14 (caractérisations)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les énoncés suivants sont équivalents.

- La matrice A est diagonalisable. i)
- Il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. ii)
- iii) $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est somme directe des sous-espaces propres de A.
- $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \dim \left(\mathcal{E}_{\lambda}(A) \right) = n.$ iv)

Exemple. \(\square\) La matrice Attila.

Python. La commande eigvals permet le calcul de valeurs propres. Par exemple :

import numpy.linalg as al

On importe la sous-bibliothèque
linalg

A=np.array([[1,3,0],[0,-2,0],[-1,-2,0]])

On définit la matrice A
print(al.eigvals(A))

```
>>> # script executed
[ 0. 1. -2.]
```

Selon ce calcul, 0, 1 et -2 sont toutes les valeurs propres de A. La matrice A est diagonalisable.

Proposition 15 (*n* valeurs propres)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A admet *n* valeurs propres distinctes,

alors A est diagonalisable et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

3 Compléments

3.1 Cas particuliers

Cas des matrices de taille 2

Rappelons que pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \in Sp(A) \iff det(A - \lambda I_2) = 0.$$

Exercice 16



Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonalisable. Notons λ_1 et λ_2 , les deux valeurs propres éventuellement confondues de la matrice A.

- **1.** Montrer que $\lambda_1 + \lambda_2 = tr(A)$ et $\lambda_1 \lambda_2 = det(A)$.
- **2.** En minimisant le nombre de calculs, montrer que la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable dans \mathbb{R} .

Exercice 17



♦ Soit A = $\begin{bmatrix} a & c \\ c & d \end{bmatrix}$ ∈ $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Démontrer que A est diagonalisable.

Cas des matrices triangulaires

Exercice 18



Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

$$T_1 = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right], \quad T_2 = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \quad \text{et} \quad T_3 = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right].$$

2. \mathbf{Q} À quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice $M_{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ est diagonalisable?

DA8

DA6

DA7

Cas des matrices symétriques réelles

Théorème 16 (cas symétrique, première version)

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Exercice 19



Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que l'endomorphisme suivant est diagonalisable.

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y+z,x+3z,x+3y-z). \end{array} \right.$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice symétrique appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^n = I_n$.

DA9

Cas des projecteurs

• Soit p, un projecteur de E (avec $p \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $p \neq$ id_E). En reprenant l'étude effectué au chapitre précédent, on a

$$E = E_0(p) \oplus E_1(p).$$

Les projecteurs sont des endomorphismes diagonalisables. Si B est une base adaptée à la décomposition en sous-espaces propres, la matrice de p dans la base \mathcal{B} est diagonale.

En particulier, on constate que $Tr(Mat_{\mathscr{B}}(p)) =$ $\operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(p)) = \operatorname{rg}(p).$

$$Mat_{\mathscr{B}}(p) = \underbrace{\left[\begin{array}{ccccc} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]}_{\dim E_{1}(p)}.$$

3.2 Pratique de la diagonalisation et applications

En reprenant les méthodes étudiées au chapitre VALEURS PROPRES, VECTEURS PROPRES, traiter les exercices suivants.

Exercice 20



♦ Si possible, diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \quad \text{et} \quad B = \left[\begin{array}{ccc} -4 & 6 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{array} \right].$$

Diagonaliser la matrice A signifie : donner, si possible, une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

DA10

Exercice 21



- Solution Considérons l'application φ défini sur $\mathbb{R}_2[x]$ par $\varphi(P)(x) = x(1-x)P'(x) + 2xP(x)$.
 - **1.** Montrer que φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
 - 2. Exprimer la matrice de φ dans la base canonique. La diagonaliser.
 - 3. Conclure en donnant une base de vecteurs propres de φ .

DA11

Astuce. Dans la recherche des valeurs, il ne faut pas oublier que pour une matrice diagonalisable

$$Tr(A) = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \lambda \times dim \big(E_{\lambda}(A) \big).$$



1. Prouver la remarque précédente.

2. *Application.* Soit A définie par $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$. Sachant que $rg(A + 2I_n) = 1$, que peut-on en déduire sur la diagonalisation de A?

DA12

Applications

Exercice 23



♦ Calcul des puissances

Calculer pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p où la matrice A est étudiée à l'exercice 20.

DA13



♦ Polynôme de matrices et racine carrée d'une matrice

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right].$$

- 1. Vérifier que A est diagonalisable et la diagonaliser.
- **2.** En déduire l'inversibilité de A et A^{-1} .
- 3. Expliquer comment calculer Q(A) où Q $\in \mathbb{R}[x]$. Préciser un polynôme annulateur non nul de A.
- **4.** Déterminer une matrice B telle que $B^2 = A$.

DA14

Les applications sont nombreuses. Citons par exemple : la recherche du commutant (voir exercice 42, p.19) ; la résolution des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (voir exercice 43, p.20) ; la résolution de systèmes différentiels linéaires.



Exercices



Exercice 25.
$$\diamondsuit$$
 Montrer que la matrice $A = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

DA15

Exercice 26. \blacklozenge Parmi les matrices élémentaires $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, lesquelles sont diagonalisables?

DA16

Exercice 27.
$$\Leftrightarrow$$
 Soit φ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[x]$, $\varphi(P)(x) = (2x+1)P(x) - (x^2-1)P'(x)$.

DA17

Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$. Est-il diagonalisable?

Exercice 28.
$$\diamondsuit$$
 Montrer que les matrices suivantes sont semblables

DA18

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 29. \blacklozenge Soit φ un endomorphisme de E de dimension finie.

DA19

Montrer que φ est un projecteur si et seulement si φ est diagonalisable et $Sp(\varphi) \subset \{0; 1\}$.

DA20

Exercice 30. ** Diagonalisation avec un paramètre

Pour tout réel a, on pose

$$\mathbf{M}_a = \left[\begin{array}{ccc} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

On vérifie par le calcul que $Q(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a$ est annulateur de M_a .

- 1. Justifier que pour a = 1, M_a ne peut être diagonalisable.
- 2. Déterminer les réels a pour lesquels M_a est diagonalisable.

Exercice 31. \blacklozenge On considère l'application φ , qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ associe $\varphi(P) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}$, où $P^{(k)}$ désigne la dérivée #DA23 k-ième de P avec la convention $P^{(0)} = P$.

- **1.** Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
- 2. \triangleleft Est-ce que φ est diagonalisable?

Exercice 32. \blacklozenge Posons $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = AM$.

DA24

- 1. a) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique.
 - **b)** Trouver un polynôme annulateur de φ .
 - c) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable?
- 2. On définit maintenant les endomorphismes ψ et s de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $\psi(M) = MA$ et $s(M) = {}^tM$.
 - a) Vérifier que $\psi = s \circ \phi \circ s^{-1}$.
 - b) En déduire un polynôme annulateur de ψ. Est-ce que l'endomorphisme ψ est diagonalisable?

Exercice 33. ** 🖎

D'après EDHEC 2014 # DA24

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et A une matrice non nulle donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application f qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe:

$$f(M) = Tr(A) M - Tr(M) A$$
.

- **1.** Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- **2.** a) Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, exprimer $(f \circ f)(M)$ à l'aide de Tr(A) et f(M).
 - b) En déduire un polynôme annulateur de f. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de f?
- 3. a) \triangleleft Montrer que 0 est valeur propre de f.
 - **b)** Montrer que, si Tr(A) = 0, alors f n'est pas diagonalisable.
- 4. On suppose dans cette question que la trace de A est non nulle.
 - a) Préciser la dimension de Ker(Tr).
 - \mathbf{b}) En déduire que f est diagonalisable.

Exercice 34. 💠 🗞 Diagonalisation des matrices de rang 1

DA26

1. \P Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si et seulement si il existe deux matrices colonnes non nulles U, V telles que $M = U^t V$.

- **2.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note U et V deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U^tV$ et on note a = Tr(A).
 - a) 4 Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
 - **b)** Vérifier que ${}^{t}VU = a$, puis que $A^{2} = aA$.
 - c) \P Justifier que si a = 0 alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - d) On suppose dans la suite $a \neq 0$. Calculer AU. Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.
 - e) Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 soit diagonalisable.

Exercice 35. ♦♦ Soit φ un endomorphisme de E admettant un polynôme annulateur P.

DA27

- 1. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $P(x) = x(x \alpha)$. Vérifier que les sous-espaces propres $E_0(\phi)$ et $E_{\alpha}(\phi)$ sont supplémentaires dans E. En déduire que ϕ est diagonalisable.
- 2. On suppose maintenant que P est de degré 2 avec deux valeurs propres distinctes. Montrer que φ est diagonalisable.

Exercice 36. $\spadesuit \diamondsuit$ Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, a et b deux réels tels que $ab \neq 0$. On note M(a, b) la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ donnée par : # DA29

$$\mathbf{M}(a,b) = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & a & a & \cdots & a \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right].$$

- 1. a) Calculer $M(a, b)^2$.
 - b) Montrer que $M(a, b)^2$ est diagonalisable et trouver ses deux valeurs propres.
- 2. Soient $c, d \in \mathbb{R}^*$ et $M(c, d) = \begin{bmatrix} 0 & c & c & \cdots & c \\ d & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.
 - a) \triangleleft Montrer que si M(c, d) est semblable à M(a, b) alors ab = cd.
 - **b)** Établir la réciproque en considérant une matrice $P_{\varepsilon} = \operatorname{diag}(\varepsilon, 1, ..., 1) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.
- 3. a) Est-ce que la matrice M(a, b) est semblable à sa transposée?
 - b) \triangleleft À l'aide de la trace, montrer que si la matrice M(a,b) est diagonalisable alors ab > 0.
 - c) \P On suppose que ab > 0, vérifier que M(a,b) est semblable à une matrice du type $M(\alpha,\alpha)$. En déduire que M(a,b) est diagonalisable.

Exercice 37. • Mélange algèbre et probabilité

DA30

1. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, dans quel(s) cas la matrice

$$\mathbf{M}_{a,b} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

est-elle diagonalisable?

- 2. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers, indépendantes et de même loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$.
 - a) Rappeler la loi de X + Y et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} {n \choose k}^2$.
 - b) Calculer la probabilité pour que la matrice $M_{X,Y}$ soit diagonalisable.

Exercice 38. ◆ Exemple avec deux valeurs propres

DA31

Soient E un espace vectoriel et ϕ un endomorphisme de E diagonalisable avec exactement deux valeurs propres λ et μ . Notons E_{λ} et E_{μ} les sous-espaces propres associés respectivement aux valeurs propres λ et μ .

- 1. Justifier que E_{λ} et E_{μ} sont supplémentaires dans E. On peut donc considérer le projecteur p (respectivement q) sur E_{λ} parallèlement à E_{μ} (respectivement sur E_{μ} parallèlement à E_{λ}).
- **2.** Préciser p + q, $p \circ q$ et $q \circ p$.
- **3.** Vérifier que $u = \lambda p + \mu q$ et plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = \lambda^n p + \mu^n q$.

- i) L'endomorphisme φ est diagonalisable.
- ii) L'endomorphisme φ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples. Pour rappel, un polynôme P est scindé à racines simples s'il existe r réels $a_1, ..., a_r$ deux à deux distincts tels que $P(x) = \prod_{i=1}^r (x-a_i)$.

- 1. Montrer que i) \Rightarrow ii).
- 2. Prouvons la réciproque. Supposons donc que φ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
 - a) Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Justifier que l'application suivante est bien posée, linéaire et injective

$$\Phi: \left\{ \begin{array}{ccc} \mathsf{H} & \to & \mathsf{Ker}\, f \\ u & \mapsto & g(u) \end{array} \right. \quad \mathsf{avec}\, \mathsf{H} \, \mathsf{un} \, \mathsf{suppl\acute{e}mentaire} \, \mathsf{de} \, \mathsf{Ker}\, g \, \mathsf{dans} \, \mathsf{Ker}\, f \circ g.$$

En déduire que dim $\operatorname{Ker}(f \circ g) \leq \dim (\operatorname{Ker}(f)) + \dim (\operatorname{Ker}(g))$.

b) Montrer plus généralement que pour $f_1, f_2, ..., f_r \in \mathcal{L}(E)$,

$$\dim \left(\operatorname{Ker}\left(f_{1} \circ \cdots \circ f_{r}\right)\right) \leqslant \sum_{j=1}^{r} \dim \left(\operatorname{Ker}(f_{j})\right).$$

- c) En déduire la réciproque ii) \Rightarrow i).
- 3. Application

En déduire que si ϕ est diagonalisable et F est un sous-espace stable par ϕ , alors la restriction de ϕ à F est un endomorphisme diagonalisable.

Exercice 40. $\blacklozenge \diamondsuit$ Soit ϕ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[x]$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[x]$, associe le polynôme $\phi(P)$ obtenu comme # DA36 le reste de la division euclidienne de P par $(x-1)^2$.

- **1.** Vérifier que φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
- **2.** Donner M, la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.
- 3. \triangleleft Calculer M². Qu'en déduire sur φ ?
- 4. Est-ce que φ est diagonalisable? Si oui, précisez les sous-espaces propres.

Problème 41. ♦♦♦ Exemple de convergence de matrices de Hessenberg

DA43

On dit qu'une suite de matrices $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice L si pour tout couple d'indice (i,j), la suite des coefficients $([M_p]_{i,j})_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers le coefficient $L_{i,j}$. On note $M_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} L$

On admet le résultat suivant : Si P, Q sont deux matrices fixées et $M_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} L$ alors $PM_pQ \xrightarrow[p \to +\infty]{} PLQ$.

Soit a un réel strictement positif. On note H(a) et J(a) les deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par

$$H(a) = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a + \sqrt{a} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad J(a) = \begin{bmatrix} a & a & a \\ -1 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

- 1. a) Trouver les valeurs propres de la matrice H(a) et montrer qu'elle est diagonalisable.
 - b) Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que la suite de matrices $\left(\frac{1}{r^p}(\mathbf{H}(a))^p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, le réel r est supérieur ou égal à $a + \sqrt{a}$.
 - c) Soit $Q(a) = \lim_{p \to +\infty} \frac{1}{(a + \sqrt{a})^p} (H(a))^p$.

 Justifier que l'endomorphisme φ_a , canoniquement associé à Q(a), est un projecteur, dont on précisera le rang, l'image et le noyau.
- 2. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que la suite de matrices $\left(\frac{1}{r^p}(J(a))^p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, le réel r est strictement supérieur à $\sqrt{a(1+a)}$.

Quelques applications de la diagonalisation

Exercice 42. *** Recherche du commutant

DA37

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres distinctes. On définit le commutant de A par

$$\mathscr{C} = \{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA \}.$$

- **1.** \triangleleft Justifier que la famille $(I_n, A, A^2, ..., A^{n-1})$ est libre.
- **2.** Vérifier que $\mathscr C$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr M_n(\mathbb R)$ avec $\dim \mathscr C \geqslant n$.
- 3. Montrer l'existence d'une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit diagonale.
- 4. \P Soit $M \in \mathscr{C}$. Montrer que tout vecteur propre de A est un vecteur propre de M. En déduire que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale. En déduire que \mathscr{C} est de dimension inférieure ou égale à n.
- **5.** Conclure en montrant que $(I_n, A, ..., A^{n-1})$ est une base de \mathscr{C} .

Exercice 43. * Suite récurrente linéaire d'ordre 2

DA38

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On note E l'espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}$$
, $u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$.

Soit u, une suite de E. On pose $U_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix}$.

- **1.** \triangleleft Déterminer une matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.
- 2. a) Montrer que la matrice A est diagonalisable. Puis, préciser une matrice inversible et une matrice D diagonale telles que A = PDP⁻¹.
 - **b)** En déduire A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3. À partir des questions précédentes, donner l'expression de u_n en fonction de n, a, u_0 et u_1 .
- 4. Donner une base de E. Comparer les résultats obtenus avec la méthode classique des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Sujets de révision

Problème 44. ** Diagonalisation simultanée

D'après Oraux ESCP 2016 # DA40

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E diagonalisable. On note $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ l'ensemble de ses valeurs propres et E_1, \ldots, E_p les sous-espaces propres associés. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f, tel que $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$. Soit x un vecteur de F.

- **1.** Montrer qu'il existe un unique *p*-uplet $(x_1, ..., x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_p$.
- **2.** On suppose désormais $x \neq 0$. Montrer que, quitte à modifier l'ordre, on peut supposer qu'il existe $r \in [1, p]$ tel que $x_i = 0$ pour i > r et $x_i \neq 0$ pour i < r. On a alors $x = x_1 + \dots + x_r$. On note V_x le sous-espace vectoriel engendré par (x_1, \dots, x_r) .
- **3. a)** Montrer que $(x_1, ..., x_r)$ est une base de V_x .
 - **b)** Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $f^j(x) \in V_x$.
 - c) Déterminer la matrice A de la famille $(x, f(x), ..., f^{r-1}(x))$ dans la base $(x_1, ..., x_r)$ de V_x .
 - **d**) Notons $C_1, ..., C_r$ les colonnes de A et $\alpha_1, ..., \alpha_r$ des réels tels que $\sum\limits_{j=1}^r \alpha_j C_j = 0$. Montrer que le polynôme $P(x) = \sum\limits_{j=1}^r \alpha_j x^{j-1}$ est le polynôme nul. En déduire que A est inversible.
 - e) Montrer que pour tout $i \in [[1, p]], x_i \in F$, puis que $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$.
- **4.** Soit g un endomorphisme de E, diagonalisable et commutant avec f (i.e. tel que $f \circ g = g \circ f$). Montrer qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à f et g.

Problème 45. 🔸 🖎 Réduction du crochet de Lie

D'après EMLyon 2014 ECS # DA41

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Pour tout i de [[1;n]], on note V_i la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la i-ième ligne qui est égal à 1. On admet que la famille $(V_i)_{i \in [[t1;n]]}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour tout (i,j) de $[[1;n]]^2$, on note $E_{i,j} = V_i^{\ t}V_j$. Ainsi, pour tout (i,j) de $[[1;n]]^2$, la matrice $E_{i,j}$ est la matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne qui est égal à 1. On admet que la famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in[[1;n]]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout λ de \mathbb{R} , $A \neq \lambda I_n$. On considère l'application Φ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi_A(M) = AM - MA.$$

- **1.** Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- **2.** Calculer Φ_A (I_n). L'endomorphisme Φ_A est-il injectif? surjectif?
- **3.** Montrer que A et ^tA ont les mêmes valeurs propres.
- **4.** Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que X (resp. Y) est un vecteur propre de A (resp. de tA). Montrer que X^tY est un vecteur propre de Φ_A .
- 5. Soient $(X_1, X_2, ..., X_n)$ et $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note \mathscr{F} la famille $\mathscr{F} = \left(X_i^{\,t} Y_j\right)_{(i,j) \in [[1;n]]^2}$. Montrer que, pour tout (i,j) de $[[1;n]]^2$, $V_i^{\,t} V_j$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par \mathscr{F} , et en déduire que la famille \mathscr{F} est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 6. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de Φ_A est l'ensemble des différences $\lambda \mu$ lorsque λ et μ décrivent les valeurs propres de A.

Problème 46. ♦♦ Matrices compagnons

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ des nombres réels. Soit P le polynôme défini par l'expression

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$$
.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels. La matrice $C_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, appelée matrice compagnon de P, est définie par

$$C_{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{0} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

- Exemple
- 1. a) Déterminer le polynôme R dont la matrice compagnon est $C_R = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.
 - **b)** Quelles sont les racines de R? Quelles sont les valeurs propres de C_R? Que constatez-vous?
- 2. La matrice C_R est-elle diagonalisable? Justifiez votre réponse.
- Retour au cas général
- **3.** Déterminer le rang de C_P . Indication. On pourra distinguer deux cas : le cas où $a_0 = 0$ et le cas où $a_0 \neq 0$.
- **4.** Justifier que 0 est valeur propre de C_P si et seulement si $a_0 = P(0) = 0$.
- **5.** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que dim $(\text{Ker}(C_P \lambda I_n)) \le 1$.
- - La matrice M_P Dans la suite, on considère $M_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M_P = a_0 I_n + a_1 C_P + a_2 C_P^2 + \dots + a_{n-1} C_P^{n-1} + C_P^n$.

On note

$$(E_1, E_2, \dots, E_n) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

les n vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'objectif est de montrer que M_P est la matrice nulle.

6. Retour sur l'exemple

Vérifier que M_R est la matrice nulle, où R est le polynôme trouvé à la première question.

- 7. Retour sur le cas général
 - a) Montrer que pour tout $k \in [[1, n]]$, $E_k = C_P^{k-1}E_1$.
 - **b)** En déduire qu'il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $(X, C_P X, ..., C_P^{n-1} X)$ soit une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- **8.** Montrer que $M_PE_1 = 0$.
- 9. En déduire que M_P est la matrice nulle.
- Lien entre spectre et racines de P
- **10.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de C_P et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. Montrer que λ est racine de P.
- **11.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = 0$.
 - a) On suppose uniquement dans cette question qu'il existe $X = {}^t [x_1 \cdots x_n] \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $C_PX = \lambda X$. Expliciter un système linéaire vérifiée par (x_1, \dots, x_n) . Montrer ensuite par récurrence que :

$$\forall k \in [[1, n-1]], \quad x_{n-k} = \left(a_{n-k} + \lambda a_{n-k+1} + \dots + \lambda^{k-1} a_{n-1} + \lambda^k\right) x_n.$$

b) Montrer que λ est valeur propre de C_P et exhiber un vecteur propre associé.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On considère $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des nombres réels tous distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des entiers positifs ou nuls, puis on définit le polynôme S par $S(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{\alpha_i}$.

12. Déduire de toute cette étude que la matrice compagnon C_S de S est diagonalisable si et seulement si les entiers α_i valent tous 1.

21

13. Est-ce que la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ est diagonalisable?

Algèbre bilinéaire

Άγεωμέτρητος μηδείς εἰσίτω Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre.

Inscription que Platon aurait fait graver à l'entrée de l'Académie, son école d'Athènes.

Produits scalaires

1.1 Définitions et exemples

Définition 17 (forme bilinéaire)

Soient E un espace vectoriel et φ : E × E $\rightarrow \mathbb{R}$ une application.

On dit que ϕ est une **forme bilinéaire** si elle est

→ linéaire à droite

$$\forall u, v, w \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \phi(u, \lambda v + \mu w) = \lambda \phi(u, v) + \mu \phi(u, w).$$

→ linéaire à gauche

$$\forall u, v, w \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \phi(\lambda v + \mu w, u) = \lambda \phi(v, u) + \mu \phi(w, u).$$

Définition 18 (produit scalaire)

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une application. On dit que φ est un **produit scalaire** si :

- φ est une forme bilinéaire.
- \rightarrow φ est symétrique : $\forall u, v \in E$, $\varphi(u, v) = \varphi(v)$, $\forall u \in E$, $\varphi(u, u) \ge 0$. $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$.
- φ est définie : $\forall u \in E$, $\varphi(u, u) = 0 \implies u = 0_E$.

Exemples.

• Dans \mathbb{R}^n .

Pour tous $u = (x_1, ..., x_n)$ et $v = (y_1, ..., y_n)$ dans \mathbb{R}^n , posons $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Alors $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n , appelé **produit scalaire canonique sur** \mathbb{R}^n .

• $Dans \mathbb{R}_n[x]$.

Donnons deux exemples dans le cas polynomial.

 \rightarrow Soient $a_0, a_1, \dots, a_n, n+1$ réels deux à deux distincts. L'application suivante est un produit scalaire

$$(P,Q) \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto \langle P,Q \rangle = \sum_{i=0}^n P(a_k)Q(a_k).$$

→ On peut aussi poser pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec a < b

$$(P,Q) \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto \langle P,Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t) dt.$$

• Dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

L'application $\varphi: (X,Y) \mapsto {}^t XY$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On l'appelle produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Noter, comme souvent, qu'on identifie $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et \mathbb{R} .

• Dans $\mathcal{M}_n[\mathbb{R}]$.

Pour A, B $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \operatorname{Tr} \left(\mathbf{A}^t \mathbf{B} \right).$$

• $Dans \mathcal{C}^0([a;b])$ avec a < b.

Pour
$$f, g \in \mathcal{C}^0([a;b])$$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

Définition 19 (norme)

Soit E, un espace vectoriel muni d'un produit scalaire φ. L'application

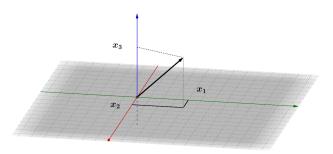
$$\mathbf{N}: \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{E} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \mathbf{N}(u) = \sqrt{\varphi(u,u)} \end{array} \right.$$

est appelée norme associée au produit scalaire ϕ .

Remarque. Dans \mathbb{R}^n , la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique est définie par :

$$\forall \ u=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n, \qquad \|u\|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}.$$

Dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , on constate que la norme représente la distance à l'origine, ou encore la longueur du vecteur. Par extension, pour $u, v \in E$, $\|u\|$ représente la « longueur » du vecteur u alors que $\|u-v\|$ correspond à la « distance » entre les deux vecteurs.



1.2 Propriétés du produit scalaire, de la norme

Proposition 20 (règles de calcul)

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dont $\| \cdot \|$ est la norme associée.

• $\forall u \in E$,

- $||u|| = 0 \iff u = 0_{\mathrm{E}}.$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E$

 $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$.

• $\forall u, v \in E$,

 $||u + v||^2 = ||u||^2 + 2\langle u, v \rangle + ||v||^2.$

Exercice 47



🔸 🦠 Identité du parallélogramme et formule de polarisation

Montrer que pour tous $u, v \in E$,

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$
 et $\langle u,v\rangle = \frac{1}{4} (\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$.

Théorème 21 (inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dont $\| \cdot \|$ est la norme associée.

$$\forall u, v \in E, \quad |\langle u, v \rangle| \le ||u|| \cdot ||v||.$$

De plus, on a égalité si et seulement si la famille (u, v) est liée.

Exercice 48



♦♦ Preuve

- **1.** Justifier que si la famille (u, v) est liée alors $|\langle u, v \rangle| = ||u|| \cdot ||v||$.
- **2.** Dans la suite, on suppose la famille (u, v) libre. À l'aide de l'application P définie sur \mathbb{R} par $P(\lambda) = \|\lambda u + v\|^2$, justifier que

$$|\langle u, v \rangle| < ||u|| \cdot ||v||.$$

AB2

Qui est qui?

Exercice 49

Parmi les photos ci-dessous, reconnaître Hermann Amandus Schwarz (mathématicien allemand), Laurent Schwartz (mathématicien français, médaille Fields pour ses travaux sur la théorie des distributions) et Augustin Cauchy (mathématicien français).









AB3

Exemple. En reprenant le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n , l'inégalité de Cauchy-Schwarz devient

$$\forall (x_i)_{i \in [[1,n]]} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (y_i)_{i \in [[1,n]]} \in \mathbb{R}^n, \qquad \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$



"Le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz est méconnu et beaucoup des tentatives pour prouver l'inégalité et son cas d'égalité ne sont que paraphrases et esbroufe."

Rapport de Jury: HEC 2019



1. $\blacklozenge \otimes$ Justifier que l'application φ suivante est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([a;b])$.

$$\forall f, g \in \mathscr{C}^0([a;b]), \qquad \varphi(f,g) = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

- 2. Expliciter l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire.
- 3. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0;1])$ ne s'annulant pas sur [0;1]. Montrer que $\int_0^1 f(t) dt \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(t)} dt \ge 1$. Préciser le cas d'égalité.

AB4

Proposition 22 (inégalité triangulaire)

Pour tous $u, v \in E$,

$$||u+v|| \le ||u|| + ||v||.$$

Exercice 51



- **♦** Soient E un espace euclidien et B = $\{x \in E \mid ||x|| \le 1\}$.
- **1.** Soient $u, v \in E$.

Que peut-on dire de u et v si on a le cas d'égalité ||u+v|| = ||u|| + ||v||?

- **2.** \bigcirc Démontrer que B est une partie strictement convexe de E, c'est-à-dire que, pour tous $x, y \in B$ avec $x \neq y$, tout $t \in]0; 1[$, on a ||tx + (1 t)y|| < 1.
- 3. Illustrer ce résultat dans \mathbb{R}^2 avec le produit scalaire canonique.

AB5

Remarque. Par récurrence, on montre que pour tout famille finie $(u_1, u_2, ..., u_p)$ de vecteurs de E

$$\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\| \leq \sum_{i=1}^p \|u_i\|.$$

1.3 Orthogonalité

Orthogonalité et vecteurs

Définition 23 (vecteurs orthogonaux)

Soient E, un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Deux vecteurs u et v de E sont dits **orthogonaux**, noté $u \perp v$, si $\langle u, v \rangle = 0$.

Remarque. Le seul vecteur de E qui soit orthogonal à tous les autres vecteurs de E est le vecteur nul. Autrement dit, pour tout $u \in E$, on a l'équivalence :

$$\left(\,\forall\,\,v\in\mathsf{E},\qquad\langle u,v\rangle=0\,\right)\quad\Longleftrightarrow\quad u=0_{\mathsf{E}}.$$



Attention. La notion d'orthogonalité est relative au produit scalaire.

$\bullet \bullet \circ$ Deux produits scalaires sur $\mathbb{R}_2[x]$

Pour tous P, $Q \in \mathbb{R}_2[x]$, on pose

$$\varphi_1(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$
 et $\varphi_2(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t) dt$.

- **1.** Vérifier que φ_1 et φ_2 définissent deux produits scalaires sur $\mathbb{R}_2[x]$.
- **2.** Notons P_1 le polynôme d'expression $P_1(x) = x$. Donner un vecteur orthogonal à P_1 relativement à ϕ_1 mais non orthogonal pour ϕ_2 et inversement.

AB6

Exercice 52



Théorème 24 (de Pythagore)

Deux vecteurs u et v sont **orthogonaux** si et seulement si

$$||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$$
.

Exercice 53



♦ Autre preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $u, v \in E$. On suppose v non nul (dans le cas contraire, l'inégalité est directe).

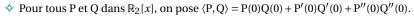
- 1. Déterminer un réel λ , fonction de $\langle u, v \rangle$ tel que les vecteurs λv et $u \lambda v$ soient orthogo-
- 2. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

AB7

Définitions 25 (famille normée, orthogonale, orthonormée)

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.

- → La famille est dite **normée** si pour tout $i \in [[1; p]], ||u_i|| = 1$.
- La famille est dite **orthogonale** si, pour tout $(i, j) \in [[1; p]]^2$ avec $i \neq j$, $u_i \perp u_j$.
- La famille est dite une famille orthonormée (ou orthonormale) si c'est une famille orthogonale et normée.



- a) Montrer que ceci définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[x]$.
 - b) Vérifier que la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est orthogonale pour ce produit scalaire. En déduire une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.
- 2. Généralisation.

Pour P et Q dans $\mathbb{R}_n[x]$ on considère maintenant $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$.

- a) Vérifier que ceci définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
- **b**) Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[x]$ pour ce produit scalaire.

AB8



d'après ESCP 2001

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[x]$ tel que pour tout x réel :

- $T_n(\cos x) = \cos(nx)$. 1. Montrer que l'application : $(P,Q) \mapsto \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$
 - définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$. 2. Montrer que la famille $(T_n)_{n\geq 0}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[x]$ muni de ce produit
 - 3. Comment obtenir une base orthonormée?

AB9

Remarques. Autrement dit, la famille de vecteurs (u_1, \dots, u_p) est orthonormée si et seulement si

$$\forall (i,j) \in [[1,p]]^2, \qquad \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Le théorème de Pythagore se généralise, si $(u_1,...,u_p)$ est une famille orthogonale de vecteurs de E, alors

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2.$$

Exercice 56

Exercice 54

Exercice 55



♦ Que permettent de dire les lignes de code suivantes?

AB10

```
def n2(U):
    return (U[0]**2+U[1]**2+U[2]**2)
def orthogonal(U,V):
    if U[0]*V[0]+U[1]*V[1]+U[2]*V[2]==0:
       print('OUI!!')
    else :
        print('Non..')
def Test(U,V,W):
    return n2(U)+n2(V)+n2(W)==n2(U+V+W)
```

```
u=np.array([1,0,0])
v=np.array([-2,1,2])
w=np.array([1,1,1])
>>> Test(u,v,w)
True
>>> orthogonal(u,v)
>>> orthogonal(u,w)
Non..
>>> orthogonal(v,w)
Non..
```

Proposition 26 (orthogonalité implique liberté)

Soit \mathcal{F} une famille de vecteurs de E.

- Si ${\mathscr F}$ est orthogonale, et si aucun des vecteurs de ${\mathscr F}$ n'est le vecteur nul, alors ${\mathscr F}$ est libre.
- Si \mathscr{F} est orthonormée, alors \mathscr{F} est libre.

Remarque. Les réciproques sont fausses.

Orthogonalité et sous-espaces vectoriels

Définition 27 (sous-espaces orthogonaux)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont orthogonaux si

$$\forall u \in F, \forall v \in G, u \perp v.$$

Remarque. Soient $(e_i)_{i \in [1;p]}$ et $(\varepsilon_i)_{i \in [1;p]}$ deux familles respectivement de F et G. Si les familles sont génératrices, alors le sous espace vectoriel F est orthogonal à G si

$$\forall i \in [[1, n]], \quad \forall j \in [[1, p]], \quad e_i \perp \varepsilon_j.$$

Exercice 57



 \Rightarrow Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique, on pose u = (1, 2, 3) et

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$$
 et $G = Vect(u)$.

- 1. Donner une famille génératrice de F.
- 2. Vérifier que F et G sont orthogonaux.

AB12

Exercice 58



- \bigstar \cong Exemple dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- **1.** Montrer que l'application φ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ par $\varphi(A,B) = \text{Tr}(A^tB)$ est un produit sca-
- **2.** Notons $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$), l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques). Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

AB13

Définition-proposition 28 (le s.e.v orthogonal)

Soit F une partie de E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Posons

$$F^{\perp} = \{ x \in E \mid \forall y \in F, \quad x \perp y \}.$$

Alors:

- L'ensemble F^{\perp} est un sous-espace vectoriel de E.
- Les sous-espaces F et F^{\perp} sont orthogonaux.

Le sous-espace vectoriel F^{\perp} s'appelle **l'orthogonal** de F dans E.

Exemples. On a $E^{\perp} = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^{\perp} = E$.



- ♦ Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Prouver les énoncés suivants.

- 3. $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

F ⊂ (F[⊥])[⊥].
 F[⊥] + G[⊥] ⊂ (F ∩ G)[⊥].

4. $F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F+G)^{\perp}$.

AB14

2.1 Définitions et exemples

Définition 29 (espaces euclidiens)

Un **espace euclidien** est la donnée :

- d'un espace vectoriel E de dimension finie,
- → d'un produit scalaire sur E.

On note $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

2.2 Bases orthonormées

Définitions, exemples et coordonnées

Comme son nom l'indique une famille $\mathcal{B}=(e_i)_{i\in[[1;n]]}$ est une **base orthonormée** (abrégé en b.o.n) si c'est à la fois :

• une base:

$$\forall u \in E$$
, $\exists !(\lambda_i)_{i \in [[1;n]]}$, $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$.

• une famille orthonormée:

$$\forall i, j \in [[1; n]], \qquad \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Exemples.

- Les bases canoniques de \mathbb{R}^n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont des b.o.n pour les produits scalaires canoniques.
- On définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ en posant, pour tous P et Q dans $\mathbb{R}_2[x]$

$$\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

On vérifie que si l'on pose $L_0(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$, $L_1(x) = -x(x-2)$ et $L_2(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$, alors la famille (L_0, L_1, L_2) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[x]$ pour le produit scalaire précédent.

Exercice 60



 \Leftrightarrow Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et $\theta \in \mathbb{R}$. Justifier que la famille $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ définie par

$$\varepsilon_1 = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$$
, $\varepsilon_2 = \sin(\theta)e_1 - \cos(\theta)e_2$ et $\varepsilon_3 = e_3$

reste une base orthonormée pour le produit scalaire canonique. Donner une interprétation graphique.

AB15

Théorème 30 (coordonnées dans une b.o.n)

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, une base orthonormée. Pour tout vecteur $u \in E$,

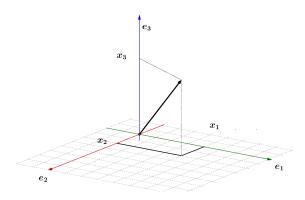
$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle e_i.$$

Autrement dit, les coordonnées de u dans la base \mathcal{B} sont les réels $\langle u, e_1 \rangle, \ldots, \langle u, e_n \rangle$.

Proposition 31 (norme et b.o.n)

Soit (e_1, e_2, \dots, e_n) , une base orthonormée d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Pour tous $u, v \in E$,

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle \langle v, e_i \rangle$$
 et $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle^2$.



Théorèmes d'existence d'une b.o.n et procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Soit $\mathscr{C} = (f_1, ..., f_n)$, une base quelconque d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Prouvons qu'il existe une famille $\mathscr{B} = (f_1, ..., f_n)$ (e_1, \ldots, e_n) telle que :

B est une base orthonormée.

 $\text{vect}(e_1, e_2, ..., e_k) = \text{vect}(f_1, f_2, ..., f_k).$ Pour tout $k \in [[1, n]]$,

La preuve s'effectue par récurrence et donne un procédé de construction de la base \mathcal{B} à partir de la base \mathcal{C} .

Exercice 61

- **♦♦ Q** Exemples 1. On considère \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique. Orthonormaliser la base ((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)).
- **2.** Orthonormaliser la base $(1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$ muni du produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt.$$

AB16

Corollaire 32 (existence d'une base orthonormée)

Tout espace euclidien admet une base orthonormée.

Corollaire 33 (base orthonormée incomplète)

Toute famille orthonormée d'une espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ peut être complétée en une base orthonormée

Autrement dit, si $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est une famille orthonormée de E de dimension n, il existe des vecteurs $e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n$ tels que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base orthonormée de E.

Bases orthonormées et matrices

Proposition 34 (expression du produit scalaire avec les matrices colonnes)

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, un espace euclidien, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $u, v \in E$.

Si on note
$$\longrightarrow$$
 U = Mat_{\mathscr{B}}(u).
 \longrightarrow V = Mat $\mathcal{B}(v)$.

Alors

$$\langle u, v \rangle = {}^t \mathbf{U} \mathbf{V}$$
 et $||u||^2 = {}^t \mathbf{U} \mathbf{U}$.



Attention. Rappelons que ces énoncés ne sont valables que dans le cadre d'une base orthonormée.

Définition 35 (matrice orthogonale)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que M est une **matrice orthogonale** si M est inversible et $M^{-1} = {}^{t}M$.

Remarque. D'après les résultats sur les matrices, M est orthogonale si et seulement si ${}^{t}MM = I_{n}$ ou $M{}^{t}M = I_{n}$.

- Structure de l'ensemble \mathcal{O}_n des matrices orthogonales de taille (n, n)
 - Présence d'un élément neutre :
 - $\forall P \in \mathcal{O}_n$, $P^{-1} \in \mathcal{O}_n$. Stabilité par passage à l'inverse :
 - $\forall P, Q \in \mathcal{O}_n, \quad PQ \in \mathcal{O}_n.$ Stabilité par produit :

Exercice 62

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes



- 1. Justifier les trois points de la remarque précédente.
- ♦ 2. Que dire d'une matrice diagonale et orthogonale?
- ♦♦ 3. Montrer que si $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est orthogonale avec det(P) > 0 alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

AB17

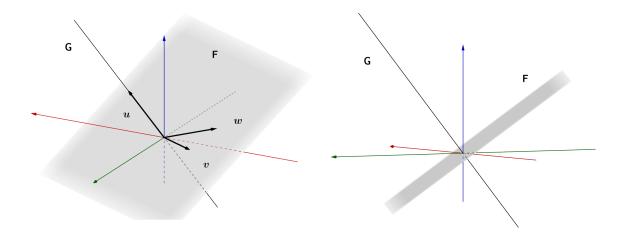
Proposition 36 (matrice de passage orthogonale)

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit \mathscr{C} une autre base de E. On a équivalence entre les énoncés :

- La base $\mathscr C$ est orthonormée.
- ii) La matrice de passage $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ est une matrice orthogonale.

2.3 Le supplémentaire orthogonal

Tout s.e.v d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ admet un supplémentaire orthogonal.



Proposition 37 (propriétés)

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

- F et F[⊥] sont supplémentaires dans E.
- $\dim(F^{\perp}) = \dim(E) \dim(F)$.



Attention. Il n'y a pas unicité du supplémentaire, mais unicité du supplémentaire orthogonal.

Exercice 63



Les questions sont indépendantes Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

- 1. Montrer que $(F^{\perp})^{\perp} = F$.
- 2. Montrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$ puis $F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$.

AB18

Exercice 64



♦ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_{2n}[x]$. Considérons F et G les sous-espaces vectoriels de E constitués des polynômes pairs (resp. impairs). Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires orthogonaux de E pour le produit scalaire

$$\forall P, Q \in E, \qquad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t) dt.$$

AB19



Exercices



Exercice 65. ♦ Vrai ou faux?

AB21

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. F et G sont supplémentaires si et seulement si F^{\perp} et G^{\perp} le sont

Exercice 66.
$$\diamondsuit$$
 Montrer que pour tous réels $x_1, x_2, ..., x_n$, on a $\sum_{i=1}^n x_i \le \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Préciser le cas d'égalité. #AB22

Exercice 67. Inégalité de Bessel

AB23

Soit \mathscr{F} , une famille orthonormée d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Montrer que pour tout vecteur $u \in E$:

$$\sum_{e \in \mathcal{F}} \langle u, e \rangle^2 \le \|u\|^2.$$

Exercice 68. ◆ #AB24

1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis vérifier que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \operatorname{Tr}(A^2) \leq \operatorname{Tr}(^t A A).$$

2. Montrer également que $Tr(A^2) = Tr(^tAA)$ si et seulement si A est une matrice symétrique.

Exercice 69. \blacklozenge Base orthonormée d'un hyperplan de \mathbb{R}^4

AB20

On considère l'espace euclidien \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire canonique et F l'hyperplan d'équation x+2y-z-2t=0 dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .

- 1. Déterminer une base de F^{\perp} .
- 2. Construire une base orthonormée de F.
- 3. Tester et expliquer le code suivant qui permet de vérifier votre résultat.

```
# A est une matrice (4,3) dont chaque colonne représente un vecteur de la famille
def test(A):
    for i in range(3):
        if A[0,i]+2*A[1,i]-A[2,i]-2*A[3,i]!=0:
            return print('NON, BOUHHHHH')

for i in range(3):
        for j in range(i):
            s=0
            for k in range(4):
            s+=A[k,i]*A[k,j]
            if s!=0:
                 return print('NAAAAN !!')
    return print('Bravo !')
```

Exercice 70. \blacklozenge Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$. On définit ensuite l'application sur #AB25 E par

$$\forall x \in E$$
, $\varphi(x) = \langle x, u \rangle u$.

- 1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E. Préciser $\text{Ker}(\phi)$ et $\text{Im}(\phi)$.
- 2. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ . L'endomorphisme φ est-il diagonalisable?
- 3. À quelle condition sur u, φ est un projecteur de E?

Exercice 71. Probabilité de collision

AB26

Soient X et Y deux variables aléatoires finies indépendantes et de même loi. Notons

$$\mathsf{X}(\Omega) = \mathsf{Y}(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \quad \text{et} \quad \forall \, i \in [[1, n]] \quad \mathbf{P}(\mathsf{X} = x_i) = p_i.$$

- 1. Démontrer que $P(X = Y) = \sum_{k=1}^{n} p_k^2$.
- **2.** En déduire que $P(X = Y) \ge \frac{1}{n}$. Préciser le cas d'égalité.

Exercice 72. 💠 🔊 Vecteur normal à un hyperplan

Soit F un hyperplan d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

- **1.** Montrer qu'il existe $u_0 \in E$ tel que pour tout $v \in E$: $v \in F \iff \langle u_0, v \rangle = 0$. On dit alors que u_0 est un vecteur *normal* à F.
- 2. Exemples
 - a) On considère $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et le plan de \mathbb{R}^3 : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y z = 0\}$. Déterminer un vecteur normal à F.
 - **b)** Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$ et le produit scalaire défini par $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t) dt$. Déterminer un vecteur normal à $\mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 73. 💠 🗣 🖎 Condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité

AB28

AB27

Soient u et v deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Établir l'équivalence entre les énoncés suivants :

- i) Les vecteurs u et v sont orthogonaux.
- ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda u + v\| \ge \|v\|$.

Exercice 74. \spadesuit Soient $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in [[1;n]]}$ la base canonique de \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique et $A = (a_{ij})_{i,j \in [[1;n]]}$ une #AB29 matrice orthogonale. On désigne par c_j , le vecteur de \mathbb{R}^n dont la matrice colonne dans la base canonique est la j-ème colonne de A.

- 1. Montrer que $\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right| \le \left\|\sum_{i=1}^{n}e_{i}\right\| \cdot \left\|\sum_{j=1}^{n}c_{j}\right\|$.
- **2.** \triangleleft En déduire l'inégalité $\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right| \leq n$.

Exercice 75. *** Frames

AB30

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une famille de vecteurs de norme 1 de E.

1. \checkmark Justifier que \mathscr{B} est une base de E si on suppose que

$$\forall u \in \mathbb{E}, \qquad ||u||^2 = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle^2.$$

2. On suppose maintenant qu'il existe deux réels strictement positifs A et B tels que

$$\forall u \in E$$
, $A \|u\|^2 \le \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle^2 \le B \|u\|^2$ (\star)

- a) Justifier que ${\mathcal B}$ reste une famille génératrice.
- **b)** En considérant sur $E = \mathbb{R}^2$ la famille (e_1, e_2, e_3) définie par $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = \frac{1}{2}(-1, \sqrt{3})$ et $e_3 = \frac{1}{2}(-1, -\sqrt{3})$, montrer qu'une famille peut vérifier (\star) sans être libre.

La théorie des frames permet d'étudier la stabilité et la redondance des représentations linéaires discrètes d'un signal. On la retrouve notamment dans la théorie des ondelettes, particulièrement utile en analyse d'images.

Exercice 76. $\spadesuit \spadesuit$ On considère un espace euclidien E ainsi qu'une famille $\mathscr{F} = (e_1, \dots, e_p)$ de vecteurs de E. Montrer que si la #AB31 famille \mathscr{F} est génératrice de E, alors l'endomorphisme

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathsf{E} & \to & \mathsf{E} \\ u & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{p} \langle u, e_i \rangle e_i \end{array} \right. \quad \text{est bijectif.}$$

Indication. On pourra, pour un vecteur u bien choisi, considérer $\langle u, \varphi(u) \rangle$.

Exercice 77. *** Dual d'un espace euclidien

AB35

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, un espace euclidien. On note E^* , l'espace vectoriel des formes linéaires sur E. Pour tout $u \in E$, on définit les applications Φ_u par :

$$\Phi_u: \left\{ \begin{array}{ccc} \mathsf{E} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle u, x \rangle . \end{array} \right.$$

1. Vérifier que pour tout $u \in E$, $\Phi_u \in E^*$.

On pose alors l'application $\Phi : E \to E^*$ définie par $\Phi(u) = \Phi_u$.

- **2.** a) Vérifier que Φ est une application linéaire de E dans E*.
 - b) \triangleleft Montrer que Φ est injective.
 - c) \triangleleft En déduire que pour tout $f \in E^*$, il existe $u \in E$ tel que $f = \Phi_u$.
- Application
- **3.** Justifier que si f est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} alors il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad f(M) = \text{Tr}(AM).$$

4. \P Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier qu'il existe un unique polynôme P_n de $\mathbb{R}_n[x]$ tel que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[x], \qquad \int_0^1 P_n(t)Q(t) dt = Q(0).$$

- **5.** a) Justifier qu'il n'existe pas de polynôme P de $\mathbb{R}[x]$ tel que : $\forall Q \in \mathbb{R}[x]$, $\int_0^1 P(t)Q(t) dt = Q(0)$. *On pourra utiliser le polynôme défini par* Q(x) = xP(x).
 - b) Est-ce en contradiction avec la question 3?

Endomorphisme conservant la norme, les angles ...

Exercice 78. \leftrightarrow Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E.

AB36

- 1. On dit que f est une isométrie si pour tout $x \in E$, ||f(x)|| = ||x||.
 - a) Montrer que si f est une isométrie alors f est un isomorphisme de E.
 - b) Établir l'équivalence entre les énoncés :
 - \mathbf{i}) f est une isométrie;
 - **ii**) Pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

Dans la suite, on s'intéresse aux trois conditions :

- I) L'endomorphisme f est une isométrie.
- II) $f \circ f = -id_E$.
- III) Pour tout $x \in E$, f(x) est orthogonal à x.

On souhaite montrer que si deux des conditions sont vérifiées alors la troisième l'est aussi.

- 2. Justifier que si les conditions I) et II) sont vraies alors III) aussi.
- 3. On suppose maintenant I) et III).
 - a) Calculer $\langle f(x) + x, f^2(x) + f(x) \rangle$, en déduire $\langle x, f^2(x) \rangle = -\|x\|^2$.
 - **b)** Expliciter $||f^2(x) + x||^2$, puis montrer II).
- 4. Conclure en montrant la dernière implication.

Exercice 79. 🔷 🖎 Endomorphisme qui conserve l'orthogonalité

d'après HEC 2007. # AB37

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit f un endomorphisme de E qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall (u, v) \in E^2$$
, $\langle u, v \rangle = 0 \implies \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = 0$.

- 1. Vérifier que si u et v sont deux vecteurs de même norme, alors (u-v) et (u+v) sont orthogonaux.
- **2.** Démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $u \in \mathbb{E}$, $\|\varphi(u)\| = k\|u\|$.

Produits scalaires sur $\mathbb{R}_n[x]$ et familles de polynômes orthogonaux

Exercice 80. \spadesuit À quelles conditions sur les réels α , β et γ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[x]^2$ par

AB38

$$\phi(P,Q) = \alpha P(-1)Q(-1) + \beta P(0)Q(0) + \gamma P(1)Q(-1)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[x]$?

Exercice 81. \blacklozenge Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a_1, a_2, \dots, a_n , n réels deux à deux distincts. Pour tout $i \in [[1; n]]$, on pose

AB39

$$\mathbf{L}_i(x) = \prod_{\substack{k \in [[1;n]] \\ k \neq i}} \frac{x - a_k}{a_i - a_k} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_i(x) = \left(x - a_i\right) \mathbf{L}_i(x)^2.$$

1. Justifier que l'application φ définie par

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]^2$$
, $\varphi(P,Q) = \sum_{k=1}^n P(a_k) Q(a_k)$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ et $(L_i)_{i\in[[1;n]]}$ est une base orthonormée.

2. Justifier que l'application ψ définie par : $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]^2$

$$\psi(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(x_k) \mathbf{Q}(x_k) + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}'(x_k) \mathbf{Q}'(x_k)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{2n-1}[x]$ et $(P_i)_{i \in [[1:n]]}$ est une famille orthonormée.

Exercice 82. $\diamond \diamond$ Variantes de produits scalaires sur $\mathbb{R}_n[x]$

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tous les polynômes P et Q appartenant à $E = \mathbb{R}_n[x]$, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(\alpha) \cdot Q^{(i)}(\alpha).$$

Montrer que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.

On pourra penser à la formule de Taylor pour les polynômes.

2. Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels 2 à 2 distincts. Pour tous les polynômes P et Q appartenant à $E = \mathbb{R}_n[x]$, on pose

$$\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}^{(i)} (\alpha_i) \cdot \mathbf{Q}^{(i)} (\alpha_i).$$

Montrer que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.

Exercice 83. ** Un classique : les polynômes de Tchebychev

On définit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de polynômes par la récurrence

$$T_0 = 1$$
, $T_1(x) = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$.

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}$, justifier que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2\cos((n+1)\theta)\cos(\theta).$$

b) Montrer que pour tout réel θ , tout entier naturel n,

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta)) \qquad (\bullet$$

- c) Vérifier que T_n est l'unique polynôme vérifiant les relations (•). Préciser le degré de T_n .
- **2.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[x]^2$ par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

- a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire bien défini sur $\mathbb{R}_n[x]$.
- b) Vérifier que la famille $(T_k)_{0 \le k \le n}$ est une base orthogonale pour ce produit scalaire.
- c) Déterminer $\|T_k\|$ pour tout entier $k \in [[0, n]]$.

Algèbre bilinéaire et réduction

Exercice 84. Matrice de Householder

Soit u un vecteur unitaire de \mathbb{R}^n et U sa matrice colonne dans la base canonique. On pose

$$H = I_n - 2U^tU$$
,

- 1. Simplifier HU et HV où V est la matrice colonne d'un vecteur v orthogonal à u. Que peut-on en déduire sur H?
- 2. Vérifier que H est symétrique, orthogonale et diagonalisable.

Exercice 85. \Leftrightarrow Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien avec dim $E \ge 2$. Pour tout vecteur u non nul et pour tous les réels $(\lambda, \mu) \ne \#AB57$ (0,0), on définit l'endomorphisme f de E par

$$f(x) = \lambda x + \mu \langle x, u \rangle u.$$

- 1. \bigcirc Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. Est-ce que f est diagonalisable?
- **2.** a) On dit qu'un endomorphisme g est une isométrie si pour tout $x \in E$, ||g(x)|| = ||x||. Justifier que $Sp(g) \subset \{-1; 1\}$.
 - b) À quelles conditions sur λ et μ , l'application f est une isométrie?

Exercice 86. ♦♦

d'après EMLyon # AB58

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}_n[x]$ et on considère l'application φ de E^2 dans \mathbb{R} définie par :

$$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt.$$

- 1. Montrer que ϕ est bien définie puis montrer que c'est un produit scalaire sur E. On pose $\|P\| = \sqrt{\phi(P,P)}$.
- 2. Soit T le polynôme défini par T(X) = $1 + \frac{X^n}{n!}$. Calculer $\|T\|$. On pose I = $\frac{T}{\|T\|}$
- 3. On définit l'application ψ qui à tout polynôme P de E associe $2\phi(P,I)I-P$.

AB40

AB41

AB42

- a) Montrer que θ est un automorphisme de E et déterminer ψ^{-1} .
- **b)** Montrer que pour tout P de E : $\|\psi(P)\| = \|P\|$.
- c) Quelles sont les valeurs propres possibles de ψ ?
- **d**) L'endomorphisme ψ est-il diagonalisable?

Exercice 87. *** Matrices de Gram et valeurs propres

AB59

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n et (u_1, u_2, \dots, u_n) une famille de vecteurs de E. On pose

$$G = (\langle u_i, u_j \rangle)_{1 \le i, j \le n}$$
 et $M = Mat_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n),$

où ${\mathcal B}$ est une base orthonormée de E.

- 1. Vérifier que $G = {}^{t}MM$.
- **2.** En déduire que $\ker(G) = \ker(M)$, puis $\operatorname{rg}(G) = \operatorname{rg}(u_1, u_2, \dots, u_n)$. *Indication. Considérer* tXGX *pour* $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- **3.** Vérifier que G est inversible si et seulement si la famille (u_1, u_2, \dots, u_n) est une base de E.
- 4. Justifier que les valeurs propres de G sont positives ou nulles.
- 5. Justifier que les valeurs propres sont majorées par $\sum\limits_{i=1}^{n}\left\|u_{i}\right\|^{2}$.

Compléments en dimension infinie

Exercice 88. *** Orthogonal d'un hyperplan

AB61

On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $: \forall (f,g) \in E^2$, $\langle f,g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$

Considérons le sous-ensemble A de E, constitué des applications qui s'annulent en 0 et le sous-ensemble B de E, constitué des applications dont l'intégrale sur [0, 1] est nulle. A et B sont les noyaux de formes linéaires non nulle

$$f \in E \mapsto f(0) \in \mathbb{R}$$
 et $f \in E \mapsto \int_0^1 f(t) dt \in \mathbb{R}$.

Ce sont donc des hyperplans de E. Déterminer A^{\perp} et B^{\perp} .

Exercice 89. ** Un sujet de concours

ABp2

On note E l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur \mathbb{R}^+ et à valeurs dans \mathbb{R} et E_2 l'ensemble des fonctions f de E telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (f(x))^2 dx$ converge. Pour toute fonction f de E, on note $\Phi(f)$ la fonction définie dans cette partie sur \mathbb{R}^+ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \Phi(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt & \text{si } x > 0 \\ \frac{f(0)}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On admet que $\Phi(f)$ est continue sur \mathbb{R}^+ .

- 1. **a)** Justifier: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| \le \frac{1}{2} (x^2 + y^2).$
 - **b**) En déduire que, pour toutes fonctions f et g de E_2 , l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx$ est absolument convergente.
 - c) Montrer alors que E2 est un sous-espace vectoriel de E.
- **2.** On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $E_2 \times E_2$ dans $\mathbb R$ définie par :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{E}_2 \times \mathcal{E}_2, \quad \langle f,g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)dx.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E_2 . On munit E_2 de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\| \cdot \|$.

3. Soit f une fonction de E_2 .

On note pour tout $x de \mathbb{R}^+$: $h(x) = \int_0^x t f(t) dt$.

- a) Calculer les limites de $x \mapsto \frac{(h(x))^2}{x^4}$ et de $x \mapsto \frac{(h(x))^2}{x^3}$ en 0.
- b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall X \in \mathbb{R}_{*}^{+}, \quad \int_{0}^{X} \frac{\left(h(x)\right)^{2}}{x^{4}} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{3} \frac{\left(h(X)\right)^{2}}{X^{3}} + \frac{2}{3} \int_{0}^{X} f(x) \Phi(f)(x) \mathrm{d}x \qquad (\bullet)$$

c) Soit $X \in \mathbb{R}^+_*$. En étudiant le signe de la fonction polynomiale $\lambda \in \mathbb{R} \to \int_0^X \left(\lambda f(x) + \Phi(f)(x)\right)^2 dx$, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante :

$$\int_0^X f(x) \Phi(f)(x) dx \le \left(\int_0^X \left(f(x) \right)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^X \left(\Phi(f)(x) \right)^2 dx \right)^{1/2}.$$

d) En déduire :

$$\forall X \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \left(\int_0^X (\Phi(f)(x))^2 \; \mathrm{d}x \right)^{1/2} \leq \frac{2}{3} \left(\int_0^X \left(f(x) \right)^2 \; \mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

- e) Montrer alors que la fonction $\Phi(f)$ appartient à \mathbf{E}_2 et que l'on a : $\|\Phi(f)\| \le \frac{2}{3} \|f\|$.
- f) En utilisant la relation (•), justifier que la limite de $X \mapsto X(\Phi(f)(X))^2$ en $+\infty$ est finie, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.
- g) En déduire :

$$\|\Phi(f)\|^2 = \frac{2}{3} \langle \Phi(f), f \rangle.$$

			Révi	isé?
•	Fon	ctions de plusieurs variables		
		Graphe et lignes de niveau d'une fonction de plusieurs variables.		
		Définition d'un extremum (local/global).		
		Définition de la continuité d'une fonction de plusieurs variables.		
		Somme, produit, quotient, composition et continuité.		
	_	Savoir rédiger une preuve de la continuité d'une fonction de plusieurs variables.		\checkmark
•	Diaş	gonalisation		
	_	Définitions d'un vecteur propre pour une matrice, un endomorphisme.		
	_	$\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ ssi $A - \lambda I_n$ non inversible ssi $\ker(A - \lambda I_n)$ ssi $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) < n$.		
	_	Définition d'un espace propre. Les espaces propres associés à des valeurs propres différentes sont en somme directe.		
		Lien entre polynôme annulateur et spectre.		
		Cas particulier : spectre d'une matrice de taille 2.		
	_	Cas particulier : spectre d'une matrice triangulaire.		
	_	Définition d'une matrice, d'un endomorphisme diagonalisable.		
	_	Un endomorphisme est diagonalisable ssi $\sum_{\lambda \in Sp(\phi)} \dim E_{\lambda}(\phi) = \dim(E)$.		
	_	Cas particulier d'un endomorphisme avec dim E valeurs propres.		
	_	Savoir calculer le spectre par un calcul du rang par pivot de Gauss.		
	_	Savoir calculer une base de vecteurs propres de $E_{\lambda}(A)$ par un pivot de Gauss.		
	_	Savoir diagonaliser la matrice Atilla $J = (1)_{i,j}$.		
	_	Spectre, vecteurs propres et diagonalisabilité des projecteurs.		
•	Algè	ebre bilinéaire		
	_	Définition d'un produit scalaire, de la norme.		
		Savoir montrer que $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \to \operatorname{Tr}({}^tAB), (f, g) \in \mathcal{C}^0([a; b])^2 \to \int_a^b f(t)g(t) dt,$ $(P, Q) \in \mathbb{R}[x]^2 \to \int_0^1 P(t)Q(t) dt, (P, Q) \in \mathbb{R}_n[x]^2 \to \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i)$ sont des produits scalaires.		\checkmark
	_	Propriétés de la norme, inégalité triangulaire.		
		Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.		
		Théorème de Pythagore. Preuve.		
		Vecteurs orthogonaux. Espaces orthogonaux. Famille orthogonale. Lien avec la liberté.		
		Définition du sous-espace orthogonal à sous-espace vectoriel.		
	_	Espace euclidiens. Exemples.		
	_	Définition d'une base orthonormée. Expression des coordonnées d'un vecteur dans un b.o.n.		
	_	Expression du produit scalaire et de la norme sous la forme $\langle u, v \rangle = {}^t UV$ et $ u ^2 = {}^t UU$.		
	_	Définition d'une matrice orthogonale.		
	_	Lien entre le changement de bases orthonormées et matrices orthogonales.		
	_	Lien entre $\dim F^{\perp}$ et $\dim F$ où F est un sev.		