

## DS calcul

### THÈME : ENTRAÎNEMENT AU CALCUL

1. On considère la matrice  $N = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ . Le programme suivant renvoie la matrice nulle.

Editeur

```
import numpy as np
N = np.array([[0,3,2],[-2,5,2],[2,-3,0]])
P = np.array([-4,8,-5,1])
M = np.eye(3)
R = np.zeros([3,3])
for i in range(4):
    R += P[i]*M
    M = np.dot(N,M)
print(R)
```

Console

```
[[0. 0. 0.]
 [0. 0. 0.]
 [0. 0. 0.]]
```

- a) Identifier le polynôme  $P$  utilisé dans le programme. Le factoriser.  
b) En déduire une inclusion vérifiée par  $\text{Sp}(N)$ .

2. On reprend la matrice

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donner une base de  $\text{Ker}(N - I_3)$ , puis de  $\text{Ker}(N - 2I_3)$ . Est-ce qu'on peut obtenir une base composée uniquement de vecteurs propres de  $N$ ?

3. Calculer

$$I = \int_0^1 5^x dx, \quad \text{puis} \quad J = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

avec le changement de variable  $u = \sqrt{e^x - 1}$ . Calculer avec un changement de variable trigonométrique simple

$$K = \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

4. Soit  $\varphi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[x]$  défini par

$$\varphi(P) = -P''(1) + 2P'(1)(x-1) - 2P(1)(x-1)^2.$$

On pose

$$Q_1 = 1, \quad Q_2 = x - 1, \quad Q_3 = \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

- a) Donner la matrice de  $\varphi$  dans la base  $(Q_1, Q_2, Q_3)$ .  
b) Calculer  $\varphi(Q_1 - 2Q_3)$  et  $\varphi(Q_1 + 2Q_3)$ .  
c) En déduire les sous-espaces propres de  $\varphi$ .

5. Donner un couple de réels  $(\alpha, \lambda)$  tel que la fonction  $f : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \lambda x^\alpha \in \mathbb{R}_*^+$  soit solution de :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad f^{-1}(x) = f'(x).$$

On pourra exprimer le résultat à l'aide du nombre d'or :  $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ .

6. On considère l'endomorphisme  $T_\alpha$  de  $\mathbb{R}_3[x]$  défini par

$$T_\alpha(P)(x) = x(x-1)P''(x) + (1 + \alpha x)P'(x).$$

- a) Expliciter le spectre de  $T_\alpha$  en fonction de  $\alpha$ .  
 b) En déduire une condition suffisante sur  $\alpha$  pour que tous les sous-espaces propres soient de dimension 1.

7. Simplifier

$$60 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

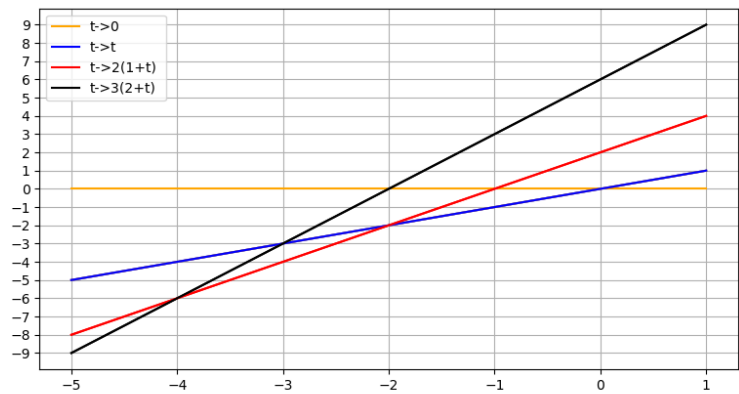
8. Vrai ou faux? Justifier.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2} dt.$$

• Indication de la question 6

Editeur

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
t=np.linspace(-5,1,100)
y0=np.zeros(len(t))
y1=t
y2=2*(1+t)
y3=3*(2+t)
plt.plot(t,y0,'orange')
plt.plot(t,y1,'blue')
plt.plot(t,y2,'red')
plt.plot(t,y3,'black')
plt.grid()
plt.show()
```



## Solution

L'objectif est de réussir les 6 premières questions dans l'heure. Les questions 7 et 8 sont en bonus.

1. Dans le programme, on initialise  $M = I_3$ , puis on remplace  $M$  par  $NM$  à chaque étape. Ainsi, les matrices successives sont

$$I_3, N, N^2, N^3.$$

Le programme calcule donc

$$R = -4I_3 + 8N - 5N^2 + N^3 = P(N),$$

où

$$P(x) = -4 + 8x - 5x^2 + x^3 = x^3 - 5x^2 + 8x - 4.$$

On constate que 1 et 2 sont racines évidentes. On peut donc factoriser par  $(x-1)(x-2)$  et il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tel que

$$P(x) = (x-1)(x-2)(ax+b).$$

En regardant le coefficient dominant et le coefficient constant  $P(0)$ , on trouve  $a = 1, b = -2$ . Soit

$$P(X) = (X-1)(X-2)^2.$$

- Comme le programme renvoie la matrice nulle, on a  $P(N) = 0_3$ . On sait que le spectre est inclus dans l'ensemble de racine du polynôme annulateur. On trouve

$$\text{Sp}(N) \subset \{1; 2\}.$$

2. On calcule d'abord

$$N - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

La résolution de  $(N - I_3)X = 0$  donne

$$\text{Ker}(N - I_3) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ensuite,

$$N - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

La résolution de  $(N - 2I_3)X = 0$  donne

$$\text{Ker}(N - 2I_3) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

On a donc trouvé trois vecteurs propres qui forment une famille libre :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ils forment une base de  $\mathbb{R}^3$ . Oui, on peut donc obtenir une base composée uniquement de vecteurs propres de  $N$ .

3. • On trouve une primitive en remarquant que  $5^x = e^{x \ln(5)}$

$$I = \left[ \frac{5^x}{\ln 5} \right]_0^1 = \frac{5-1}{\ln 5} = \frac{4}{\ln 5}.$$

- On effectue le changement de variable de classe  $\mathcal{C}^1$

$$u = \sqrt{e^x - 1}.$$

Alors

$$u^2 = e^x - 1, \quad e^x = 1 + u^2, \quad e^x dx = 2u du.$$

D'où

$$dx = \frac{2u}{1+u^2} du.$$

Les bornes deviennent

$$x = 0 \Rightarrow u = 0, \quad x = \ln 2 \Rightarrow u = 1.$$

Ainsi,

$$J = \int_0^1 u \frac{2u}{1+u^2} du = \int_0^1 \frac{2u^2}{1+u^2} du = \int_0^1 2 - \frac{2}{1+u^2} du.$$

D'où

$$J = [2u - 2 \arctan u]_0^1 = \left[ 2 - \frac{\pi}{2} \right].$$

- On effectue le changement de variable de classe  $\mathcal{C}^1$

$$u = \cos x, \quad du = -\sin x dx.$$

Les bornes deviennent

$$x = 0 \Rightarrow u = 1, \quad x = \pi \Rightarrow u = -1.$$

Donc

$$K = \int_1^{-1} \frac{-du}{1+u^2} = \int_{-1}^1 \frac{du}{1+u^2} = [\arctan u]_{-1}^1.$$

Ainsi,

$$K = \frac{\pi}{4} - \left( -\frac{\pi}{4} \right) = \left[ \frac{\pi}{2} \right].$$

- 4.a) Calculons les images des vecteurs de la base.

→ Pour  $Q_1 = 1$ , on a  $Q_1(1) = 1, Q_1'(1) = 0$  et  $Q_1''(1) = 0$ , donc

$$\varphi(Q_1) = -2(x-1)^2 = -4Q_3.$$

→ Pour  $Q_2 = x-1$ , on a  $Q_2(1) = 0, Q_2'(1) = 1$  et  $Q_2''(1) = 0$ , donc

$$\varphi(Q_2) = 2(x-1) = 2Q_2.$$

→ Pour  $Q_3 = \frac{1}{2}(x-1)^2$ , on a  $Q_3(1) = 0, Q_3'(1) = 0$  et  $Q_3''(1) = 1$ , donc

$$\varphi(Q_3) = -1 = -Q_1.$$

La matrice de  $\varphi$  dans la base  $(Q_1, Q_2, Q_3)$  est donc

$$\text{Mat}_{(Q_1, Q_2, Q_3)}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.b) Par linéarité,

$$\varphi(Q_1 - 2Q_3) = \varphi(Q_1) - 2\varphi(Q_3) = -4Q_3 + 2Q_1.$$

Ainsi,  $\boxed{\varphi(Q_1 - 2Q_3) = 2(Q_1 - 2Q_3)}.$

De même,

$$\varphi(Q_1 + 2Q_3) = \varphi(Q_1) + 2\varphi(Q_3) = -4Q_3 - 2Q_1.$$

Donc  $\boxed{\varphi(Q_1 + 2Q_3) = -2(Q_1 + 2Q_3)}.$

4.c) On a déjà

$$\varphi(Q_2) = 2Q_2,$$

et, d'après la question précédente,

$$\varphi(Q_1 - 2Q_3) = 2(Q_1 - 2Q_3), \quad \varphi(Q_1 + 2Q_3) = -2(Q_1 + 2Q_3).$$

Ainsi,

$$\boxed{E_2 = \text{Vect}(Q_2, Q_1 - 2Q_3)} \quad \text{et} \quad \boxed{E_{-2} = \text{Vect}(Q_1 + 2Q_3)}.$$

Les valeurs propres de  $\varphi$  sont donc 2 et -2.

5. Comme  $f^{-1}(x) > 0$  pour tout  $x > 0$ , il faut aussi  $f'(x) > 0$  pour tout  $x > 0$ . Ainsi  $\alpha > 0$ . L'équation se simplifie en composant par  $f$  :

$$f^{-1}(x) = f'(x) \iff f(f'(x)) = x.$$

Or

$$f'(x) = \lambda \alpha x^{\alpha-1}.$$

Donc

$$f(f'(x)) = \lambda \left( \lambda \alpha x^{\alpha-1} \right)^\alpha = \lambda^{\alpha+1} \alpha^\alpha x^{\alpha(\alpha-1)}.$$

On veut donc

$$\lambda^{\alpha+1} \alpha^\alpha x^{\alpha(\alpha-1)} = x$$

pour tout  $x > 0$ . On identifie les exposants :

$$\alpha(\alpha-1) = 1 \quad \text{donc} \quad \alpha^2 - \alpha - 1 = 0.$$

Comme  $\alpha > 0$ , la résolution de cette équation polynomiale de degré deux donne

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

On identifie ensuite les coefficients :

$$\lambda^{\alpha+1} \alpha^\alpha = 1.$$

Ainsi

$$\lambda = \alpha^{-\alpha/(\alpha+1)}.$$

Or  $\alpha^2 = \alpha + 1$ , donc

$$\lambda = \alpha^{-1/\alpha}.$$

Un couple possible est donc

$$\boxed{(\alpha, \lambda) = \left( \varphi, \varphi^{-1/\varphi} \right)}.$$

6. Dans la base canonique  $(1, x, x^2, x^3)$ , on calcule :

$$T_\alpha(1) = 0,$$

$$T_\alpha(x) = 1 + \alpha x,$$

$$T_\alpha(x^2) = 2(1 + \alpha)x^2,$$

$$T_\alpha(x^3) = -3x^2 + 3(\alpha + 2)x^3.$$

La matrice de  $T_\alpha$  dans la base  $(1, x, x^2, x^3)$  est donc

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \alpha) & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3(\alpha + 2) \end{bmatrix}.$$

Elle est triangulaire, donc son spectre est donné par ses coefficients diagonaux :

$$\boxed{\text{Sp}(T_\alpha) = \{0, \alpha, 2(1 + \alpha), 3(\alpha + 2)\}}.$$

• Une condition suffisante pour que tous les sous-espaces propres soient de dimension 1 est que les quatre valeurs propres précédentes soient deux à deux distinctes.

On doit donc éviter les égalités :

$$0 = \alpha, \quad 0 = 2(1 + \alpha), \quad 0 = 3(\alpha + 2),$$

$$\alpha = 2(1 + \alpha), \quad \alpha = 3(\alpha + 2), \quad 2(1 + \alpha) = 3(\alpha + 2).$$

Cela exclut

$$\alpha \in \{0, -1, -2, -3, -4\}.$$

Ainsi, une condition suffisante est

$$\boxed{\alpha \notin \{0, -1, -2, -3, -4\}}.$$

7. On veut simplifier

$$60 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

À partir des séries géométriques dérivées, on montre que pour  $|x| < 1$ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

En prenant  $x = \frac{1}{2}$ , on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6.$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} = 12.$$

En retirant le terme  $n = 1$ , qui vaut 1, on obtient

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} = 11.$$

De plus,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

donc la série est télescopique :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Finalement,

$$60 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 66 \times 11 + 6 \times 1.$$

Ainsi,

$$60 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 666.$$

8. Notons

$$B = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2} dt.$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann, on a la convergence de l'intégrale B. La convergence de la première est moins évidente..

L'affirmation est vraie.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2} dt.$$

Sur  $[\varepsilon, A]$ , avec  $0 < \varepsilon < A$ , procédons par intégration par parties avec les fonction  $u, v$  de classe  $\mathcal{C}^1$

$$u(t) = \sin(t)^2, \quad v'(t) = \frac{1}{t^2}, \quad v(t) = -\frac{1}{t}.$$

et à l'aide de la décomposition de  $\sin(a+b)$

$$u'(t) = 2 \cos(t) \sin(t) = \sin(2t).$$

Alors

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{\sin(t)^2}{t^2} dt = \left[ -\frac{\sin(t)^2}{t} \right]_{\varepsilon}^A + \int_{\varepsilon}^A \frac{\sin(2t)}{t} dt.$$

Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  et  $A \rightarrow +\infty$ , le crochet tend vers 0. Donc

$$B = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t} dt.$$

Avec le changement de variable affine  $u = 2t$ , on obtient

$$B = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du.$$

Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt.$$

Q1. On considère la matrice  $N = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ . Le programme suivant renvoie la matrice nulle.

Editeur

```
import numpy as np
N = np.array([[0,3,2],[-2,5,2],[2,-3,0]])
P = np.array([-4,8,-5,1])
M = np.eye(3)
R = np.zeros([3,3])
for i in range(4):
    R += P[i]*M
    M = np.dot(N,M)
print(R)
```

Console

```
[[0. 0. 0.]
 [0. 0. 0.]
 [0. 0. 0.]]
```

1. Identifier le polynôme  $P$  utilisé dans le programme. Le factoriser.
2. En déduire une inclusion vérifiée par  $\text{Sp}(N)$ .

Q1. On considère la matrice  $N = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ . Le programme suivant renvoie la matrice nulle.

Editeur

```
import numpy as np
N = np.array([[0,3,2],[-2,5,2],[2,-3,0]])
P = np.array([-4,8,-5,1])
M = np.eye(3)
R = np.zeros([3,3])
for i in range(4):
    R += P[i]*M
    M = np.dot(N,M)
print(R)
```

Console

```
[[0. 0. 0.]
 [0. 0. 0.]
 [0. 0. 0.]]
```

1. Identifier le polynôme  $P$  utilisé dans le programme. Le factoriser.
2. En déduire une inclusion vérifiée par  $\text{Sp}(N)$ .

Q1. On considère la matrice  $N = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ . Le programme suivant renvoie la matrice nulle.

Editeur

```
import numpy as np
N = np.array([[0,3,2],[-2,5,2],[2,-3,0]])
P = np.array([-4,8,-5,1])
M = np.eye(3)
R = np.zeros([3,3])
for i in range(4):
    R += P[i]*M
    M = np.dot(N,M)
print(R)
```

Console

```
[[0. 0. 0.]
 [0. 0. 0.]
 [0. 0. 0.]]
```

1. Identifier le polynôme  $P$  utilisé dans le programme. Le factoriser.
2. En déduire une inclusion vérifiée par  $\text{Sp}(N)$ .



**Q2.** On reprend la matrice

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donner une base de  $\text{Ker}(N - I_3)$ , puis de  $\text{Ker}(N - 2I_3)$ . Est-ce qu'on peut obtenir une base composée uniquement de vecteurs propres de  $N$ ?

**Q2.** On reprend la matrice

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donner une base de  $\text{Ker}(N - I_3)$ , puis de  $\text{Ker}(N - 2I_3)$ . Est-ce qu'on peut obtenir une base composée uniquement de vecteurs propres de  $N$ ?

**Q2.** On reprend la matrice

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donner une base de  $\text{Ker}(N - I_3)$ , puis de  $\text{Ker}(N - 2I_3)$ . Est-ce qu'on peut obtenir une base composée uniquement de vecteurs propres de  $N$ ?



**Q3.** Calculer

$$I = \int_0^1 5^x dx, \quad \text{puis} \quad J = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

avec le changement de variable  $u = \sqrt{e^x - 1}$ . Calculer avec un changement de variable trigonométrique simple

$$K = \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

**Q3.** Calculer

$$I = \int_0^1 5^x dx, \quad \text{puis} \quad J = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

avec le changement de variable  $u = \sqrt{e^x - 1}$ . Calculer avec un changement de variable trigonométrique simple

$$K = \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

**Q3.** Calculer

$$I = \int_0^1 5^x dx, \quad \text{puis} \quad J = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

avec le changement de variable  $u = \sqrt{e^x - 1}$ . Calculer avec un changement de variable trigonométrique simple

$$K = \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$



**Q4.** Soit  $\varphi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[x]$  défini par

$$\varphi(P) = -P''(1) + 2P'(1)(x-1) - 2P(1)(x-1)^2.$$

On pose

$$Q_1 = 1, \quad Q_2 = x-1, \quad Q_3 = \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

1. Donner la matrice de  $\varphi$  dans la base  $(Q_1, Q_2, Q_3)$ .
2. Calculer  $\varphi(Q_1 - 2Q_3)$  et  $\varphi(Q_1 + 2Q_3)$ .
3. En déduire les sous-espaces propres de  $\varphi$ .

**Q4.** Soit  $\varphi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[x]$  défini par

$$\varphi(P) = -P''(1) + 2P'(1)(x-1) - 2P(1)(x-1)^2.$$

On pose

$$Q_1 = 1, \quad Q_2 = x-1, \quad Q_3 = \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

1. Donner la matrice de  $\varphi$  dans la base  $(Q_1, Q_2, Q_3)$ .
2. Calculer  $\varphi(Q_1 - 2Q_3)$  et  $\varphi(Q_1 + 2Q_3)$ .
3. En déduire les sous-espaces propres de  $\varphi$ .

**Q4.** Soit  $\varphi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[x]$  défini par

$$\varphi(P) = -P''(1) + 2P'(1)(x-1) - 2P(1)(x-1)^2.$$

On pose

$$Q_1 = 1, \quad Q_2 = x-1, \quad Q_3 = \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

1. Donner la matrice de  $\varphi$  dans la base  $(Q_1, Q_2, Q_3)$ .
2. Calculer  $\varphi(Q_1 - 2Q_3)$  et  $\varphi(Q_1 + 2Q_3)$ .
3. En déduire les sous-espaces propres de  $\varphi$ .



**Q5.** Donner un couple de réels  $(\alpha, \lambda)$  tel que la fonction  $f : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \lambda x^\alpha \in \mathbb{R}_*^+$  soit solution de :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad f^{-1}(x) = f'(x).$$

*On pourra exprimer le résultat à l'aide du nombre d'or :  $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ .*

**Q5.** Donner un couple de réels  $(\alpha, \lambda)$  tel que la fonction  $f : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \lambda x^\alpha \in \mathbb{R}_*^+$  soit solution de :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad f^{-1}(x) = f'(x).$$

*On pourra exprimer le résultat à l'aide du nombre d'or :  $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ .*

**Q5.** Donner un couple de réels  $(\alpha, \lambda)$  tel que la fonction  $f : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \lambda x^\alpha \in \mathbb{R}_*^+$  soit solution de :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad f^{-1}(x) = f'(x).$$

*On pourra exprimer le résultat à l'aide du nombre d'or :  $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ .*



**Q6.** On considère l'endomorphisme  $T_\alpha$  de  $\mathbb{R}_3[x]$  défini par

$$T_\alpha(P)(x) = x(x-1)P''(x) + (1+\alpha x)P'(x).$$

1. Expliciter le spectre de  $T_\alpha$  en fonction de  $\alpha$ .
2. En déduire une condition suffisante sur  $\alpha$  pour que tous les sous-espaces propres soient de dimension 1.

**Q6.** On considère l'endomorphisme  $T_\alpha$  de  $\mathbb{R}_3[x]$  défini par

$$T_\alpha(P)(x) = x(x-1)P''(x) + (1+\alpha x)P'(x).$$

1. Expliciter le spectre de  $T_\alpha$  en fonction de  $\alpha$ .
2. En déduire une condition suffisante sur  $\alpha$  pour que tous les sous-espaces propres soient de dimension 1.

**Q6.** On considère l'endomorphisme  $T_\alpha$  de  $\mathbb{R}_3[x]$  défini par

$$T_\alpha(P)(x) = x(x-1)P''(x) + (1+\alpha x)P'(x).$$

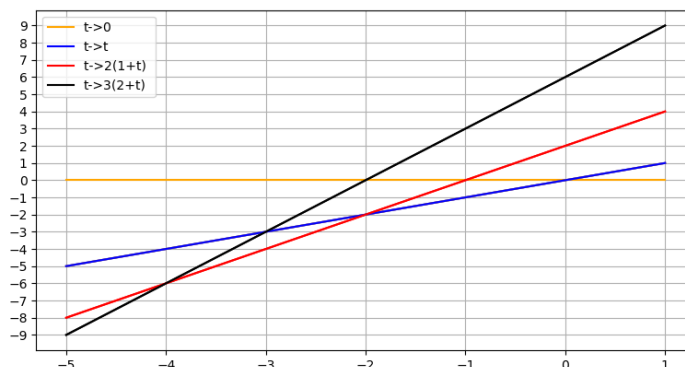
1. Expliciter le spectre de  $T_\alpha$  en fonction de  $\alpha$ .
2. En déduire une condition suffisante sur  $\alpha$  pour que tous les sous-espaces propres soient de dimension 1.



### Indication de la question 6

Editeur

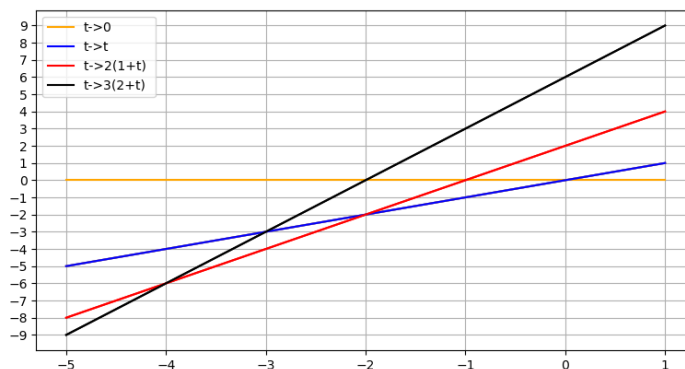
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
t=np.linspace(-5,1,100)
y0=np.zeros(len(t))
y1=t
y2=2*(1+t)
y3=3*(2+t)
plt.plot(t,y0,'orange')
plt.plot(t,y1,'blue')
plt.plot(t,y2,'red')
plt.plot(t,y3,'black')
plt.grid()
plt.show()
```



### Indication de la question 6

Editeur

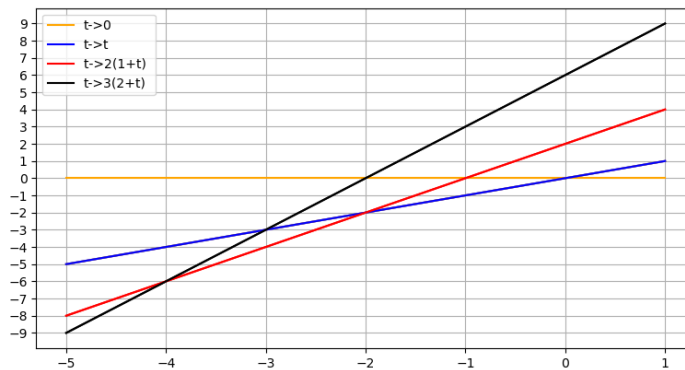
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
t=np.linspace(-5,1,100)
y0=np.zeros(len(t))
y1=t
y2=2*(1+t)
y3=3*(2+t)
plt.plot(t,y0,'orange')
plt.plot(t,y1,'blue')
plt.plot(t,y2,'red')
plt.plot(t,y3,'black')
plt.grid()
plt.show()
```



### Indication de la question 6

Editeur

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
t=np.linspace(-5,1,100)
y0=np.zeros(len(t))
y1=t
y2=2*(1+t)
y3=3*(2+t)
plt.plot(t,y0,'orange')
plt.plot(t,y1,'blue')
plt.plot(t,y2,'red')
plt.plot(t,y3,'black')
plt.grid()
plt.show()
```





**Q7.** Simplifier

$$60 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

**Q7.** Simplifier

$$60 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

**Q7.** Simplifier

$$60 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$



**Q8.** Vrai ou faux? Justifier.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2} dt.$$

**Q8.** Vrai ou faux? Justifier.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2} dt.$$

**Q8.** Vrai ou faux? Justifier.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2} dt.$$

## FEUILLE DE RÉPONSE

/10

**Q8:**