Nom :

Mathématiques approfondies
Cours ECG 2

Partie V

Chapitres

10. Algèbre bilinéaire
11. Introduction au calcul différentiel
12. Vecteurs aléatoires

Lycée Saint Louis 2024/2025

CHAPITRE 10

Algèbre bilinéaire

Ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω

Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre.

Inscription que Platon aurait fait graver à l'entrée de l'Académie, son école d'Athènes.

1 Produits scalaires

1.1 Définitions et exemples

Définition 1 (forme bilinéaire)

Soient E un espace vectoriel et $\varphi : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ une application.
On dit que φ est une **forme bilinéaire** si elle est

- linéaire à droite
$$\forall\, u,\, v,\, w \in \mathrm{E}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(u\,,\, \lambda v + \mu w) = \lambda\varphi(u, v) + \mu\varphi(u, w).$$
- linéaire à gauche
$$\forall\, u,\, v,\, w \in \mathrm{E}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(\lambda v + \mu w\,,\, u) = \lambda\varphi(v, u) + \mu\varphi(w, u).$$

Définition 2 (produit scalaire)

Soit $\varphi : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ une application. On dit que φ est un **produit scalaire** si :

- φ est une forme bilinéaire.
- φ est symétrique : $\quad \forall\, u,\, v \in \mathrm{E}, \qquad \varphi(u, v) = \varphi(v, u).$
- φ est positive : $\quad \forall\, u \in \mathrm{E}, \qquad \varphi(u, u) \geqslant 0.$
- φ est définie : $\quad \forall\, u \in \mathrm{E}, \qquad \varphi(u, u) = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0_{\mathrm{E}}.$

Exemples.

• *Dans* $\mathbb{R}^n$.
Pour tous $u = (x_1, \ldots, x_n)$ et $v = \left(y_1, \ldots, y_n\right)$ dans $\mathbb{R}^n$, posons $\langle u, v\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.
Alors $\langle .\,, .\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, appelé **produit scalaire canonique sur** $\mathbb{R}^n$.

• *Dans* $\mathbb{R}_n[x]$.
Donnons deux exemples dans le cas polynomial.

→ Soient a_0, $a_1, \dots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts. L'application suivante est un produit scalaire

$$(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(a_k)\mathrm{Q}(a_k).$$

→ On peut aussi poser pour a, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$

$$(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \int_a^b \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t.$$

- *Dans* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

L'application $\varphi : (\mathrm{X},\mathrm{Y}) \mapsto {}^t\mathrm{X}\mathrm{Y}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On l'appelle produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Noter, comme souvent, qu'on identifie $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$.

- *Dans* $\mathcal{M}_n[\mathbb{R}]$.

Pour A, B $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\qquad \langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}^t\mathrm{B}\right).$

- *Dans* $\mathcal{C}^0([a;b])$ avec $a < b$.

Pour f, $g \in \mathcal{C}^0([a;b])$ $\qquad \langle f,g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$

Définition 3 (norme)

Soit E, un espace vectoriel muni d'un produit scalaire φ. L'application

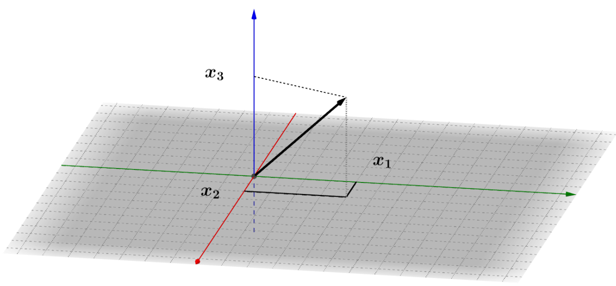
$$\mathrm{N} : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathrm{E} & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \mathrm{N}(u) = \sqrt{\varphi(u,u)} \end{array} \right.$$

est appelée **norme associée au produit scalaire** φ.

Remarque. Dans $\mathbb{R}^n$, la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique est définie par :

$$\forall\, u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}.$$

Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, on constate que la norme représente la distance à l'origine, ou encore la longueur du vecteur. Par extension, pour u, $v \in$ E, $\|u\|$ représente la « longueur » du vecteur u alors que $\|u - v\|$ correspond à la « distance » entre les deux vecteurs.



1.2 Propriétés du produit scalaire, de la norme

Proposition 4 (règles de calcul)

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dont $\|\cdot\|$ est la norme associée.

- $\forall\, u \in \mathrm{E}$, $\qquad \|u\| = 0 \iff u = 0_{\mathrm{E}}$.
- $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\, u \in \mathrm{E}$, $\qquad \|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$.
- $\forall\, u$, $v \in \mathrm{E}$, $\qquad \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2$.

Exercice 1

✦ ✎ **Identité du parallélogramme et formule de polarisation**

Montrer que pour tous u, $v \in$ E,

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \quad \text{et} \quad \langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right).$$

Théorème 5 (inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dont $\|\cdot\|$ est la norme associée.

$$\forall\, u,\, v \in \mathrm{E}, \qquad |\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|.$$

De plus, on a égalité si et seulement si la famille (u, v) est liée.

Exercice 2

✦✦ ✎ **Preuve**

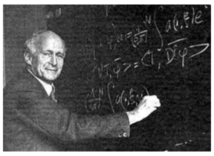
On suppose $u \neq 0_{\mathrm{E}}$ et on définit l'application P sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{P}(\lambda) = \|\lambda u + v\|^2$.

1. Vérifier que P est un polynôme de degré 2. Préciser son discriminant
2. Conclure (sans oublier le cas d'égalité).

Exercice 3

✧ **Qui est qui ?**

Parmi les photos ci-dessous, reconnaître Hermann Amandus Schwarz (mathématicien allemand), Laurent Schwar**tz** (mathématicien français, médaille Fields pour ses travaux sur la théorie des distributions) et augustin Cauchy (mathématicien français).

Exemple. En reprenant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz devient

$$\forall\,(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\,(y_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n, \qquad \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}.$$

"Le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz est méconnu et beaucoup des tentatives pour prouver l'inégalité et son cas d'égalité ne sont que paraphrases et esbroufe."

Rapport de Jury : HEC 2019

Exercice 4

✦ 1. Justifier que l'application suivante est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([a;b])$.

$$\forall\, f, g \in \mathscr{C}^0([a;b]), \qquad \varphi(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Expliciter l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire.
3. Montrer que si $f \in \mathscr{C}^0([0;1])$ avec f ne s'annulant pas sur $[0;1]$

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant 1.$$

Préciser le cas d'égalité.

Proposition 6 (inégalité triangulaire)

Pour tous $u,\, v \in \mathrm{E}$,

$$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|.$$

Exercice 5

✦✦ Soient E un espace euclidien et $\mathrm{B} = \{x \in \mathrm{E} \mid \|x\| \leqslant 1\}$.

1. Soient $u,\, v \in \mathrm{E}$.
   Que peut-on dire de u et v si on a le cas d'égalité $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$?
2. Démontrer que B est une partie strictement convexe de E, c'est-à-dire que, pour tous $x,\, y \in \mathrm{B}$ avec $x \neq y$, tout $t \in]0,1[$, on a $\|tx + (1-t)y\| < 1$.
3. Illustrer ce résultat dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire canonique.

Remarque. Par récurrence, on montre que pour tout famille finie $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ de vecteurs de E

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} u_i \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|.$$

1.3 Orthogonalité

Orthogonalité et vecteurs

Définition 7 (vecteurs orthogonaux)

Soient E, un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Deux vecteurs u et v de E sont dits **orthogonaux**, noté $u \perp v$, si $\langle u, v \rangle = 0$.

Remarque. Le seul vecteur de E qui soit orthogonal à tous les autres vecteurs de E est le vecteur nul. Autrement dit, pour tout $u \in \mathrm{E}$, on a l'équivalence :

$$\left(\forall\, v \in \mathrm{E}, \qquad \langle u, v \rangle = 0\right) \quad \Longleftrightarrow \quad u = 0_{\mathrm{E}}.$$

⚠ **Attention.** La notion d'orthogonalité est relative au produit scalaire.

Exercice 6

✦✦ ✎ **Deux produits scalaires sur** $\mathbb{R}_2[x]$
Pour tous P, Q $\in \mathbb{R}_2[x]$, on pose

$$\varphi_1(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \mathrm{P}(0)\mathrm{Q}(0) + \mathrm{P}(1)\mathrm{Q}(1) + \mathrm{P}(2)\mathrm{Q}(2) \quad \text{et} \quad \varphi_2(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Vérifier que φ_1 et φ_2 définissent deux produits scalaires sur $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Notons P_1 le polynôme d'expression $\mathrm{P}_1(x) = x$.
   Donner un vecteur orthogonal à P_1 relativement à φ_1 mais non orthogonal pour φ_2 et inversement.

Théorème 8 (de Pythagore)

Deux vecteurs u et v sont **orthogonaux** si et seulement si

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Définitions 9 (famille normée, orthogonale, orthonormée)

Soit $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.

- La famille est dite **normée** si pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, $\|u_i\| = 1$.
- La famille est dite **orthogonale** si, pour tout $(i, j) \in [\![1; p]\!]^2$ avec $i \neq j$, $u_i \perp u_j$.
- La famille est dite une famille **orthonormée** (ou orthonormale) si c'est une famille orthogonale et normée.

Exercice 7

✦✦ *d'après ESCP 2001*
On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $\mathrm{T}_n \in \mathbb{R}[x]$ tel que pour tout x réel : $\mathrm{T}_n(\cos x) = \cos(nx)$.

1. Montrer que $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.
2. Montrer que la famille $(\mathrm{T}_n)_{n \geqslant 0}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[x]$ muni de ce produit scalaire.
3. Comment obtenir une base orthonormée ?

Remarques. Autrement dit, la famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$ est orthonormée si et seulement si

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \qquad \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Le théorème de Pythagore se généralise, si $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille orthogonale de vecteurs de E, alors

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2 .$$

Proposition 10 (orthogonalité implique liberté)

Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.

- **Si** $\mathscr{F}$ est orthogonale, et si aucun des vecteurs de $\mathscr{F}$ n'est le vecteur nul, **alors** $\mathscr{F}$ est libre.
- **Si** $\mathscr{F}$ est orthonormée, **alors** $\mathscr{F}$ est libre.

Remarque. Les réciproques sont fausses.

Orthogonalité et sous-espaces vectoriels

Définition 11 (sous-espaces orthogonaux)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **orthogonaux** si

$$\forall\, u \in \mathrm{F}, \quad \forall\, v \in \mathrm{G}, \qquad u \perp v.$$

Remarque. Soient $(e_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ et $(\varepsilon_j)_{j \in [\![1;p]\!]}$ deux familles respectivement de F et G.
Si les familles sont génératrices, alors le sous espace vectoriel F est orthogonal à G si

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!], \quad \forall\, j \in [\![1,p]\!], \qquad e_i \perp \varepsilon_j.$$

Exercice 8

✧ Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on pose $u = (1,2,3)$ et

$$\mathrm{F} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0 \right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \mathrm{Vect}(u).$$

1. Donner une famille génératrice de F.
2. Vérifier que F et G sont orthogonaux.

Exercice 9

✦ ✎ *Exemple dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

1. Montrer que l'application φ définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ par $\varphi(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}^t\mathrm{B}\right)$ est un produit scalaire.
2. Notons $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$), l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques). Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

Définition-proposition 12 (le s.e.v orthogonal)

Soit F une partie de E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Posons

$$\mathrm{F}^{\perp} = \left\{ x \in \mathrm{E} \mid \forall\, y \in \mathrm{F}, \quad x \perp y \right\}.$$

Alors :

- L'ensemble $\mathrm{F}^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Les sous-espaces F et $\mathrm{F}^{\perp}$ sont orthogonaux.

Le sous-espace vectoriel $\mathrm{F}^{\perp}$ s'appelle **l'orthogonal** de F dans E.

Exemples. On a $E^{\perp} = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^{\perp} = E$.

Exercice 10

✦ Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Prouver les énoncés suivants.

1. $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.
2. $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$.
3. $(F \cup G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
4. $F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F + G)^{\perp}$.

2 Espaces euclidiens

2.1 Définitions et exemples

Définition 13 (espaces euclidiens)

Un **espace euclidien** est la donnée :

- d'un espace vectoriel E de dimension finie,
- d'un produit scalaire sur E.

On note $\left(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$.

2.2 Bases orthonormées

Définitions, exemples et coordonnées

Comme son nom l'indique une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est une **base orthonormée** (abrégé en b.o.n) si c'est à la fois :

- une base : $\forall\, u \in E, \quad \exists! (\lambda_i)_{i \in [\![1;n]\!]}, \quad u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i.$
- une famille orthonormée : $\forall\, i,\, j \in [\![1;n]\!], \quad \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

Exemples.

- Les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont des b.o.n pour les produits scalaires canoniques.
- On définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ en posant, pour tous P et Q dans $\mathbb{R}_2[x]$

$$\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

On vérifie que si l'on pose $L_0(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$, $L_1(x) = -x(x-2)$ et $L_2(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$, alors la famille (L_0, L_1, L_2) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[x]$ pour le produit scalaire précédent.

Exercice 11

✧ Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Justifier que la base $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ définie par

$$\varepsilon_1 = \cos(\theta) e_1 + \sin(\theta) e_2 \quad \varepsilon_2 = \sin(\theta) e_1 - \cos(\theta) e_2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 = e_3$$

reste une base orthonormée pour le produit scalaire canonique. Donner une interprétation graphique.

Exercice 12

✧ Pour tous P et Q dans $\mathbb{R}_2[x]$, on pose $\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$.

1. (a) Montrer que ceci définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[x]$.

   (b) Vérifier que la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est orthogonale pour ce produit scalaire. En déduire une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.

2. *Généralisation.*
   Pour P et Q dans $\mathbb{R}_n[x]$ on considère maintenant $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0) Q^{(k)}(0)$.

   (a) Vérifier que ceci définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

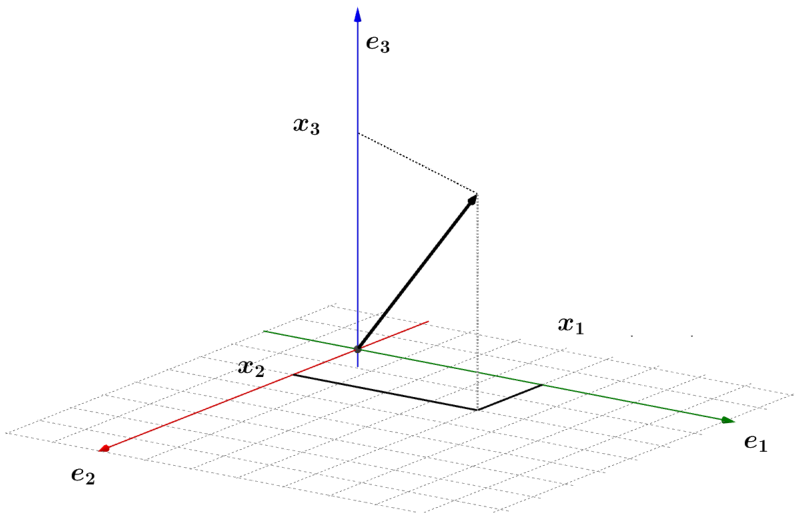
   (b) Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[x]$ pour ce produit scalaire.

Théorème 14 (coordonnées dans une b.o.n)

Soient $\big(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$, un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, une base orthonormée.
Pour tout vecteur $u \in \mathrm{E}$,

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i\rangle\, e_i.$$

Autrement dit, les coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$ sont les réels $\langle u, e_1\rangle, \dots, \langle u, e_n\rangle$.



Proposition 15 (norme et b.o.n)

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, une base orthonormée d'un espace euclidien $\big(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$. Pour tous $u, v \in \mathrm{E}$,

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i\rangle \langle v, e_i\rangle \quad \text{et} \quad \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i\rangle^2.$$

Théorèmes d'existence d'une b.o.n et procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Soit $\mathscr{C} = \big(f_1, \dots, f_n\big)$, une base quelconque d'un espace euclidien $\big(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$. Prouvons qu'il existe une famille $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que :

- **i)** $\mathscr{B}$ est une base orthonormée.
- **ii)** Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\quad \mathrm{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_k) = \mathrm{vect}\big(f_1, f_2, \dots, f_k\big)$.

La preuve s'effectue par récurrence et donne un procédé de construction de la base $\mathscr{B}$ à partir de la base $\mathscr{C}$.

Exercice 13

✦✦ **Exemples**

1. On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.
   Orthonormaliser les bases $\big((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)\big)$ et $\big((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\big)$.
2. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$ muni du produit scalaire

   $$\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Orthonormaliser les bases $\big(1, x, x^2\big)$ et $\big((x-1)^2, (x-1)(x+1), (x+1)^2\big)$.

Corollaire 16 (existence d'une base orthonormée)

Tout espace euclidien admet une base orthonormée.

Corollaire 17 (base orthonormée incomplète)

Toute famille orthonormée d'une espace euclidien $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ peut être complétée en une base orthonormée de E.
Autrement dit, si $\left(e_1, e_2, \ldots, e_p\right)$ est une famille orthonormée de E de dimension n, il existe des vecteurs $e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n$ tels que la famille $\left(e_1, e_2, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n\right)$ soit une base orthonormée de E.

Bases orthonormées et matrices

Proposition 18 (expression du produit scalaire avec les matrices colonnes)

Soient $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$, un espace euclidien, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et $u, v \in E$.

Si on note
- $\rightharpoonup$ $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.
- $\rightharpoonup$ $V = \mathrm{Mat}\mathscr{B}(v)$.

Alors $$\langle u, v\rangle = {}^t UV \quad \text{et} \quad \|u\|^2 = {}^t UU.$$

⚠ **Attention.** Rappelons que ces énoncés ne sont valables que dans le cadre d'une base orthonormée.

Définition 19 (matrice orthogonale)

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que M est une **matrice orthogonale** si M est inversible et $M^{-1} = {}^t M$.

Remarque. D'après les résultats sur les matrices, M est orthogonale si et seulement si ${}^t MM = I_n$ ou $M\,{}^t M = I_n$.

- **Structure de l'ensemble $\mathscr{O}_n$ des matrices orthogonales de taille** (n, n)
  - $\rightharpoonup$ Présence d'un élément neutre : $I_n \in \mathscr{O}_n$.
  - $\rightharpoonup$ Stabilité par passage à l'inverse : $\forall P \in \mathscr{O}_n, \quad P^{-1} \in \mathscr{O}_n$.
  - $\rightharpoonup$ Stabilité par produit : $\forall P, Q \in \mathscr{O}_n, \quad PQ \in \mathscr{O}_n$.

Exercice 14

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes

✧ 1. Justifier les trois points de la remarque précédente.
✧ 2. Que dire d'une matrice diagonale et orthogonale ?
✦✦ 3. Montrer que si $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est orthogonale avec $\det(P) > 0$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que
$$P = R_\theta.$$

Proposition 20 (matrice de passage orthogonale)

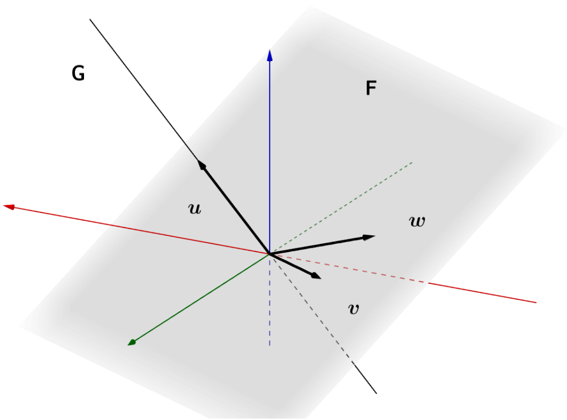
Soient $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soit $\mathscr{C}$ une autre base de E. On a équivalence entre les énoncés :

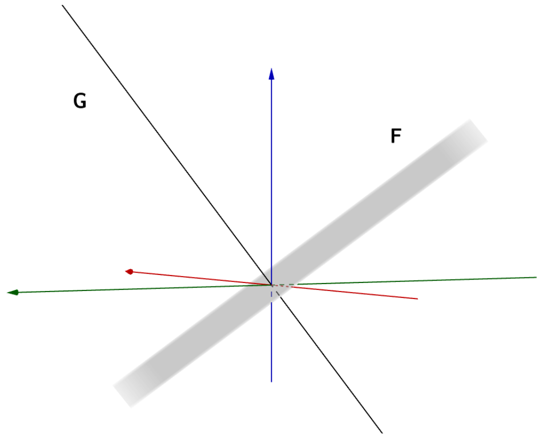
i) La base $\mathscr{C}$ est orthonormée.

ii) La matrice de passage $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ est une matrice orthogonale.

2.3 Le supplémentaire orthogonal

Tout s.e.v d'un espace euclidien $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ admet un supplémentaire orthogonal.





Proposition 21 (propriétés)

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien $\left(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$.
- F et $\mathrm{F}^{\perp}$ sont supplémentaires dans E.
- $\dim\left(\mathrm{F}^{\perp}\right) = \dim(\mathrm{E}) - \dim(\mathrm{F})$.

⚠ **Attention.** Il n'y a pas unicité du supplémentaire, mais unicité du supplémentaire orthogonal.

Exercice 15

✦ *Les questions sont indépendantes*

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien $\left(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$.

1. Montrer que $\left(\mathrm{F}^{\perp}\right)^{\perp} = \mathrm{F}$.
2. Montrer que $(\mathrm{F}+\mathrm{G})^{\perp} = \mathrm{F}^{\perp} \cap \mathrm{G}^{\perp}$ puis $\mathrm{F}^{\perp} + \mathrm{G}^{\perp} = (\mathrm{F} \cap \mathrm{G})^{\perp}$.

Exercice 16

✦ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{E} = \mathbb{R}_{2n}[x]$. Considérons F et G les s.e.v de E constitués des polynômes pairs (resp. impairs). Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires orthogonaux pour le produit scalaire

$$\forall\, \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{E}, \qquad \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercices

Exercice 17. ✦ **Vrai ou faux ?**
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. F et G sont supplémentaires si et seulement si $\mathrm{F}^{\perp}$ et $\mathrm{G}^{\perp}$ le sont.

Exercice 18. ✧ ✎ Montrer que pour tous réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a $\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$. Préciser le cas d'égalité.

Exercice 19. ✧ **Inégalité de Bessel**
Soit $\mathscr{F}$, une famille orthonormée d'un espace euclidien $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Montrer que pour tout vecteur $u \in \mathrm{E}$:

$$\sum_{e\in\mathscr{F}} \langle u, e\rangle^2 \leqslant \|u\|^2.$$

Exercice 20. ✦

1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis vérifier que

$$\forall \mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}^2\right) \leqslant \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{A}\mathrm{A}\right).$$

2. Montrer également que $\mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}^2\right) = \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{A}\mathrm{A}\right)$ si et seulement si A est une matrice symétrique.

Exercice 21. ✦✦ **Condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité**
Soient u et v deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Établir l'équivalence entre les énoncés suivants :

- **i)** Les vecteurs u et v sont orthogonaux.
- **ii)** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda u + v\| \geqslant \|v\|$.

Exercice 22. ✦✦✦ **Frames**
Soient $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de norme 1 de E.

1. On suppose que

$$\forall\, u \in \mathrm{E}, \qquad \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\langle u, e_i\right\rangle^2.$$

Justifier que $\mathscr{B}$ est une base de E.

2. On suppose maintenant qu'il existe deux réels strictement positifs A et B tels que

$$\forall\, u \in \mathrm{E}, \qquad \mathrm{A}\,\|u\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left\langle u, e_i\right\rangle^2 \leqslant \mathrm{B}\,\|u\|^2 \qquad (\star)$$

   - **a)** Justifier que $\mathscr{B}$ reste une famille génératrice.
   - **b)** En considérant sur $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ la famille (e_1, e_2, e_3) définie par

$$e_1 = (1,0), \quad e_2 = \frac{1}{2}(-1, \sqrt{3}) \quad \text{et} \quad e_3 = \frac{1}{2}(-1, -\sqrt{3}),$$

   montrer qu'une famille peut vérifier $(\star)$ sans être libre.

La théorie des frames permet d'étudier la stabilité et la redondance des représentations linéaires discrètes d'un signal. On la retrouve notamment dans la théorie des ondelettes, particulière utile en analyse d'images.

Exercice 23. ✦✦ On considère un espace euclidien E ainsi qu'une famille $\mathscr{F} = \left(e_1, \cdots, e_p\right)$ de vecteurs de E. Montrer que si la famille $\mathscr{F}$ est génératrice de E, alors l'endomorphisme

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ u & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p} \left\langle u, e_i\right\rangle e_i \end{array} \right. \qquad \text{est bijectif.}$$

Indication. On pourra, pour un vecteur u bien choisi, considérer $\left\langle u, \varphi(u)\right\rangle$.

Exercice 24. ✦ ✎ Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$. On définit ensuite l'application sur E par

$$\forall\, x \in \mathrm{E}, \qquad \varphi(x) = \langle x, u\rangle\, u.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E. Préciser $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.
2. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. À quelle condition sur u, φ est un projecteur de E ?

Exercice 25. ✦ **Probabilité de collision**
Soient X et Y deux variables aléatoires finies indépendantes et de même loi. Notons

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \quad \text{et} \quad \forall\, i \in [\![1, n]\!] \quad \mathbf{P}(X = x_i) = p_i.$$

1. Démontrer que $\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{n} {p_k}^2$.

2. En déduire que $\mathbf{P}(X = Y) \geqslant \frac{1}{n}$. Préciser le cas d'égalité.

Exercice 26. ✦✦✦ ✎ **Dual d'un espace euclidien**
Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$, un espace euclidien. On note E^*, l'espace vectoriel des formes linéaires sur E. Pour tout $u \in E$, on définit les applications Φ_u par :

$$\Phi_u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \langle u, x\rangle. \end{array} \right.$$

1. Vérifier que pour tout $u \in E$, $\Phi_u \in E^*$.
On pose alors l'application $\Phi : E \to E^*$ définie par $\Phi(u) = \Phi_u$.

2. **a)** Vérifier que Φ est une application linéaire de E dans E^*.
b) 🔍 Montrer que Φ est injective.
c) 🔍 En déduire que pour tout $f \in E^*$, il existe $u \in E$ tel que $f = \Phi_u$.

• *Application*

3. Justifier que si f est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ alors il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad f(M) = \mathrm{Tr}(AM).$$

4. 🔍 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier qu'il existe un unique polynôme P_n de $\mathbb{R}_n[x]$ tel que :

$$\forall\, Q \in \mathbb{R}_n[x], \qquad \int_0^1 P_n(t) Q(t)\, \mathrm{d}t = Q(0).$$

5. **a)** Justifier qu'il n'existe pas de polynôme P de $\mathbb{R}[x]$ tel que : $\forall\, Q \in \mathbb{R}[x], \quad \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = Q(0)$.
On pourra utiliser le polynôme défini par $Q(x) = xP(x)$.
b) Est-ce en contradiction avec la question 3 ?

Endomorphisme conservant la norme, les angles ...

Exercice 27. ✦✦ Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E.

1. On dit que f est une isométrie si pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.
a) Montrer que si f est une isométrie alors f est un isomorphisme de E.
b) Établir l'équivalence entre les énoncés :
i) f est une isométrie ;
ii) Pour tous $x, y \in E$, $\big\langle f(x), f(y)\big\rangle = \langle x, y\rangle$.

Dans la suite, on s'intéresse aux trois conditions :
I) L'endomorphisme f est une isométrie.
II) $f \circ f = -\mathrm{id}_E$.
III) Pour tout $x \in E$, $f(x)$ est orthogonal à x.
On souhaite montrer que si deux des conditions sont vérifiées alors la troisième l'est aussi.

2. Justifier que si les conditions I) et II) sont vraies alors III) aussi.

3. On suppose maintenant I) et III).
a) Calculer $\big\langle f(x) + x, f^2(x) + f(x)\big\rangle$, en déduire $\big\langle x, f^2(x)\big\rangle = -\|x\|^2$.
b) Expliciter $\big\|f^2(x) + x\big\|^2$, puis montrer II).

4. Conclure en montrant la dernière implication.

Exercice 28. ✦✦ **Endomorphisme qui conserve l'orthogonalité** *Source : HEC 2007.*
Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien de dimension n. On note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit f un endomorphisme de E qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall\, (u, v) \in E^2, \qquad \langle u, v\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \big\langle \varphi(u), \varphi(v)\big\rangle = 0.$$

1. Vérifier que si u et v sont deux vecteurs de même norme, alors $(u - v)$ et $(u + v)$ sont orthogonaux.

2. Démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $u \in E$, $\|\varphi(u)\| = k\|u\|$.

Produits scalaires sur $\mathbb{R}_n[x]$ et familles de polynômes orthogonaux

Exercice 29. ✦ À quelles conditions sur les réels α, β et γ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[x]^2$ par

$$\varphi(P,Q) = \alpha P(-1)Q(-1) + \beta P(0)Q(0) + \gamma P(1)Q(-1)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[x]$?

Exercice 30. ✦ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2 \ldots, a_n$, n réels deux à deux distincts. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on pose

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k\in[\![1;n]\!] \\ k\neq i}} \frac{x-a_k}{a_i-a_k} \quad \text{et} \quad P_i(x) = \left(x-a_i\right) L_i(x)^2.$$

1. Justifier que l'application φ définie par

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]^2, \qquad \varphi(P,Q) = \sum_{k=1}^{n} P\left(a_k\right) Q\left(a_k\right)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ et $(L_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une base orthonormée.

2. Justifier que l'application ψ définie par : $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]^2$

$$\psi(P,Q) = \sum_{k=1}^{n} P\left(x_k\right) Q\left(x_k\right) + \sum_{k=1}^{n} P'\left(x_k\right) Q'\left(x_k\right)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{2n-1}[x]$ et $(P_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une famille orthonormée.

Exercice 31. ✦✦ **Variantes de produits scalaires sur $\mathbb{R}_n[x]$**

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tous les polynômes P et Q appartenant à $E = \mathbb{R}_n[x]$, on pose

$$\langle P,Q\rangle = \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(\alpha) \cdot Q^{(i)}(\alpha).$$

Montrer que $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ est un espace euclidien.
On pourra penser à la formule de Taylor pour les polynômes.

2. Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels 2 à 2 distincts. Pour tous les polynômes P et Q appartenant à $E = \mathbb{R}_n[x]$, on pose

$$\langle P,Q\rangle = \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}\left(\alpha_i\right) \cdot Q^{(i)}\left(\alpha_i\right).$$

Montrer que $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ est un espace euclidien.

Exercice 32. ✦✦ ✎ **Un classique : les polynômes de Tchebychev**
On définit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de polynômes par la récurrence

$$T_0 = 1, \quad T_1(x) = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}$, justifier que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos\left((n+2)\theta\right) + \cos(n\theta) = 2\cos\left((n+1)\theta\right)\cos(\theta).$$

   b) Montrer que pour tout réel θ, tout entier naturel n,

$$\cos(n\theta) = T_n\left(\cos(\theta)\right) \qquad (\bullet)$$

   c) Vérifier que T_n est l'unique polynôme vérifiant les relations (•). Préciser le degré de T_n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[x]^2$ par :

$$\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$

   a) Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire bien défini sur $\mathbb{R}_n[x]$.

   b) Vérifier que la famille $\left(T_k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthogonale pour ce produit scalaire.

   c) Déterminer $\|T_k\|$ pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$.

Algèbre bilinéaire et réduction

Exercice 33. ✦✦ Soit $(\mathrm{E},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien avec $\dim \mathrm{E} \geqslant 2$. Pour tout vecteur u non nul et pour tous les réels $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$, on définit l'endomorphisme f de E par

$$f(x) = \lambda x + \mu\langle x, u\rangle u.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. Est-ce que f est diagonalisable ?
2. **a)** On dit qu'un endomorphisme g est une isométrie si pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\|g(x)\| = \|x\|$. Justifier que $\mathrm{Sp}(g) \subset \{-1;1\}$.
   b) À quelles conditions sur λ et μ, l'application f est une isométrie ?

Exercice 34. ✦✦ *d'après EMLyon*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[x]$ et on considère l'application φ de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que φ est bien définie puis montrer que c'est un produit scalaire sur E. On pose $\|\mathrm{P}\| = \sqrt{\varphi(\mathrm{P},\mathrm{P})}$.
2. Soit T le polynôme défini par $\mathrm{T(X)} = 1 + \frac{\mathrm{X}^n}{n!}$. Calculer $\|\mathrm{T}\|$.
   On pose $\mathrm{I} = \frac{\mathrm{T}}{\|\mathrm{T}\|}$
3. On définit l'application ψ qui à tout polynôme P de E associe $2\varphi(\mathrm{P},\mathrm{I})\mathrm{I}-\mathrm{P}$.
   a) Montrer que θ est un automorphisme de E et déterminer ψ^{-1}.
   b) Montrer que pour tout P de E : $\|\psi(\mathrm{P})\| = \|\mathrm{P}\|$.
   c) Quelles sont les valeurs propres possibles de ψ ?
   d) L'endomorphisme ψ est-il diagonalisable ?

Exercice 35. ✦✦✦ ✎ **Matrices de Gram et valeurs propres**

Soient $(\mathrm{E},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ une famille de vecteurs de E. On pose

$$\mathrm{G} = \left(\left\langle u_i, u_j\right\rangle\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad \text{et} \quad \mathrm{M} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1,u_2,\cdots,u_n),$$

où $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E.

1. Vérifier que $\mathrm{G} = {}^t\mathrm{MM}$.
2. En déduire que $\ker(\mathrm{G}) = \ker(\mathrm{M})$, puis $\mathrm{rg}(\mathrm{G}) = \mathrm{rg}(u_1,u_2,\cdots,u_n)$.
   Indication. Considérer ${}^t\mathrm{XGX}$ *pour* $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. Vérifier que G est inversible si et seulement si la famille $(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ est une base de E.
4. Justifier que les valeurs propres de G sont positives ou nulles.
5. Justifier que les valeurs propres sont majorées par $\sum\limits_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$.

Compléments en dimension infinie

Exercice 36. ✦✦ **Un sujet de concours**

On note E l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et E_2 l'ensemble des fonctions f de E telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\left(f(x)\right)^2\mathrm{d}x$ converge. Pour toute fonction f de E, on note $\Phi(f)$ la fonction définie dans cette partie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \Phi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{f(0)}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On admet que $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

1. **a)** Justifier : $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, |xy| \leqslant \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$.
   b) En déduire que, pour toutes fonctions f et g de E_2, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente.
   c) Montrer alors que E_2 est un sous-espace vectoriel de E.
2. On considère l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de $\mathrm{E}_2 \times \mathrm{E}_2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
   $$\forall(f,g) \in \mathrm{E}_2\times\mathrm{E}_2, \quad \langle f,g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$
   Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E_2. On munit E_2 de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\|\cdot\|$.
3. Soit f une fonction de E_2.
   On note pour tout x de $\mathbb{R}^+$: $\quad h(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t.$
   a) Calculer les limites de $x \mapsto \frac{(h(x))^2}{x^4}$ et de $x \mapsto \frac{(h(x))^2}{x^3}$ en 0.

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall \mathrm{X}\in\mathbb{R}_*^+,\qquad \int_0^{\mathrm{X}}\frac{\big(h(x)\big)^2}{x^4}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\frac{\big(h(\mathrm{X})\big)^2}{\mathrm{X}^3}+\frac{2}{3}\int_0^{\mathrm{X}} f(x)\Phi(f)(x)\mathrm{d}x\qquad(\bullet)$$

c) Soit $\mathrm{X}\in\mathbb{R}_*^+$. En étudiant le signe de la fonction polynomiale $\lambda\in\mathbb{R}\mapsto\displaystyle\int_0^{\mathrm{X}}\big(\lambda f(x)+\Phi(f)(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante :

$$\int_0^{\mathrm{X}} f(x)\Phi(f)(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_0^{\mathrm{X}}\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_0^{\mathrm{X}}\big(\Phi(f)(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

d) En déduire :

$$\forall \mathrm{X}\in\mathbb{R}_*^+,\qquad \left(\int_0^{\mathrm{X}}(\Phi(f)(x))^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\leqslant\frac{2}{3}\left(\int_0^{\mathrm{X}}\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

e) Montrer alors que la fonction $\Phi(f)$ appartient à E_2 et que l'on a : $\|\Phi(f)\|\leqslant\frac{2}{3}\|f\|$.

f) En utilisant la relation $(\bullet)$, justifier que la limite de $\mathrm{X}\mapsto\mathrm{X}\big(\Phi(f)(\mathrm{X})\big)^2$ en $+\infty$ est finie, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.

g) En déduire :

$$\|\Phi(f)\|^2=\frac{2}{3}\langle\Phi(f),f\rangle.$$

Exercice 37. ✦✦✦ ✦✦✦ **Séries de Fourier**

Dans la suite, E désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques. Pour tout $f\in\mathrm{E}$, on définit les coefficients de Fourier par :

$$a_0(f)=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{d}t,\qquad b_0(f)=0,$$
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\quad\text{et}\quad b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t.$$

On définit de plus la matrice $\qquad \widehat{\mathrm{F}}_n(f)=a_n(f)\mathrm{I}_2+b_n(f)\mathrm{J}\quad$ où $\quad\mathrm{J}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$.

- *Régularité et décroissance des coefficients de Fourier*

1. Justifier que l'application définie sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2$ par

$$\forall(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2,\qquad \varphi(\mathrm{A},\mathrm{B})=\mathrm{Tr}\big({}^t\mathrm{AB}\big)$$

est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

2. On suppose dans cette question que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que : $\ a_n(f)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\ $ et $\ b_n(f)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

b) En déduire que $\big\|\widehat{\mathrm{F}}_n(f)\big\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

On admet que ce résultat est encore valable même lorsque f est continue (de classe $\mathscr{C}^0$).

3. Vérifier que si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\ \widehat{\mathrm{F}}_n(f')=-n\mathrm{J}\widehat{\mathrm{F}}_n(f)$.

4. Comparer $\big\|\widehat{\mathrm{F}}_n(f')\big\|$ et $\big\|\widehat{\mathrm{F}}_n(f)\big\|$.

5. En déduire que si f est de classe $\mathscr{C}^p$ avec $p\in\mathbb{N}$ alors $\ \big\|\widehat{\mathrm{F}}_n(f)\big\|\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$.

- *Un produit scalaire sur* E

6. Vérifier que l'application définie sur E^2 par

$$\forall(f,g)\in\mathrm{E}^2,\qquad \langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur E. On note $\mathrm{N}(\cdot)$, la norme associée.

7. Notons $\mathscr{P}$ (respectivement $\mathscr{I}$), le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions paires (respectivement impaires). Vérifier que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

8. **a)** Justifier que pour tous $a,b\in\mathbb{R}$, $\cos(a)\cdot\cos(b)=\frac{1}{2}\big(\cos(a-b)+\cos(a+b)\big)$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On définit les fonctions f_k pour $k\in[\![0;n]\!]$ par

$$f_0:t\in\mathbb{R}\mapsto1/\sqrt{2}\quad\text{et pour }k\geqslant1\quad f_k:t\in\mathbb{R}\mapsto\cos(kt).$$

Justifier que la famille $\mathscr{F}_n$ constituée des fonctions $(f_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
De la même manière, on montre que la famille $\mathscr{G}_n$ constituée des fonctions $g_k:t\in\mathbb{R}\mapsto\sin(kt)$ pour $k\in[\![1;n]\!]$ est orthonormée.

9. Vérifier que la concaténation des familles $\mathscr{F}_n$ et $\mathscr{G}_n$ forme une famille orthonormée de E.

10. Soit $f\in\mathrm{Vect}(\mathscr{F}_n,\mathscr{G}_n)$. Démontrer que

$$\mathrm{N}(f)^2=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\big\|\widehat{\mathrm{F}}_k(f)\big\|^2.$$

CHAPITRE 11

Introduction au calcul différentiel

> *The beauty of mathematics only shows itself to more patient followers.*
>
> MARYAM MIRZAKHANI
> Mathématicienne iranienne ayant reçu la médaille Fields en 2014

1 Rappels : dérivation des fonctions d'une variable réelle

1.1 Définition du nombre dérivé et interprétation géométrique

Définition 22 (nombre dérivé, fonction dérivée)

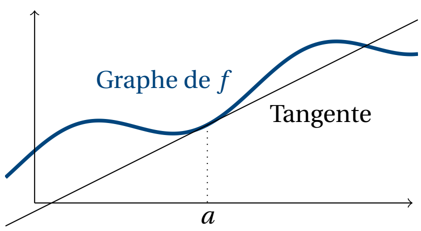
Soient I, un intervalle, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.
- f est **dérivable en** a si le quotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite *finie* en a. Si cette dernière existe, elle est unique et notée $f'(a)$.
- f est **dérivable sur** I si elle est dérivable pour tout réel de I. Ainsi, on définit la fonction dérivée par

$$f' : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & f'(a). \end{array} \right.$$

- Graphiquement, f est dérivable en a s'il existe une tangente à la courbe. L'équation de la tangente est alors

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

- Le terme $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le taux d'accroissement de f entre a et x.



1.2 Les théorèmes

Théorème 23 (développement limité à l'ordre 1)

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$. Les énoncés suivants sont équivalents.

i) La fonction f est dérivable en a et $\lambda = f'(a)$.

ii) f admet un développement limité à l'ordre 1 en a.
C'est-à-dire, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\quad f(x) = f(a) + \lambda(x-a) + o_a(x-a)$.

Remarque. On peut réécrire le développement limité sous la forme : il existe une fonction ε définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 telle que pour tout $h \in \mathcal{V}$,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

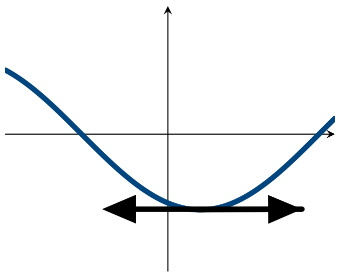
Théorème 24 (extremum - condition nécessaire)

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle.

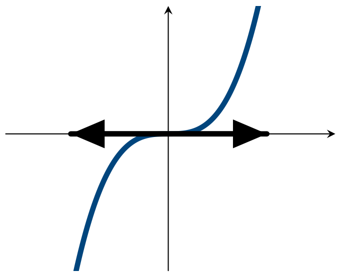
Si
- f admet un extremum local en a.
- f est dérivable en a.
- a n'est pas un des bords de I, **alors** $f'(a) = 0$.

Vocabulaire. On dit que $\mathrm{A} = \big(a, f(a)\big)$ est un point critique de f lorsque $f'(a) = 0$.

Remarque. La réciproque est fausse : tout point critique ne donne pas un extremum. La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ en 0 fournit un contre-exemple.



Point critique et minimum



Point critique sans extremum

2 Dérivées partielles et gradient

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on considère $f_{k,a}$ définie par

$$f_{k,a} : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_n). \end{array} \right.$$

L'application $f_{k,a}$ est la k-ième application partielle de f en a. C'est une fonction d'une variable réelle, on peut donc utiliser les définitions et résultats de première année.

Définition 25 (dérivée partielle)

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.
On dit que la fonction f admet une **dérivée partielle d'ordre** k **en** a si l'application partielle $f_{k,a}$ est dérivable en a_k. On note alors $\partial_k f(a)$ le nombre dérivée $f'_{k,a}(a)$. Autrement dit, la limite suivante existe et

$$\partial_k f(a) = \lim_{t \to a_k} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a)}{t - a_k}.$$

Remarque. Si f admet pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, une dérivée partielle en a, on peut définir la i-ème dérivée partielle par

$$\partial_i f : a \in \mathbb{R}^n \mapsto \partial_i f(a).$$

C'est encore une fonction de n variables réelles.

Exercice 38

✧ Préciser les dérivées partielles des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ suivantes.

$$f(x,y) = x^2 \exp(xy), \quad g(x,y) = \ln\left(1 + \sqrt{x^2+y^2}\right), \quad h(x,y) = \sin(x)^2 + \cos(y)^2,$$

$$i(x,y,z) = x^2y^2z^2, \quad j(x,y,z) = \arctan(xyz).$$

On pourra utiliser les symétries pour simplifier certains calculs.

Définition 26 (gradient)

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tels que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, f admet une i-ème dérivée partielle en a.
On définit le **gradient** de f en a, noté $\nabla f(a)$, par le vecteur de $\mathbb{R}^n$

$$\nabla f(a) = \big(\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a)\big).$$

3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

3.1 Définitions, exemples et règles de calculs

Définition 27 (fonctions de classe $\mathscr{C}^1$)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est de **classe** $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ si pour toutes les dérivées partielles existent et sont continues sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple. Les dérivées partielles d'une fonction polynomiale sont encore des fonctions polynomiales, elles sont donc continues sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi, les fonctions polynomiales sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

⚠ **Attention.** La condition $\mathscr{C}^1$ est une condition plus restrictive que la simple existence des dérivées partielles.

Proposition 28 (linéarité, produit et quotient de fonctions $\mathscr{C}^1$)

Soient f, g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Alors

- Pour tout réel λ, λf est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
- La somme $f + g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
- Le produit $f \cdot g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
- Si de plus, la fonction g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^n$, alors f/g est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple. Toute fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Pour rappel, une fonction est dite rationnelle si elle peut s'écrire comme le quotient de deux fonctions polynomiales.

Proposition 29 (composition de fonctions $\mathscr{C}^1$)

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, une partie I de $\mathbb{R}$ et $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$.

Si
- → Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \in \mathrm{I}$.
- → La fonction de plusieurs variables f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
- → La fonction d'une variable φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Alors la composée $\varphi \circ f$ est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple. Justifions que $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x \ln\big(1 + x^2 + y^2\big)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
→ Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $1 + x^2 + y^2 \in \mathbb{R}_*^+$.
→ $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1 + x^2 + y^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale.
→ La fonction logarithme $\ln : \mathbb{R}_*^+ \mapsto \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$.
Par composition, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln\big(1 + x^2 + y^2\big)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
De plus, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x$ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Par produit, la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3.2 Développement limité d'ordre 1

Condition d'existence et exemples

Rappelons la définition de la norme euclidienne et du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

$$\forall\, x=(x_i)\in\mathbb{R}^n,\quad \forall\, y=(y_i)\in\mathbb{R}^n,\qquad \|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2}\quad\text{et}\quad \langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i.$$

Dans la suite, pour une fonction $\varepsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, la notation $\varepsilon(h)\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0$ signifie que ε est continue en $0_{\mathbb{R}^n}$ avec $\varepsilon(0_{\mathbb{R}^n})=0$. C'est-à-dire

$$\forall \eta\in\mathbb{R}_*^+,\quad \exists\alpha\in\mathbb{R}_*^+,\quad \forall\, h\in\mathbb{R}^n\qquad \Big(\|h\|\leqslant\alpha\quad\Rightarrow\quad \|\varepsilon(h)\|\leqslant\eta\Big).$$

Théorème 30 (développement limité d'ordre 1)

Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
Alors pour tout $a\in\mathbb{R}^n$, f admet en a un **unique développement limité à l'ordre 1**.
C'est-à-dire, il existe une fonction $\varepsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ telle que, pour $h\in\mathbb{R}^n$,

$$f(a+h)=f(a)+\big\langle\nabla f(a),h\big\rangle+\|h\|\varepsilon(h)\quad\text{avec}\quad \varepsilon(h)\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0.$$

Exercice 39

✦
Donner le développement limité de $f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto\ln(1+x^2+y^2)$ en $(2,1)$ et $g:x\in\mathbb{R}^n\mapsto\|x\|^2$ en tout point $a\in\mathbb{R}^n$.

Remarques.
- On peut reformuler l'équation précédente :
  - Avec les dérivées partielles :

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\partial_k f(a)\times h_k+\|h\|\varepsilon(h)\quad\text{où}\quad \left\{\begin{array}{rcl} h&=&(h_1,h_2,\dots,h_n)\\ \nabla f(a)&=&\big(\partial_1 f(a),\dots,\partial_n f(a)\big).\end{array}\right.$$

  - Avec le changement de variable $x=a+h$ $\qquad f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}(x_k-a_k)\partial_k f(a)+\|x-a\|\varepsilon(x-a).$

- L'existence de dérivées partielles ne suffit pas à assurer l'existence d'un développement limité. On peut montrer qu'elle n'assure même pas la continuité de l'application.

Exercice 40

✦✦ **Unicité du développement limité**
Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et $a\in\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe une forme linéaire $\mathrm{L}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ telle que pour tout $h\in\mathbb{R}^n$

$$f(a+h)=f(a)+\mathrm{L}(h)+\|h\|\varepsilon(h)\quad\text{avec}\quad \varepsilon(h)\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0.$$

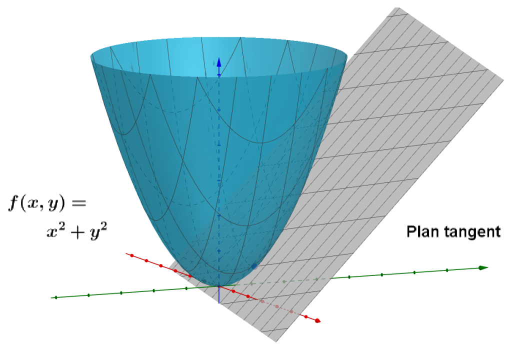
Montrer que pour tout $h\in\mathbb{R}^n$, $\mathrm{L}(h)=\big\langle\nabla f(a),h\big\rangle$.

Interprétation géométrique : le plan tangent

Exemple. Illustrons la situation avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=x^2+y^2$ et $a=(0.1,0.5)$. L'équation du plan affine est

$$z=f(a)+\partial_1 f(a)(x-0.1)+\partial_2 f(a)(y-0.5).$$

À l'instar de la droite tangente pour une fonction d'une variable réelle, on obtient ici un plan tangent à la surface.

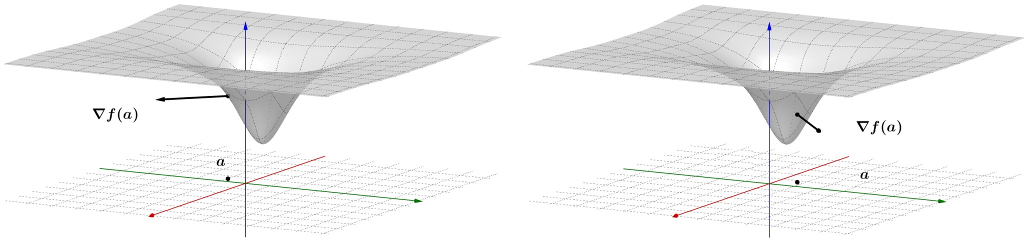


Le gradient donne la direction de plus grande pente

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Supposons de plus que $\nabla f(a) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. D'après le développement limité d'ordre 1, $f(a+h) - f(a) \simeq \langle \nabla f(a), h\rangle$ lorsque h est « proche » de 0. Or, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

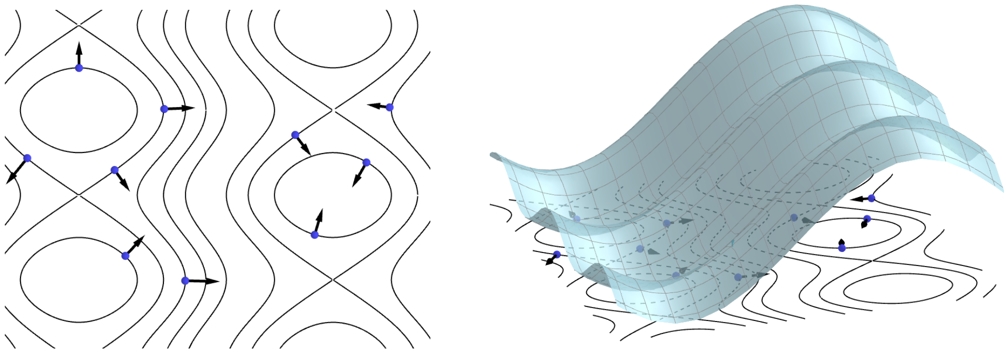
$$\left|\langle \nabla f(a), h\rangle\right| \leqslant \|\nabla f(a)\| \cdot \|h\|$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs sont colinéaires. Autrement dit, la variation $|f(a+h)-f(a)|$ est « localement » maximale lorsque le vecteur h est colinéaire au gradient $\nabla f(a)$. On dit que $\nabla f(a)$ donne la direction de plus grande pente (et dirigé dans le sens des pentes croissantes).



Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau

Commençons par un exemple. On a tracé ci-dessous quelques lignes de niveaux de la fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 4\sin(x/3) + \cos(y) + 5$ ainsi que quelques gradients $\nabla f(a)$ pour différentes valeurs de a.

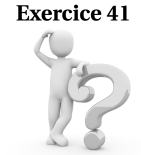


On constate que le gradient $\nabla f(a)$ est systématiquement orthogonal à la tangente à la ligne de niveau en a. Prouvons le cas général. Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et γ_1, $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On pose

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big). \end{array} \right.$$

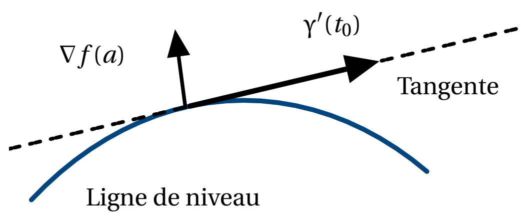
Comme γ_1 et γ_2 sont de classe $\mathscr{C}^1$, on dit que γ est de classe $\mathscr{C}^1$, et on pose $\gamma' = \big(\gamma_1', \gamma_2'\big)$. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $a = \gamma(t_0) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 41



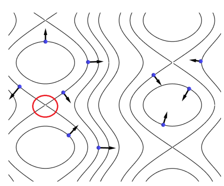
1. Montrer que $\gamma(t) - \gamma(t_0) = \gamma'(t_0)(t - t_0) + o_{t_0}(t - t_0)$ où $o_{t_0}(t-t_0)$ désigne une fonction de limite nulle en t_0.
2. Démontrer que pour $t \in \mathbb{R}$, $f(\gamma(t)) = f(a) + \big\langle \nabla(f)(a), \gamma'(t_0)\big\rangle (t - t_0) + o_{t_0}(t - t_0)$ et en déduire que $(f \circ \gamma)'(t_0) = \big\langle \nabla f(a), \gamma'(t_0)\big\rangle$.
3. On pose $\mathrm{K} = f(a)$ de sorte que a appartienne à la ligne de niveau $\mathscr{L}_{\mathrm{K}} = \big\{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = \mathrm{K}\big\}$. On suppose de plus que γ est à valeurs dans $\mathscr{L}_{\mathrm{K}}$, c'est à dire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) \in \mathscr{L}_{\mathrm{K}}$. Montrer que $\nabla f(a) \perp \gamma'(t_0)$.

Comme γ est à valeurs dans $\mathscr{L}_{\mathrm{K}}$, le vecteur $\gamma'(t_0)$ est un vecteur tangent à la ligne de niveau $\mathscr{L}_{\mathrm{K}}$. On montre donc ici que le gradient de f en a est orthogonal à tout vecteur tangent (en a) à $\mathscr{L}_{\mathrm{K}}$.



Exercice 42

✦ Que dire du gradient au niveau d'un croisement ?

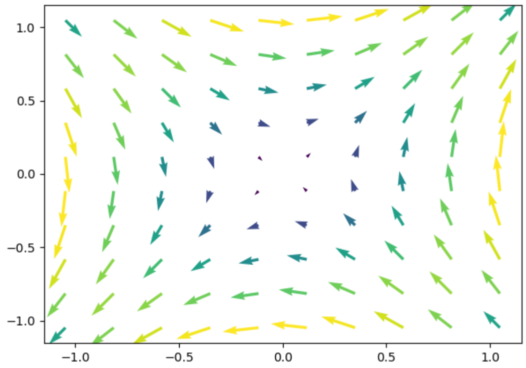


Tracé des vecteurs gradients avec Python

Pour le tracé de champs de vecteurs, on peut utiliser la commande `quiver`.

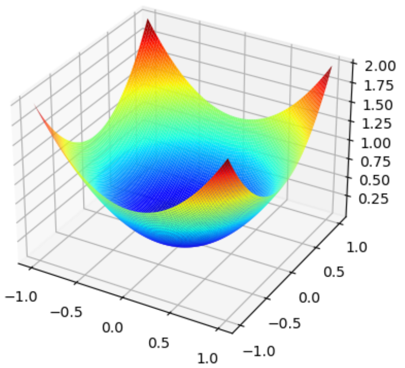
Editeur

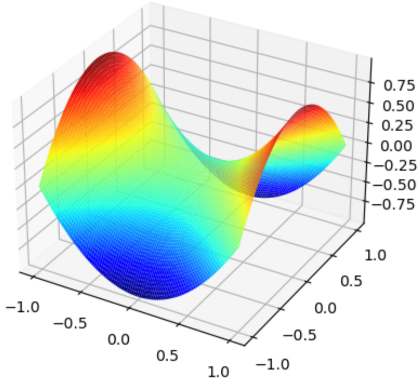
```
x = np.linspace(-np.pi/3,np.pi/3,10)
y = np.linspace(-np.pi/3,np.pi/3,10)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
Z = np.sin(X*Y)
dx=Y*np.cos(X*Y)
 # expression de la première dérivée partielle
dy=X*np.cos(X*Y)
 # expression de la seconde
color_array = np.sqrt((dx)**2+(dy)**2)
 # Pour que la couleur dépende
 # de la norme du gradient
fig, ax = plt.subplots(figsize=(7,7))
ax.quiver(X,Y,dx,dy,color_array)
plt.show()
```

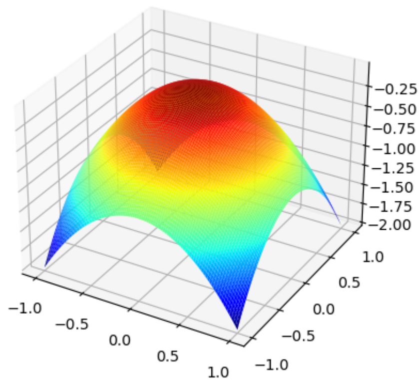


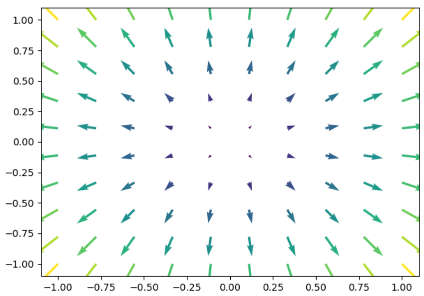
Exercice 43

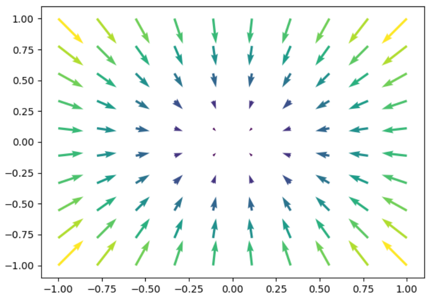
✦ Associer à chaque surface ci-dessous, la représentation des gradients.

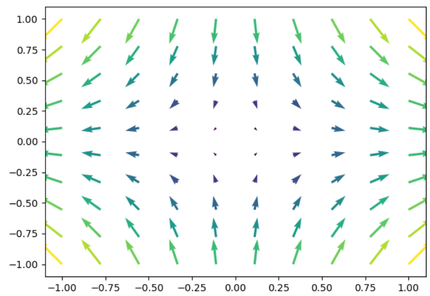






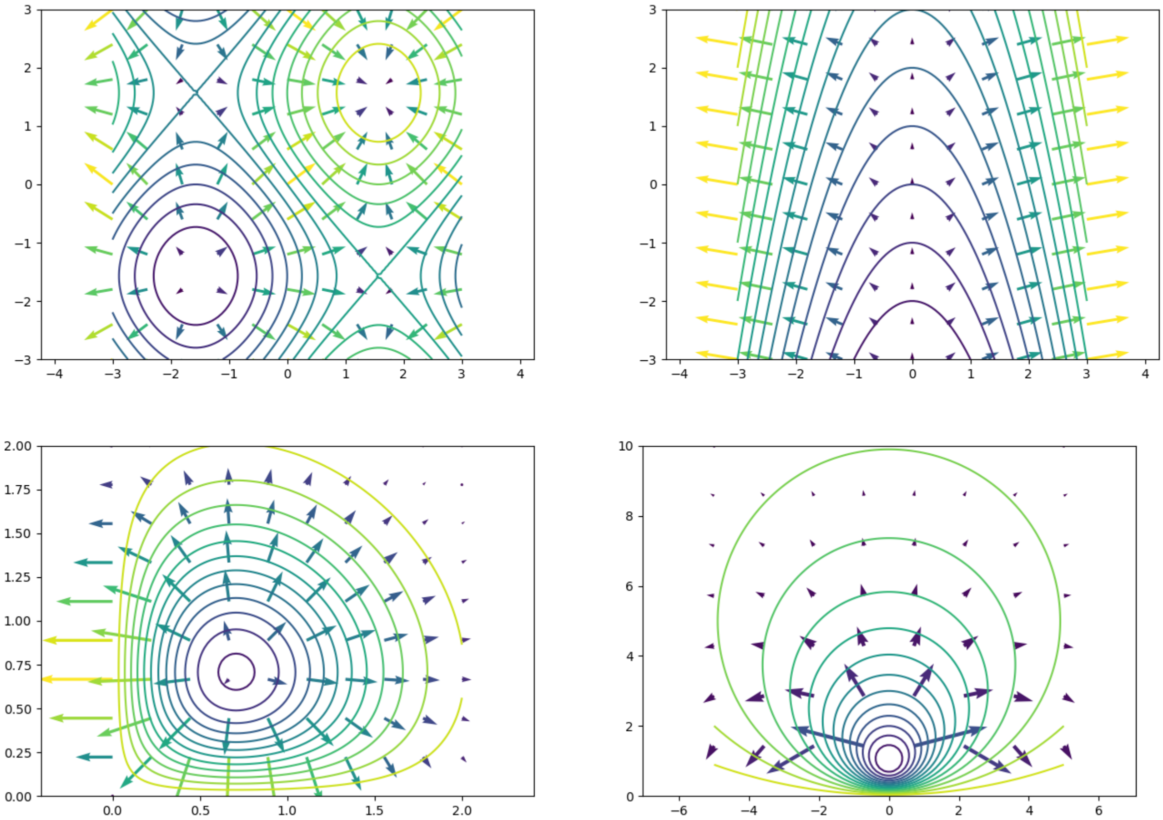






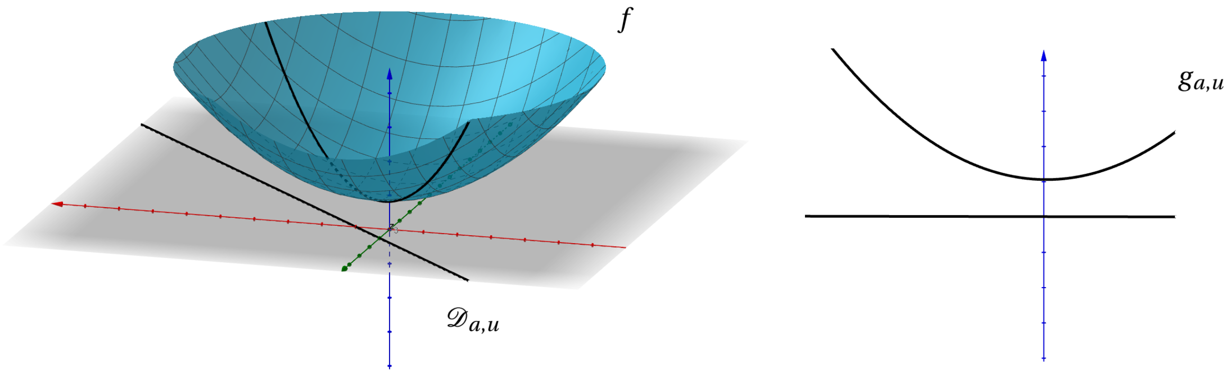
Remarque. En rajoutant, les lignes de niveaux, on peut de nouveau vérifier l'orthogonalité du gradient avec les lignes de niveau. Voici une succession d'exemples avec les fonctions. (Attention, il faut bien rendre les axes normés).

- $f(x, y) = 4\sin(x) + 3\sin(y)$ sur $[-3;3]^2$.
- $f(x, y) = x^2 + y$ sur $[-3;3]^2$.
- $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$ sur $[0;2]^2$.
- $f(x, y) = -\frac{3\cdot y}{1+x^2+y^2}$ sur $[-5,5] \times [0;10]$.



3.3 Dérivées directionnelles

Soient $a, u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. La droite affine passant par a et de direction u est l'ensemble $\mathscr{D}_{a,u} = \left\{a + t\cdot u \mid t \in \mathbb{R}\right\}$. Afin de ramener le problème à une fonction d'une seule variable, on peut restreindre l'étude de la fonction f à la droite $\mathscr{D}_{a,u}$. On pose donc $g_{a,u} : t \in \mathbb{R} \mapsto f(a + t\cdot u) \in \mathbb{R}$.



Théorème 31 (gradient et dérivée directionnelle)

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et $a, u \in \mathbb{R}^n$ avec u, non nul. Alors la fonction

$$g_{a,u} : t \in \mathbb{R} \mapsto f(a + t\cdot u) \in \mathbb{R}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad g'_{a,u}(t) = \langle \nabla f(a + tu), u\rangle.$

Remarques.

- Si on précise les dérivées partielles, on obtient $g'_{a,u}(t) = \sum_{i=1}^{n} u_i \partial_i f(a + tu)$ où $u = (u_1, \ldots, u_n)$.

- Lorsqu'on considère le vecteur e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on retrouve l'expression de la dérivée partielle $\partial_k f(a)$.
- Pour $t = 0$, on a directement

$$\boxed{g'_{a,u}(0) = \langle u, \nabla f(a) \rangle.}$$

Lorsque u est de norme 1, cette quantité représente **la dérivée directionnelle de f au point a** dans la direction (et le sens) de u.

Exercice 44

✦✦ Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. On pose pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$. Soit $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ fixé, on définit

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto f(t - y_0, y_0 - z_0, z_0 - t). \end{cases}$$

1. À l'aide du théorème des dérivées directionnelles, justifier la dérivabilité de φ et préciser $\varphi'(x_0)$.
2. Que peut-on en déduire sur $\partial_1 F$?
3. Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\partial_1 F(x, y, z) + \partial_2 F(x, y, z) + \partial_3 F(x, y, z) = 0.$$

4 Optimisation : condition d'ordre 1

4.1 Extrema locaux

Définition 32 (extrema locaux)

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^n$.

- On dit que f a un **maximum local** en a s'il existe $r \in \mathbb{R}_*^+$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \Big(\|x - a\| < r \quad \Rightarrow \quad f(a) \geqslant f(x) \Big).$$

- On dit que f a un **minimum local** en a s'il existe $r \in \mathbb{R}_*^+$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \Big(\|x - a\| < r \quad \Rightarrow \quad f(a) \leqslant f(x) \Big).$$

- On dit que f a un **extremum local** si f a un maximum local ou un minimum local.

Remarque. En pratique, pour étudier un extremum, on regardera le signe de $f(x) - f(a)$.

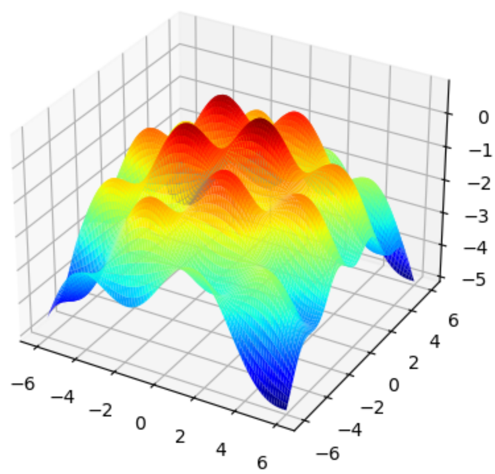
Exemple. Ci-dessous, un exemple de fonction avec une multitude d'extrema locaux qui ne sont tous pas globaux.

Editeur

```
def f(x, y):
    z=np.sin(x)*np.cos(2*y) -(x**2+y**2)/15
    return z

x = np.linspace(-6, 6, 100)
y = np.linspace(-6, 6, 100)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
Z = f(X,Y)

fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection='3d')
ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1,
cstride=1,cmap='jet', edgecolor='none')
```



4.2 Point critique et condition nécessaire d'extremum

Définition 33 (point critique)

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$.
On dit que a est un **point critique** de f si $\nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Autrement dit,

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \qquad \partial_i f(a) = 0.$$

Exercice 45

1. ✧ Calculer les points critiques des fonctions suivantes.

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y \quad \text{et} \quad g(x,y) = 2\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{2y} + 2\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y.$$

2. Justifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}^2$ par $h(x,y) = \mathrm{e}^x\left(x + y^2 + \mathrm{e}^x\right)$ admet un unique point critique.
3. ✎ Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. On pose

$$f : x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto \sum_{k=1}^n {x_k}^2 + \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^n x_k.$$

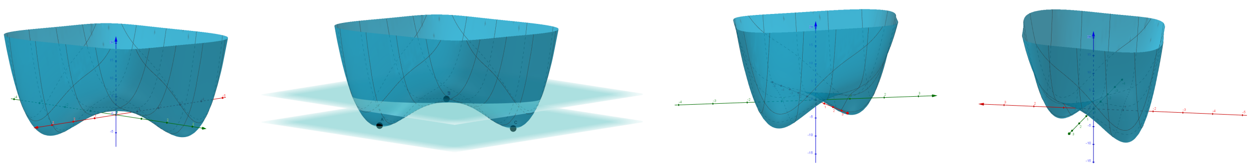
Vérifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et admet un unique point critique.

Exercice 46

✦ À l'aide des différentes vues de la surface, conjecturer le nombre de points critiques de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

Prouver votre conjecture.



Théorème 34 (condition nécessaire d'extremum)

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$.

Si f a un extremum en $a \in \mathbb{R}^n$,

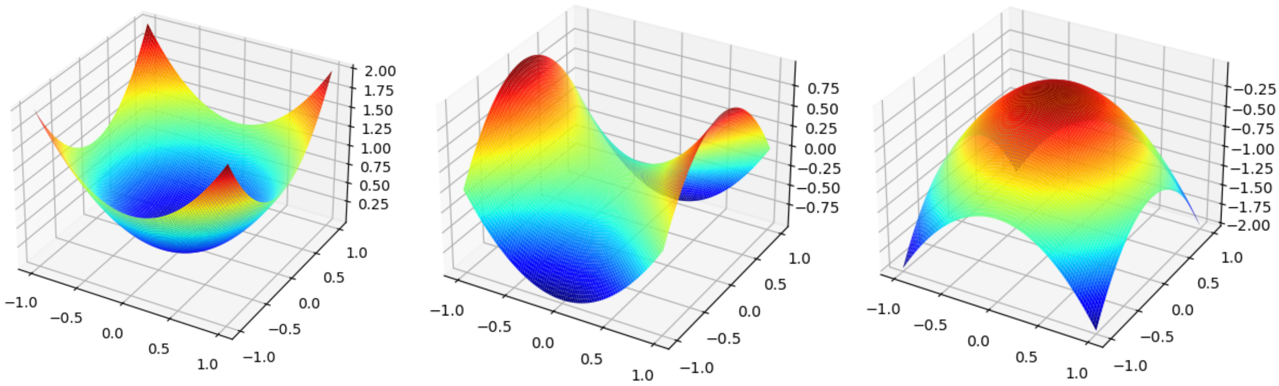
alors a est un point critique de f.

Exercice 47

✦ **Preuve**
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ admettant un maximum en $a \in \mathbb{R}^n$.

1. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$ non nul. En utilisant la fonction $g_{a,u} : t \in \mathbb{R} \longmapsto f(a+tu)$, montrer que $\langle \nabla f(a), u \rangle = 0$.
2. Conclure que a est un point critique de f.

⚠ **Attention.** La réciproque est fausse.
Reprenons le cas des fonctions $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2 + y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto -x^2 - y^2$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2 - y^2$. Dans le troisième cas, $(0,0)$ est un point critique sans pour autant donner un extremum.



Vocabulaire. Un point critique qui ne correspond pas à un extremum est un point selle.

Méthode

Recherche d'extrema d'une fonction de plusieurs variables

Étudions la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - 3x + xy + y^2$.

→ *La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calcul des dérivées partielles.*

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\partial_1 f(x,y) = 2x - 3 + y \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x,y) = x + 2y.$$

→ *Recherche du ou des points critiques.*

Si f possède un extremum local en (x,y), alors $\partial_1 f(x,y) = \partial_2(x,y) = 0$, donc $2x + y = 3$ et $x + 2y = 0$. On obtient un unique point critique avec $a = (2,-1)$.

→ *Vérification sur chaque point critique.*

On étudie le signe de la différence $f(x,y) - f(a)$ pour déterminer si le point critique a donnera un extremum. Par un changement de variable, c'est équivalent à étudier $f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a)$ pour tout $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(2+h_1,-1+h_2) - f(2,-1) &= (2+h_1)^2 - 3(2+h_1) + (2+h_1)(-1+h_2) + (-1+h_2)^2 + 3 \\ &= {h_1}^2 + h_1 h_2 + {h_2}^2 = \left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right)^2 + \frac{3{h_2}^2}{4} \geqslant 0, \end{aligned}$$

donc f possède un minimum global atteint en $(2,-1)$. Il vaut $f(2,-1) = -3$.

Exercice 48

✦ En reprenant la méthode précédente, déterminer les extrema de f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^2 y + y^2 + x.$$

Exercices

On limite les exercices aux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ définies sur $\mathbb{R}^n$. Le cas des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ ou définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$ sera étudié au second semestre.

Dérivées partielles premières

Exercice 49. ✦ Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \partial_1 f(x,y) = 4x^3y + 3y + 1 \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x,y) = x^4 + 3x.$$

Exercice 50. ✦ Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que : $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \nabla f(x,y) = (x,y)$.
Démontrer que tous les points $\big(\cos(t), \sin(t)\big) \in \mathbb{R}^2$ avec $t \in \mathbb{R}$ appartiennent tous à la même ligne de niveau de f.

Exercice 51. ✦✦✦ **Inégalité des accroissements finis et suite du type** $u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$
On considère une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On suppose qu'il existe $k \in [0,1[$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \big|\partial_1 f(x,y)\big| + \big|\partial_2 f(x,y)\big| \leqslant k.$$

1. Soient $a = (x,y)$, $b = (x',y') \in \mathbb{R}^2$. On pose $g : t \in \mathbb{R} \mapsto f\big(a + t(b-a)\big)$.
   a) Préciser $g(0)$ et $g(1)$. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et préciser sa dérivée.
   b) En déduire que
   $$\big|f(x,y) - f(x',y')\big| \leqslant k \max\big(\big|x - x'\big|, \big|y - y'\big|\big).$$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par
   $$u_0 = 1, \quad u_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n).$$
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \max\big(|u_{n+2} - u_{n+1}|, |u_{n+1} - u_n|\big)$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} \leqslant k a_n$.
   b) En déduire l'existence d'une constante c telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant c k^{n/2}$.
   c) Conclure en prouvant la convergence de la série $\sum u_{n+1} - u_n$, puis de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   En passant à la limite dans la relation de récurrence, on montre que la limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell, \ell)$.
3. Justifier que la convergence ne dépend pas du choix des conditions initiales u_0 et u_1.
4. *Python.* On définit la suite u par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 1 + \frac{1}{4}\sin(u_n + u_{n+1}).$$
   a) Écrire un programme qui prend en argument n et renvoie u_n.
   b) Vérifier que la suite u converge vers une limite finie ℓ.
   On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant (1/\sqrt{2})^n$.
   c) En déduire un programme pour obtenir une approximation de la limite à 10^{-3} près.

Exercice 52. ✦✦ Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $a, b \in \mathbb{R}^n$.
1. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^n$ tel que
   $$f(b) - f(a) = \big\langle b - a, \nabla f(c)\big\rangle.$$
2. On considère dans cette question la fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \|x\|^2$. Déterminer une valeur de c en fonction de a et b.

Points critiques et optimisation

Exercice 53. ✦✦ **Une infinité de points critiques !** *D'après oral ESCP*
Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = (2x - y)^2 \mathrm{e}^{2x-y}.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et vérifier que
   $$\forall a \in \mathbb{R}^2, \qquad \partial_1 f(a) + 2\partial_2 f(a) = 0.$$
2. Montrer que f possède une infinité de points critiques. Trouver ceux en lesquels f admet un extremum local ou global.

Exercice 54. ✦✦✦ ✎ **Mélange avec des probabilités** *D'après oral ESCP*

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont à densité et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Sous réserve d'existence, on note $\mathbf{E}(\mathrm{X})$ l'espérance d'une variable aléatoire X.

Dans tout l'exercice, X, Y et Z sont trois variables aléatoires ayant des moments d'ordre 2 . On admet que chacune des variables aléatoires XY, XZ et YZ admet une espérance et on suppose que la condition suivante est vérifiée : $\mathbf{E}(\mathrm{X}^2)\mathbf{E}(\mathrm{Y}^2) - (\mathbf{E}(\mathrm{XY}))^2 \neq 0$ Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $f(x,y) = \mathbf{E}\left((\mathrm{Z} - x\mathrm{X} - y\mathrm{Y})^2\right)$.

1. Quelle est, selon les valeurs des réels a, b, c et d, le rang de la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$?
2. a) Établir les inégalités strictes : $\mathbf{E}(\mathrm{X}^2) > 0$ et $\mathbf{E}(\mathrm{Y}^2) > 0$.
   b) Montrer que pour tout couple $(x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2$, on a : $\mathbf{E}\left((x\mathrm{X} + y\mathrm{Y})^2\right) > 0$.
3. a) Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle admet un unique point critique (x_0, y_0).
   b) Montrer que pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :
   $$\mathbf{E}\left((\mathrm{Z} - x_0\mathrm{X} - y_0\mathrm{Y})(x\mathrm{X} + y\mathrm{Y})\right) = 0.$$
   c) En déduire l'égalité :
   $$f(x,y) = \mathbf{E}\left((\mathrm{Z} - x_0\mathrm{X} - y_0\mathrm{Y})^2\right) + \mathbf{E}\left(\left[(x - x_0)\mathrm{X} - (y_0 - y)\mathrm{Y}\right]^2\right)$$
   d) Étudier les extrema de f.
4. Dans cette question, on suppose que X et Y sont indépendantes et suivent toutes les deux la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ et on pose : $\mathrm{Z} = \mathrm{X}^2$. Déterminer l'ensemble des couples (x_0, y_0) pour lesquels $\mathbf{E}\left((\mathrm{Z} - x\mathrm{X} - y\mathrm{Y})^2\right)$ est minimale.

Exercice 55. ✦✦✦ ✎ **Fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$** *D'après oral ESCP 2001*

On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire canonique. Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Soient $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et l'application $\varphi_{x,y}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_{x,y}(t) = f\left(x + t(y - x)\right)$.
   Justifier que $\varphi_{x,y}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et rappeler une expression de sa dérivée.
2. On suppose que f est convexe sur $\mathbb{R}^2$. C'est-à-dire
   $$\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f\left(\lambda x + (1-\lambda) y\right) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$
   a) Montrer que pour tous x, $y \in \mathbb{R}^2$, $\varphi_{x,y}$ est une fonction convexe (d'une seule variable). Que dire sur les variations de la fonction $\varphi'_{x,y}$?
   b) En déduire que
   $$\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}^2, \quad f(y) - f(x) \geqslant \left\langle \nabla f(x), y - x \right\rangle \qquad (\bullet)$$
3. Réciproquement, on suppose que f vérifie la relation $(\bullet)$ ci-dessus. Montrer que f est convexe.
4. On suppose que f est convexe sur $\mathbb{R}^2$.
   a) Montrer que si f présente en $x_0 \in \mathbb{R}^2$ un minimum relatif, alors f présente en x_0 un minimum global.
   b) Montrer que si l'ensemble des points où f admet un minimum, noté $\mathscr{A}$, est non vide, alors cet ensemble est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$. C'est-à-dire
   $$\forall\, (x,y) \in \mathscr{A}^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad \lambda x + (1-\lambda) y \in \mathscr{A}.$$

Exercice 56. ✦✦✦ ✎ Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. On se place dans $\mathbb{R}^n$ munit de son produit scalaire canonique $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Soient u, v deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^n$ et f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \langle x, u\rangle^2 + \langle x, v\rangle^2$$

1. Vérifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifier que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(a) = 2\langle a, u\rangle\, u + 2\langle a, v\rangle\, v$.
2. En déduire les points critiques de f.
3. Étudier les extrema de f.

Exercice 57. ✦✦✦ Soient $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x) = \frac{\langle x, u\rangle}{\|x\|^2 + \|u\|^2}.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ puis déterminer une fonction g définie sur $\mathbb{R}^n$ telle que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \nabla f(x) = g(x)\left(u - 2 f(x)\, x\right).$$
2. Justifier que f a exactement deux points critiques.
3. Préciser les éventuels extrema de f.

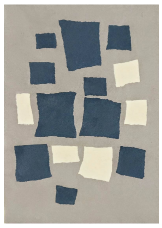
CHAPITRE 12

Vecteurs aléatoires

Le hasard est ma matière première.

JEAN ARP (1886-1966)
Co-fondateur du mouvement Dada.

Ci-contre : "Collage avec des carrés disposés selon les lois du hasard".



1 Rappels : couples de variables aléatoires

1.1 Lois, lois marginales et indépendance

Définition 35 (loi d'un couple)

La loi (conjointe) d'un couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes, c'est la donnée de la valeur de $\mathbf{P}\big([X = x] \cap [Y = y]\big)$ pour tout couple $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Définition 36 (indépendance)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. On dit que X et Y sont **indépendantes** si

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \qquad \mathbf{P}\big([X = x] \cap [Y = y]\big) = \mathbf{P}(X = x) \cdot \mathbf{P}(Y = y).$$

Remarque. Les lois de X et Y sont appelées **lois marginales**. Elles s'obtiennent à partir de la loi du couple en utilisant la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\forall x \in X(\Omega), \qquad \mathbf{P}(X = x) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}\big([X = x] \cap [Y = y]\big)\\
\forall y \in Y(\Omega), \qquad \mathbf{P}(Y = y) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}\big([X = x] \cap [Y = y]\big)
\end{aligned}$$

⚠ **Attention.** Les lois marginales de X et Y ne permettent pas de retrouver la loi du couple.

Par exemple, soient X et Y deux variables de Bernoulli de paramètre $1/2$. Dans les trois cas suivants, les lois marginales sont identiques alors que les lois de couples diffèrent.

- X et Y indépendantes.
- $Y = X$.
- $Y = 1 - X$.

Par contre si X et Y sont indépendantes, la loi du couple (X, Y) est connue.

Proposition 37 (loi d'une fonction, cas général)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes, et soit g une fonction à valeurs réelles définie sur le sous-ensemble $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ de $\mathbb{R}^2$. Notons Z la variable aléatoire $g(X,Y)$. Alors, pour tout élément k de $Z(\Omega)$,

$$\mathbf{P}(Z=k)=\sum_{\substack{i\in X(\Omega),\ j\in Y(\Omega)\\ g(i,j)=k}}\mathbf{P}([X=i]\cap[Y=j]),$$

où la somme porte sur le sous-ensemble de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ constitué par les couples (i,j) tels que $g(i,j)=k$.

1.2 Calculs d'espérance

Sans hypothèses particulières, l'espérance d'une fonction de deux variables aléatoires s'obtient à l'aide du théorème de transfert. La loi conjointe des deux variables permet le calcul, lorsqu'elle existe de l'espérance de $g(X,Y)$ sans nécessité de calculer la loi de la fonction associée.

Théorème 38 (de transfert pour un couple de variables)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes, et soit g une fonction à valeurs réelles définie sur le sous-ensemble $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ de $\mathbb{R}^2$. Sous réserve de convergence absolue,

$$\mathbf{E}\big(g(X,Y)\big)=\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ y\in Y(\Omega)}} g(x,y)\cdot\mathbf{P}\big([X=x]\cap[Y=y]\big).$$

Remarque. C'est l'hypothèse de convergence absolue qui assure que la valeur de la somme ne dépend pas de l'ordre de ses termes.

Voici deux applications de ce théorème, dans le cas d'une combinaison linéaire d'une part, et dans le cas d'un produit de deux variables indépendantes d'autre part.

Corollaire 39 (linéarité de l'espérance)

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$ et λ et μ deux réels.

Si X et Y admettent une espérance,

alors alors $\lambda X+\mu Y$ admet une espérance et $\mathbf{E}(\lambda X+\mu Y)=\lambda\mathbf{E}(X)+\mu\mathbf{E}(Y)$.

Corollaire 40 (espérance d'un produit de variables indépendantes)

Soient X et Y deux variables aléatoires.

Si X et Y
- admettent une espérance et
- sont indépendantes,

alors $X\cdot Y$ admet une espérance et $\mathbf{E}(X\cdot Y)=\mathbf{E}(X)\cdot\mathbf{E}(Y)$.

Exercice 58

✧ Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $X(\Omega)=\{-1;0;1\}$. Notons $Y=X^2$.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y). En déduire la loi de Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Comparer $\mathbf{E}(X\cdot Y)$ et $\mathbf{E}(X)\cdot\mathbf{E}(Y)$. Commenter.

1.3 Loi d'une somme, exemples

Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires. Donnons la loi de la somme $Z = X + Y$. On a

$$Z(\Omega) = \{x + y \mid (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\}.$$

Pour tout $z \in Z(\Omega)$.

$$\mathbf{P}(Z = z) = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ x+y=z}} \mathbf{P}\big([X = x] \cap [Y = y]\big) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ z-x \in Y(\Omega)}} \mathbf{P}\big([X = x] \cap [Y = z - x]\big).$$

Si les variables X et Y sont indépendantes, alors la loi de Z est donnée par la formule du **produit de convolution discret**. Pour tout $z \in Z(\Omega)$:

$$\mathbf{P}(Z = z) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ z-x \in Y(\Omega)}} \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = z - x).$$

Dans le cas particulier où les variables X et Y sont supposées indépendantes, de loi binomiale ou de Poisson, et où la fonction g est simplement l'addition, la loi de $g(X, Y)$ est en fait totalement connue :

Proposition 41 (somme de binomiale)

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0;1]$ et $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires.

Si
- X_1 et X_2 sont indépendantes.
- $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}\big(n, p\big)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}\big(m, p\big)$.

Alors $$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}\big(n + m, p\big).$$

Proposition 42 (somme de loi de Poisson)

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$ et $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires.

Si
- X_1 et X_2 sont indépendantes.
- $X_1 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{P}\big(\mu\big)$.

Alors $$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{P}\big(\lambda + \mu\big).$$

Remarque. Par récurrence, ces résultats s'étendent pour des sommes de n variables aléatoires.

1.4 Loi du maximum, du minimum

Pour déterminer la loi de $\max(X, Y)$, on passe par la fonction de répartition.
Pour la loi du $T = \min(X, Y)$, on passe par la fonction d'anti-répartition ($x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{P}(T > x)$).

Exercice 59

✦ ✎ **Un exemple classique**
Soient p et r deux réels de $]0;1[$ et X et Y deux v.a indépendantes. On suppose de plus que $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(r)$.

1. Donner la loi de la variable aléatoire $\min(X, Y)$.
2. Calculer $\mathbf{P}\big([X \geqslant Y]\big)$.
3. Comment interpréter les résultats précédents en termes de lancer de pièces ?

2 Généralisation aux vecteurs aléatoires, indépendances

Dans la suite, un vecteur aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ est la donnée d'un n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$ où chaque X_i désigne une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

2.1 Lois, lois marginales

Définition 43 (loi d'un vecteur aléatoire, loi marginale)

- La **loi d'un vecteur aléatoire** $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires réelles est donnée par la fonction $F_{(X_1,\dots,X_n)}$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$F_{(X_1,\dots,X_n)}(t_1,\dots,t_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant t_i]\right).$$

- On appelle ***i*-ème loi marginale** de $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ la loi de X_i.

Exercice 60

✦ Soient (X_1, X_2) et F la fonction de répartition associée à ce couple. Pour $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, on définit l'ensemble $\mathscr{R} =]a_1, b_1] \times]a_2, b_2]$. Exprimer $\mathbf{P}((X_1, X_2) \in \mathscr{R})$ à l'aide de F, a et b.

Proposition 44 (égalité en loi)

Soient $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$, $(Y_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ deux vecteurs aléatoires définis sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Si
- → Les vecteurs $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ ont la même loi.
- → La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Alors les variables aléatoires $g(X_1, \dots, X_n)$ et $g(Y_1, \dots, Y_n)$ ont la même loi.

Exercice 61

✦ Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, de même loi, à valeurs dans $[1; +\infty[$.
Montrer que $\mathbf{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right)$ existe et vaut $\frac{1}{2}$.
On pourra remarquer que $\frac{X}{X+Y}$ *et* $\frac{Y}{X+Y}$ *ont même loi.*

2.2 Indépendance

Définition 45 (indépendance)

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
Les variables X_1, X_2, …, X_n sont dites **mutuellement indépendantes** si pour tout $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, les événements $[X_1 \leqslant t_1], \dots, [X_n \leqslant t_n]$ sont mutuellement indépendants. Autrement dit,

$$\forall\, (t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant t_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \leqslant t_i).$$

Remarques.

- Autrement dit, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si

$$\forall\, (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad F_{(X_1,\dots,X_n)}(t_1,\dots,t_n) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(t_k).$$

- Il est clair que, si les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_k$ sont mutuellement indépendantes.

- On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est composée de variables mutuellement indépendantes si pour toute partie finie $I \subset \mathbb{N}$, les variables $(X_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendantes.

Proposition 46 (des coalitions)

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$, sont indépendantes,

alors toute variable aléatoire fonction de $X_1, X_2, \dots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction de $X_{p+1}, X_{p+2}, \dots, X_n$.

Vocabulaire. Dans la suite, on note $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ de $X_1, X_2, \dots, X_p$ pour désigner l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccl} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & \varphi\big(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\big) \end{array} \right. \qquad \text{où} \quad \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Proposition 47 (caractérisation par des intervalles)

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Les deux énoncés suivants sont équivalents.

i) $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

ii) Pour tous intervalles $I_1, \dots, I_n$ de $\mathbb{R}$, $\quad \mathbf{P}\left(\left[\bigcap_{i=1}^{n} X_i \in I_i\right]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\big([X_i \in I_i]\big)$.

Proposition 48 (caractérisation de l'indépendance, cas discret)

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Les variables $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout $(t_1, \dots, t_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = t_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i = t_i).$$

2.3 Calculs d'espérance et de la variance

Le programme limite la définition de l'espérance et de la variance aux cas de variables aléatoires finies, discrètes dénombrables et à densité. Mais les propositions s'étendent au cas général.

L'espérance

Proposition 49 (linéarité de l'espérance)

Soient $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Si pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, X_i admet une espérance,

Alors $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n$ admet une espérance avec

$$\mathbf{E}(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n) = \lambda_1 \mathbf{E}(X_1) + \dots + \lambda_n \mathbf{E}(X_n).$$

Proposition 50 (espérance d'un produit)

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Si
- Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, X_i admet une espérance.
- Les variables $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ sont mutuellement indépendantes.

Alors $X_1 \times \cdots \times X_n$ admet une espérance avec

$$\mathbf{E}(X_1 \times \ldots \times X_n) = \mathbf{E}(X_1) \times \ldots \times \mathbf{E}(X_n).$$

Exercice 62

✦ *D'après oral ESCP 2022*

1. Soient S et T deux v.a indépendantes, telles que T et $-$T aient la même loi. Montrer que $\mathbf{E}\big(\cos(S+T)\big) = \mathbf{E}\big(\cos(S)\big)\mathbf{E}\big(\cos(T)\big)$.
2. On considère une suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1,1\}$ et telles que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(R_k = -1) = \mathbf{P}(R_k = 1) = \frac{1}{2}$ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} R_k$. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, on a :
$$\mathbf{E}\big(\cos(S_n t)\big) = (\cos t)^n.$$

Exercice 63

✦ ✎ Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, des v.a indépendantes et suivant chacune une loi uniforme sur $[-1/2, 1/2]$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \left(e^x - e^{-x}\right)/2$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel $t > 0$

$$\mathbf{E}\left(e^{tS_n}\right) = \left(\frac{f(t/2)}{t/2}\right)^n \quad \text{où} \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

La variance

Proposition 51 (variance et indépendance)

Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Si
- X et Y admettent une variance.
- X et Y sont indépendantes.

Alors X + Y admet une espérance avec $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$.

Le résultat suivant s'en déduit par récurrence en rappelant que, par le lemme des coalitions, X_{k+1} est indépendants de $(X_1 + \ldots + X_k)$.

Corollaire 52 (variance et indépendance)

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Si
- Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, X_i admet une variance.
- Les variables $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ sont mutuellement indépendantes.

Alors $X_1 + \cdots + X_n$ admet une espérance avec

$$\mathbf{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbf{V}(X_1) + \cdots + \mathbf{V}(X_n).$$

Exemple. Nous avons vu que si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ alors il existe $X_1, X_2, \ldots, X_n$, des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètre p telles que $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On retrouve alors l'espérance et la variance

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq.$$

3 Compléments sur les couples : la covariance

3.1 Définitions et premières propriétés

Définition-proposition 53 (covariance)

Soient X, Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors la variable aléatoire $\big(X - \mathbf{E}(X)\big)\big(Y - \mathbf{E}(Y)\big)$ admet une espérance. On définit la covariance de X et Y par

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}\Big(\big(X - \mathbf{E}(X)\big) \cdot \big(Y - \mathbf{E}(Y)\big)\Big).$$

Remarque. Lorsque $X = Y$, nous retrouvons la définition de la variance.

$$\mathbf{V}(X) = \mathrm{Cov}(X,X).$$

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé. Dans la suite, $\mathscr{M}_2$ désigne l'ensemble des variables aléatoires de $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ admettant un moment d'ordre 2.

Proposition 54 (propriété de la covariance)

La covariance est :

- **Symétrique**. $\forall X, Y \in \mathscr{M}_2, \quad \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X).$
- **Positive**. $\forall X \in \mathscr{M}_2, \quad \mathrm{Cov}(X,X) \geqslant 0.$
  De plus, il y a égalité $\mathrm{Cov}(X,X) = 0$ si et seulement si X est presque sûrement constante.
- **Bilinéaire.**
  - Linéaire à gauche. Pour tous $X_1, X_2, Y \in \mathscr{M}_2$, tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

    $$\mathrm{Cov}\big(\lambda_1 X_1 + \mu X_2, Y\big) = \lambda_1 \mathrm{Cov}(X_1, Y) + \mu \mathrm{Cov}(X_2, Y).$$

  - Linéaire à droite. Pour tous $X_1, X_2, Y \in \mathscr{M}_2$, tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

    $$\mathrm{Cov}\big(Y, \lambda X_1 + \mu X_2\big) = \lambda \mathrm{Cov}(Y, X_1) + \mu \mathrm{Cov}(Y, X_2).$$

⚠ **Attention.** Ces propriétés sont à rapprocher de la définition d'un produit scalaire. Il y a toutefois, une grande différence : la covariance n'est pas définie.

$$\mathrm{Cov}(X,X) = 0 \quad \not\Rightarrow \quad X = 0.$$

Vocabulaire. Deux variables sont dites décorrélées si la covariance est nulle.

Exercice 64

✧ *Les questions sont indépendantes.*

1. Montrer que $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\,\mathrm{Cov}(X,Y)$.
2. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires admettant la même variance. Montrer qu'alors les variables aléatoires $X + Y$ et $X - Y$ sont décorrélées.

Proposition 55 (dépendance et corrélation)

Soient X, Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ admettant un moment d'ordre 2.

Si X et Y sont indépendants

Alors X et Y sont des variables décorrélées : $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Exercice 65

✧ **La réciproque est fausse!**
Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1; 0; 1\}$. Vérifier que X et $Y = X^2$ sont décorrélées mais non indépendantes.

Théorème 56 (formule de Huygens)

Soient X, Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ admettant un moment d'ordre 2. On a

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).$$

Exercice 66

✦ Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, admettant une espérance $\mu \neq 0$ et une variance $v \neq 0$.

1. Exprimer l'espérance et la variance de XY en fonction de μ et v.
2. Est-ce que les variables $X + Y$ et XY sont indépendantes ?

Exercice 67

✦✦ Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p. On note M_n la variable aléatoire définie sur Ω par $M_n(\omega) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i(\omega)$.

1. Reconnaître la loi de M_n, préciser sont espérance.

2. Soient r et s deux entiers tels que $1 \leqslant r < s$. Vérifier que $\mathbf{E}(M_r M_s) = 1 - q^r$.

3. Calculer la covariance $\mathrm{cov}(M_r, M_s)$.

Proposition 57 (variance d'une somme)

Soient X, Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ admettant un moment d'ordre 2.
Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la variable $\lambda X + \mu Y$ admet un moment d'ordre 2, et

$$\mathbf{V}(\lambda X + \mu Y) = \lambda^2 \mathbf{V}(X) + 2\lambda\mu\,\mathrm{Cov}(X, Y) + \mu^2 \mathbf{V}(Y).$$

Remarques.

- En particulier, $X + Y$ admet un moment d'ordre 2 et $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathbf{V}(Y)$.
- Cette formule est à comparer avec la formule avec le produit scalaire. Si $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ est un espace euclidien

$$\forall\, x, y \in E, \qquad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

- Soient $X_1, \ldots, X_n$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et admettant des variances. On montre que

$$\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{cov}\big(X_i, X_j\big).$$

Exercice 68

✦

1. Mntrer que pour tous réels $x_1, \ldots, x_n$, $(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leqslant n\big(x_1^2 + \cdots + x_n^2\big)$.

2. En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ admet une variance, puis justifier l'égalité de la remarque précédente.

Théorème 58 (inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient X, Y. On a
$$\left|\mathrm{Cov}(X,Y)\right| \leqslant \sigma(X)\,\sigma(Y)$$
où $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ désignent respectivement l'écart-type de X et Y.

Exercice 69

✦ **Preuve**

1. Prouver cette inégalité en introduisant la fonction polynomiale $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{V}(tX+Y)$.
2. Préciser le cas d'égalité.
3. *Exemple.*
   Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et suivant des lois de Bernoulli. Montrer que $4\,\mathrm{Cov}(X,Y) \leqslant 1$.

3.2 Coefficient de corrélation

Définition 59 (coefficients de corrélation)

Soient X, Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ admettant un moment d'ordre 2. On suppose de plus que $\mathbf{V}(X) \neq 0$ et $\mathbf{V}(Y) \neq 0$. On appelle **coefficient de corrélation linéaire**, noté $\rho(X,Y)$, le nombre réel défini par
$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$
où $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ désignent respectivement l'écart-type de X et Y.

Remarques.
- Si X et Y sont indépendantes, leur coefficient de corrélation linéaire est nul. Mais la réciproque est fausse.
- À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$\left|\rho(X,Y)\right| \leqslant 1.$$

Précisons que le cas d'égalité. Si $\left|\rho_{X,Y}\right| = 1$, alors il existe des réels a et b tels que $\mathbf{P}(Y = aX + b) = 1$.

Exercice 70

✧ Soient X et Y des variables aléatoires et $a, b \in \mathbb{R}_*^+$, $b, d \in \mathbb{R}$.

1. Prouver que $\rho(aX+b, cY+d) = \rho(X,Y)$.
2. Soient X et Y des variables aléatoires admettant des variances non nulles. Soit
$$Z = \left(\frac{1}{\sigma(Y)}\right)Y - \left(\frac{\rho(X,Y)}{\sigma(X)}\right)X.$$
   (a) Exprimer $\mathbf{V}(Z)$ à l'aide de $\rho(X,Y)$.
   (b) Que peut-on en déduire si $\left|\rho(X,Y)\right| = 1$?

Exercices

Révisions : couples de v.a discrètes

Exercice 71. ✧ On considère n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte numéro k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. Soient X et Y les numéros de la boîte et de la boule obtenues.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$.
3. Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance.

Exercice 72. ✦ Une urne contient $N-2$ boules vertes, 1 boule blanche et 1 boule rouge. On tire les boules de l'urne, une à une et sans remise.

1. Soient X_1 le rang d'apparition de la boule blanche et X_2 le rang d'apparition de la boule rouge. Déterminer la loi de X_1, la loi de X_2 et la loi du couple (X_1, X_2).
2. Soit X le rang où on obtient pour la première fois soit la boule blanche, soit la boule rouge. Soit Y le rang où on a obtenu pour la première fois les deux boules blanche et rouge. Déterminer la loi de X et la loi de Y.

Exercice 73. ✦✦ *D'après Oral HEC 2014*
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \qquad \mathbf{P}\big([X=i] \cap [Y=j]\big) = \frac{\lambda}{(i+j+1)!}.$$

1. Déterminer le réel λ.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Compléments

Exercice 74. ✧ **Vrai ou faux ?**
Dans la suite, X et Y désignent deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé admettant un moment d'ordre 2.

1. Si $\mathbf{E}(X) = 0$ alors $\mathbf{E}(X^2) = 0$. ✓ ×
2. Si X et Y sont indépendantes, $\mathrm{Cov}(X, X+Y) = \mathbf{V}(X)$. ✓ ×

Exercice 75. ✦ ✎ Soient $p \in]0,1[$ et (X, Y) un couple de v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est donnée par

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{P}\big([X=n] \cap [Y=k]\big) = \begin{cases} \alpha(1-p)^k & \text{si } k \geqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Préciser α.
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y).
3. Reconnaître la loi de $X+1$? En déduire l'espérance et la variance de X.
4. Vérifier que X et $Y-X$ sont deux variables de même loi et indépendantes.
5. En déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 76. ✦ **Un cas très particulier !**
Soient X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ telles que $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(q)$.
Montrer que si X et Y sont décorrélées alors elles sont indépendantes.

Exercice 77. ✦✦ ✎ Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et suivant toute une loi de Bernoulli de paramètre p. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad Y_n = X_n X_{n+1} \quad \text{et} \quad U_n = Y_1 + \ldots + Y_n.$$

1. Quelle est la loi de Y_n ? Les Y_i sont-elles deux à deux indépendantes ?
2. Calculer l'espérance et la variance de U_n.

Exercice 78. ✦✦ ✎ **Loi de Pascal**
On dispose d'une urne contenant une proportion $p \in]0,1[$ de boules blanches. On effectue une suite infinie de tirages, indépendants. Pour chaque $r \in \mathbb{N}^*$, on note R_r la variable aléatoire qui renvoie le rang de la r-ième «boule blanche», (avec 0 si le r-ième boule blanche n'apparaît pas).
Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note X_i la v.a qui renvoie 1 si l'on a obtenu une boule blanche au i-ème tirage, et 0 sinon.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. On note aussi $Y_0 = 0$.

1. On note A l'événement « obtenir un nombre fini de boules blanches » et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n l'événement « ne plus obtenir de boules blanches à partir du n-ième lancer ».
   a) En utilisant le théorème de la limite monotone, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(A_n) = 0$.
   b) Exprimer A en fonction des événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En déduire $\mathbf{P}(A)$.
   c) En déduire que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(R_r = 0) = 0$.
2. Identifier la loi de R_1, en déduire l'existence et la valeur de $\mathbf{E}(R_1)$ et $\mathbf{V}(R_1)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de Y_n ?
4. Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geqslant r$.
   Exprimer l'événement $[R_r = n]$ en fonction d'événements formés à partir des variables Y_{n-1} et X_n.
5. En déduire la loi de R_r.
6. Écrire une fonction Python qui prend en argument r et simule la variable aléatoire R_r.

Exercice 79. ✦✦ ✎ **Somme aléatoire de variables aléatoires discrètes - identité de Wald**
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi et admettant une espérance. Soit N, une nouvelle variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et admettant aussi une espérance. On pose

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

C'est-à-dire, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$S(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) + \cdots + X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0. \end{cases}$$

On admet que S est une variable aléatoire.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{P}(N = n) \neq 0$. Justifier l'existence et calculer l'espérance $\mathbf{E}(S \mid [N = n])$.
2. En déduire l'existence de l'espérance de S et l'égalité $\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(X_1) \cdot \mathbf{E}(N)$.

Avec un peu d'algèbre linéaire...

Exercice 80. ✦ ✎ **Matrice de variance-covariance**
Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, un vecteur aléatoire dont chaque variable aléatoire admet un moment d'ordre 2. On définit la matrice colonne aléatoire $\mathscr{X}$ et la matrice $\mathscr{E}$ des espérances et $\mathscr{V}$ des variances-covariances par

$$\mathscr{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad \mathscr{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(X_1) \\ \mathbf{E}(X_2) \\ \vdots \\ \mathbf{E}(X_n) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathscr{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1, X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathbf{V}(X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_n, X_1) & \mathrm{Cov}(X_n, X_2) & \cdots & \mathbf{V}(X_n) \end{bmatrix}.$$

1. Comparer la somme de tous les coefficients de la matrice $\mathscr{V}$ avec $\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$.
2. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels et A la matrice ligne $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix}$. On note Z la variable aléatoire réelle définie par $Z = A\mathscr{X} = \sum_{k=1}^{n} a_i X_i$. Exprimer $\mathbf{E}(Z)$ à l'aide de A et $\mathscr{E}$, puis $\mathbf{V}(Z)$ avec A et $\mathscr{V}$.
3. a) Justifier que la matrice $\mathscr{V}$ est diagonalisable et que les valeurs propres sont positives.
   b) Préciser les valeurs propres lorsque les variables sont mutuellement indépendantes.
4. Que dire des variables aléatoires X_i si la matrice $\mathscr{V}$ n'est pas inversible ?

Exercice 81. ✦✦ ✎ **Matrice de variance-covariance II**
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$ et $(X_i)_{i\in[[1,n]]}$ des variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On suppose que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, X_i suit la loi de Poisson de paramètre 1.
Pour tout $k \in [[1, n]]$, on pose $Y_k = X_1 + \cdots + X_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$.
On définit aussi la matrice de variance-covariance par

$$M_n = \left(\mathrm{Cov}\left(Y_i, Y_j\right)\right)_{(i,j)\in[[1;n]]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, rappeler la loi de Y_k. Préciser $\mathbf{E}\left(Y_k\right)$ et $\mathbf{V}\left(Y_k\right)$.
2. On considère tout d'abord le cas particulier $n = 2$.
   a) Expliciter la matrice M_2.
   b) Montrer que M_2 est inversible et expliciter son inverse.
3. On revient au cas général avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$.
   a) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$. Montrer que $\mathrm{Cov}\left(Y_i, Y_j\right) = i$.

b) Expliciter la matrice M_n.

On note

$$\mathrm{N}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & 1 \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[t_{i,j}\right]_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}.$$

la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients situés au-dessus de la diagonale sont égaux à 1, les autres étant nuls.

4. Montrer que N_n est inversible et calculer son inverse que l'on notera R_n.

5. **a)** Exprimer M_n en fonction de ${}^t\mathrm{N}_n$ et de N_n.

b) Justifier que M_n est inversible et exprimer $(\mathrm{M}_n)^{-1}$ en fonction de R_n et ${}^t\mathrm{R}_n$.

6. Soit $(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{R}^n$ et soit $\mathrm{Z}_n = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathbf{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} z_i \mathrm{Y}_i\right) = {}^t(\mathrm{T}_n\mathrm{Z}_n)\,(\mathrm{T}_n\mathrm{Z}_n)$.

On pose $\mathrm{W}_n = \mathrm{T}_n\mathrm{Z}_n = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

7. Montrer que ${}^t(\mathrm{R}_n\mathrm{W}_n)\,(\mathrm{R}_n\mathrm{W}_n) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(w_i - w_{i+1}\right)^2\right) + w_n{}^2$.

8. Vérifier que, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $(a-b)^2 \leqslant 2a^2+2b^2$. En déduire ${}^t(\mathrm{R}_n\mathrm{W}_n)(\mathrm{R}_n\mathrm{W}_n) \leqslant 4\,{}^t(\mathrm{W}_n)\mathrm{W}_n$.

9. Conclure que pour tout $(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i \mathrm{Y}_i\right) \geqslant \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} z_i{}^2.$$

Exercice 82. ✦✦ **Matrice des lois conditionnées**

On dit qu'une matrice carrée à coefficients positifs M est stochastique si la somme des coefficients de chaque colonne est égale à 1. Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1,n]\!]$. On appelle matrice des lois conditionnées de X sachant Y, la matrice carrée d'ordre n,

$$\mathrm{M} = \left(a_{ij}\right)_{i,j\in[\![1;n]\!]} \quad \text{où} \quad a_{ij} = \mathbf{P}_{[\mathrm{Y}=j]}(\mathrm{X}=i).$$

1. Montrer que M est stochastique et que 1 est une valeur propre de M.
Indication. Montrer que 1 *est valeur propre si et seulement si* ${}^t\mathrm{M}-\mathrm{I}_n$ *n'est pas inversible.*

2. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si les colonnes de M sont proportionnelles.

Exercice 83. ✦✦✦ *d'après oral ESCP 2022*

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$. On suppose que X et Y admettent des moments d'ordre 2 et on suppose que X n'a pas une variance nulle. Soit la matrice :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}\left(\mathrm{X}^2\right) & \mathbf{E}(\mathrm{X}) \\ \mathbf{E}(\mathrm{X}) & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, montrer l'existence de l'espérance $\mathbf{E}\big((\mathrm{Y}-a\mathrm{X}-b)^2\big)$ et trouver une matrice colonne B et un nombre $\mathrm{C}\in\mathbb{R}$ (qui ne dépendent ni de a ni de b) tels que :

$$\mathbf{E}\left((\mathrm{Y}-a\mathrm{X}-b)^2\right) = {}^t\mathrm{UAU} - 2\,{}^t\mathrm{BU} + \mathrm{C} \quad \text{avec} \quad \mathrm{U} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

On souhaite montrer l'existence et trouver $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\mathbf{E}\big((\mathrm{Y}-a\mathrm{X}-b)^2\big)$ soit minimal. On pose $f(a,b) = \mathbf{E}\big((\mathrm{Y}-a\mathrm{X}-b)^2\big)$.

2. Montrer que f admet une borne inférieure sur $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont strictement positives.
On admet (pour l'instant) qu'il existe une matrice orthogonale P *telle que* $\mathrm{A} = \mathrm{PD}{}^t\mathrm{P}$ *avec* D *diagonale.*

4. En déduire l'existence d'un minimum pour f sur $\mathbb{R}^2$.

5. Trouver explicitement tous les couples (a,b) pour lesquels ce minimum est atteint.

Exercice 84. ✦✦✦ **Application de l'inversibilité de la matrice de Vandermonde** *d'après Oraux HEC 2014*

1. Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts. Notons $\mathscr{B} = \left(1, x, \dots, x^n\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathscr{C} = (e_0,\dots,e_n)$, la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

a) Montrer que l'application suivante est un isomorphisme

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \big(\mathrm{P}(a_0), \ldots, \mathrm{P}(a_n)\big). \end{array} \right.$$

b) Expliciter A, la matrice de φ de la base $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$. Est-t-elle inversible ?

2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes finies définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, et soit n et m deux entiers supérieurs ou égaux à 2 . On suppose que $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $\mathrm{Y}(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$. On pose pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $j \in [\![1, m]\!]$:

$$p_i = \mathbf{P}(\mathrm{X} = x_i), \quad q_j = \mathbf{P}\big(\mathrm{Y} = y_j\big), \quad \pi_{i,j} = \mathbf{P}\big([\mathrm{X} = x_i] \cap [\mathrm{Y} = y_j]\big) \quad \text{et} \quad \delta_{i,j} = \pi_{i,j} - p_i q_j.$$

On suppose que pour tout $h \in [\![1; n-1]\!]$ et tout $k \in [\![1; m-1]\!]$, la covariance de X^h et Y^k est nulle.

a) Soit $k \in [\![1; m-1]\!]$. Montrer que pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on a : $\sum\limits_{j=1}^{m} \delta_{i,j} {y_j}^k = 0$.

b) En déduire que X et Y sont indépendantes.

Exercice 85. ✦✦ ✎ Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, suivant la même loi et avec un moment d'ordre 2. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$\mathrm{A}(\omega) = \begin{bmatrix} \mathrm{X}(\omega) & \mathrm{Y}(\omega) \\ \mathrm{Y}(\omega) & \mathrm{X}(\omega) \end{bmatrix}.$$

1. On suppose dans cette question que $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.Calculer la probabilité que la matrice A soit inversible.

2. Justifier que A est toujours diagonalisable.

3. Notons λ_1 et λ_2 les variables aléatoires égales aux valeurs propres de A. Calculer $\mathrm{Cov}(\lambda_1, \lambda_2)$ puis $\mathbf{E}(\lambda_1 \lambda_2)$.

Problème 86. ✦✦✦ **Distance en variation totale**

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans une partie de $\mathbb{N}$.

1. • *Préliminaires : loi d'un couple*

Soit $p \in]0; 1/2[$. On considère deux variables aléatoires S, T respectivement à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\{0; 1\}$. On suppose que la loi du couple (S, T) est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}\big([\mathrm{S} = k] \cap [\mathrm{T} = 0]\big) = \left\{ \begin{array}{cl} \mathrm{e}^{-p} - p\left(1 - \mathrm{e}^{-p}\right) & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k = 1 \\ p^k \mathrm{e}^{-p} / k! & \text{si } k \geqslant 2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \mathbf{P}\big([\mathrm{S} = k] \cap [\mathrm{T} = 1]\big) = \left\{ \begin{array}{cl} p\left(1 - \mathrm{e}^{-p}\right) & \text{si } k = 0 \\ p\mathrm{e}^{-p} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \geqslant 2. \end{array} \right.$$

a) 🔧 Vérifier que cela définit bien une loi de probabilité.

b) Reconnaître les lois marginales de S et T.

c) Exprimer $\mathbf{P}(\mathrm{S} = \mathrm{T})$ en fonction de p.

d) 🔧 En déduire que $\mathbf{P}(\mathrm{S} = \mathrm{T}) \geqslant 1 - 2p^2$.

2. • *La distance en variation totale*

Pour X, Y deux variables aléatoires, on pose : $\quad d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \big|\mathbf{P}([\mathrm{X} = n]) - \mathbf{P}([\mathrm{Y} = n])\big|$.

a) Vérifier que $d(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est bien défini et $d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \leqslant 2$.

b) Que dire de X et Y si $d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0$?

c) Soient X, Y et Z trois variables aléatoires. Montrer que $d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = d(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$ et $d(\mathrm{X}, \mathrm{Z}) \leqslant d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) + d(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$.

3. • *Une majoration de la distance*

a) 🔧 Justifier que pour toute partie A de $\mathbb{N}$, on a $\big|\mathbf{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{A}) - \mathbf{P}(\mathrm{Y} \in \mathrm{A})\big| \leqslant \mathbf{P}\big([\mathrm{X} \neq \mathrm{Y}]\big)$.

b) On pose $\mathrm{A} = \Big\{ n \in \mathbb{N} \,\Big|\, \mathbf{P}\big([\mathrm{X} = n]\big) \geqslant \mathbf{P}\big([\mathrm{Y} = n]\big) \Big\}$, justifier que

$$d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 2\Big|\mathbf{P}\big([\mathrm{X} \in \mathrm{A}]\big) - \mathbf{P}\big([\mathrm{Y} \in \mathrm{A}]\big)\Big| \quad \text{puis} \quad d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \leqslant 2\mathbf{P}\big([\mathrm{X} \neq \mathrm{Y}]\big).$$

c) 🔧 On suppose dans cette question que X s'exprime sous la forme $\mathrm{X} = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ où les variables $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ sont indépendantes et de même loi. De même, on suppose que $\mathrm{Y} = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Y}_i$ où les variables $(\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n)$ sont indépendantes et de même loi. Montrer alors que

$$d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \leqslant 2n - 2\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(\mathrm{X}_i = \mathrm{Y}_i\right).$$

4. • *Inégalité de Le Cam*

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Montrer que si $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, alors : $\quad d(X,Y) \leqslant \dfrac{4\lambda^2}{n}$.

5. Quel théorème retrouve-t-on lorsque $n \to +\infty$?

≫ Solution p. ??

Exercice 87. ✦✦ ✎ **Théorème de Weierstrass dans le cas $\mathscr{C}^1$**

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$.

1. Justifier qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $(x,y) \in [0;1]^2$, $\quad |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction P_n par

$$P_n : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) t^k (1-t)^{n-k}. \end{array} \right.$$

Soient $p \in [0;1]$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires de même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ et indépendantes.

2. **a)** Rappeler la loi de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Préciser son espérance et sa variance.

b) Vérifier que si on note $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$, alors $\mathbf{V}\left(\overline{X}_n\right) \leqslant \dfrac{1}{4n}$.

3. Montrer que $\mathbf{E}\left(f\left(\overline{X}_n\right)\right) = P_n(p)$. En déduire que

$$P_n(p) - f(p) = \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p)\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

4. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$. On note :

- $A_{1,\varepsilon}$ l'ensemble des entiers $k \in [\![0;n]\!]$ tels que $|k/n - p| < \varepsilon/M$;
- $A_{2,\varepsilon}$ l'ensemble des entiers $k \in [\![0;n]\!]$ tels que $|k/n - p| \geqslant \varepsilon/M$.

En particulier, on obtient $P_n(p) - f(p) = S_{1,\varepsilon} + S_{2,\varepsilon}$ où

$$\forall i \in \{1;2\}, \quad S_{i,\varepsilon} = \sum_{k \in A_{i,\varepsilon}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p)\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

a) Démontrer que $|S_{1,\varepsilon}| \leqslant \varepsilon$.

b) Vérifier ensuite que $|S_{2,\varepsilon}| \leqslant 2M\,\mathbf{P}\left(\left|\overline{X}_n - p\right| \geqslant \varepsilon/M\right)$.

5. **a)** 🔍 Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \mathbf{P}\left(\left|\overline{X}_n - p\right| \geqslant \varepsilon/M\right) \leqslant M^2/(4n\varepsilon^2)$.

b) 🔍 Avec un bon choix de ε, conclure en montrant que

$$\sup_{x \in [0;1]} |f(x) - P_n(x)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

• *Illustration avec Python*

6. Écrire un programme qui prend en arguments un réel t, un entier naturel n, une fonction f définie sur $[0;1]$ et renvoie $P_n(t)$ où P_n est défini à la question 1.
On pourra utiliser la commande **sp.binom(i,j)** *de la bibliothèque* **scipy.special** pour le coefficient $\binom{i}{j}$.

7. Proposer un code pour afficher sur le même graphe, la courbe de $f : t \in [0;1] \mapsto \sin(2\pi t)$, et les courbes de P_i pour $i \in [\![2;8]\!]$.