

## DS 1 - sujet A

### THÈME : RÉVISIONS ANALYSE ECG1, VALEURS PROPRES

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. L'énoncé est composé de trois exercices et d'un problème indépendants les uns des autres.*

#### Exercice 1

##### Étude de séries avec des intégrales généralisées

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on pose  $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)}$ .

1. Vérifier que  $I_n$  est une intégrale convergente.
2. a) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout réel  $x$  différent de  $-1$  et  $0$ , on ait :  $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}$ .  
b) En déduire la valeur de  $I_1$ .
3. a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à  $2$ , on a :  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$ .  
b) En déduire l'existence et la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .
4. Justifier que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $I_n + I_{n+1} = 1/n$ .
5. Recopier et compléter le programme Python suivant qui prend en argument  $n \in \mathbb{N}^*$  et renvoie  $I_n$ .

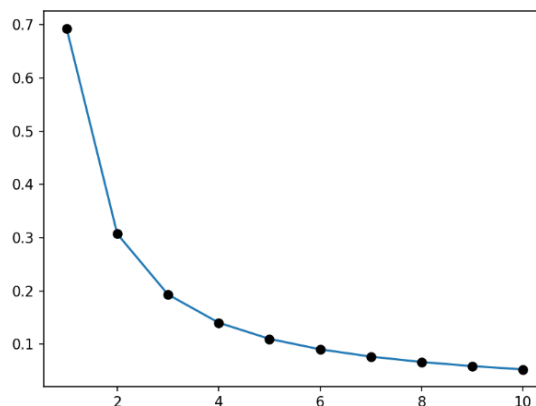
Editeur

```
import numpy as np
def Isuite(n):
    I= ....
    for i in range(1,n):
        ....
    return I
```

6. Adapter le programme précédent pour créer une nouvelle fonction Python nommée `suite` qui prend en argument  $n$  et renvoie la matrice ligne  $[I_1, I_2, \dots, I_n]$ .
7. Testons avec :

Console

```
import matplotlib.pyplot as plt
n=10
ind=np.linspace(1,n,n)
plt.plot(ind,suite(n),'ko')
plt.show()
```



Conjecturer la monotonie de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Prouver votre conjecture.

8. En déduire un équivalent de  $I_n$  puis donner la nature de la série de terme général  $I_n$ .

L'objectif de la suite est d'établir la convergence de la série  $\sum (-1)^{k-1} I_k$  et de donner la valeur de la somme.

9. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k$ .
- *Convergence*
    - Justifier que les suites  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont adjacentes.
    - En déduire la convergence de la série  $\sum (-1)^{k-1} I_k$ .
    - On note  $S$ , la valeur de la somme. Justifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$|S_{2n} - S| \leq \frac{1}{4n}.$$

- En déduire un programme Python qui prend en argument  $e \in \mathbb{R}_*^+$  et renvoie une approximation de  $S$  à  $e$ -près.
- *Calcul de la somme*
10. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on pose  $J_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)^2}$ .
- Montrer que  $J_n$  est une intégrale convergente.
  - Calculer  $J_0$ .
11. Pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ , exprimer  $J_k + J_{k-1}$  en fonction de  $I_k$ .
12. Déterminer alors, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , l'expression de  $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k$  en fonction de  $J_n$ .
13. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}, \quad 0 \leq J_n \leq \frac{1}{4(n-1)}.$$

Donner la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$ .

14. En déduire la somme de la série de terme général  $(-1)^{k-1} I_k$ .

## Exercice 2

Valeur propre d'un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[x]$

On considère l'application  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}_2[x]$  qui à tout polynôme  $P$  associe le polynôme  $\varphi(P)$  défini par

$$\varphi(P)(x) = (2x + 1)P(x) - (x^2 - 1)P'(x).$$

- Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[x]$ .
- Donner  $A$ , la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_2[x]$ .
- À l'aide du code suivant, donner le spectre de  $A$  et préciser la dimension des espaces propres.

Editeur

```
import numpy as np

A=np.array( ... ) # la matrice A

l1=np.linalg.matrix_rank(A+np.eye(3))
l2=np.linalg.matrix_rank(A-np.eye(3))
l3=np.linalg.matrix_rank(A-3*np.eye(3))
print('l1=',l1,'l2=',l2,'l3=',l3)
```

Console

```
>>> l1= 2 l2= 2 l3= 2
```

- Donner une base de vecteurs propres de  $A$ .
- En déduire une base de vecteurs propres pour  $\varphi$ .
- Pour quelles valeurs de  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'endomorphisme  $\varphi + \alpha \text{id}_{\mathbb{R}_2[x]}$  est un isomorphisme?

### Exercice 3

#### Endomorphisme sur un espace fonctionnel

On note  $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[0; 1]$  à valeurs réelles. Pour tout  $f \in E$ , on définit la fonction  $T(f)$  par

$$\forall x \in [0, 1], \quad T(f)(x) = \int_0^1 (x-t)f(t) dt.$$

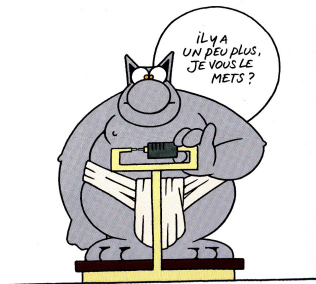
On note  $\text{id}_E$  l'endomorphisme identité de  $E$ .

1. Montrer que, pour tout  $f \in E$ , la fonction  $T(f)$  est une fonction affine.
2. Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .
3. On pose

$$e_0 : x \in [0; 1] \mapsto 1 \quad \text{et} \quad e_1 : x \in [0; 1] \mapsto x.$$

Montrer que  $\text{Im}(T) \subset \text{Vect}(e_0, e_1)$ .

4. Calculer  $T(e_0)$  et  $T(e_1)$ .
5. En déduire que le sous-espace vectoriel  $F = \text{Vect}(e_0, e_1)$  est stable par  $T$ , puis donner la matrice de l'endomorphisme induit par  $T$  sur  $F$  dans la base  $(e_0, e_1)$ .
6. Montrer que cette matrice n'admet aucune valeur propre réelle.
7. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . On suppose que  $\lambda$  est une valeur propre de  $T$ .
  - a) Montrer que tout vecteur propre associé à  $\lambda$  appartient à  $F$ .
  - b) En déduire que  $T$  n'admet aucune valeur propre non nulle.
8. On considère la fonction  $f_0 : x \in [0; 1] \mapsto \cos(2\pi x)$ . Vérifier que  $f_0$  est un élément non nul de  $\text{Ker}(T)$ .
9. En déduire le spectre de  $T$ .



Le chat - Geluck.

### Problème

#### Endomorphisme diagonalisable sur l'espace des quaternions

On considère les matrices suivantes de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On note  $E$  l'espace vectoriel engendré par  $(I, J, K, L)$  et  $\text{id}$  l'endomorphisme identité de  $E$ . On pose  $A = J + K$ .

#### Partie I

1. Montrer que  $(I, J, K, L)$  est une base de  $E$  et donner la dimension de  $E$ .
2. a) Exprimer  $JK, KL$  et  $LJ$  en fonction respectivement de  $L, J$  et  $K$ .  
 b) Calculer  $J^2, K^2$  et  $L^2$  puis en déduire que :  $KJ = -L, LK = -J$  et  $JL = -K$ .  
 c) En déduire que  $E$  est stable pour le produit matriciel. C'est-à-dire

$$\forall C, D \in E, \quad CD \in E.$$

3. Calculer  $A^2$ . En déduire que  $A$  est inversible et exprimer  $A^{-1}$  en fonction de  $A$ .
4. Inverse d'un élément de  $E \setminus \{0\}$

On appelle conjuguée d'un élément  $M = aI + bJ + cK + dL$  de  $E$  la matrice

$$\overline{M} = aI - bJ - cK - dL.$$

- a) Justifier que le produit  $M\overline{M}$  est colinéaire à  $I$ .
  - b) En déduire que tout élément non nul de  $E$  est inversible dans  $E$ , et donner son inverse.
  - c) Appliquer cette formule à  $A = J + K$  et retrouver l'expression de  $A^{-1}$ .
5. Proposer un code test qui prend en argument deux matrices et teste si elles sont égales.
  6. Recopier et compléter ce programme qui prend en argument  $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  puis vérifie si  $M \in E$ . De plus, si  $M$  est inversible, le code renvoie  $M^{-1}$ . On suppose que les matrices  $I, J, K$  et  $L$  sont déjà définies dans le programme.

```
import numpy as np

def MdansE(M):
    # Si M=aI+bJ+cK+dL
    a=M[0,0]
    b=...
    c=...
    d=...
    if ... :
        return "La matrice est nulle"

    if test(a*I+b*J+c*K+d*L, ... )==False :
        return "M n'est pas dans E"
    else:
        return ....
```

## Partie II : un endomorphisme de $E$

On considère maintenant l'application  $\varphi_A$  qui à toute matrice  $M$  de  $E$  associe :

$$\varphi_A(M) = AMA^{-1}$$

7. Montrer que  $\varphi_A$  est un endomorphisme de  $E$ .
8. Vérifier que  $\varphi_A \circ \varphi_A = \text{id}$ . Que peut-on en déduire sur le spectre de  $\varphi_A$ ?
9. Déterminer  $\text{Ker } \varphi_A$  puis montrer que  $\varphi_A$  est un isomorphisme de  $E$ .
10. Justifier que la matrice  $\Phi_A$  de  $\varphi_A$  dans la base  $(I, J, K, L)$  est donnée par

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

11. a) Donner les valeurs propres de la matrice de taille  $(2, 2)$  :  $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  et pour chaque valeur propre, préciser un vecteur propre associé.
- b) En déduire des vecteurs propres et le spectre de  $\varphi_A$ .
12. Conclure en montrant que la matrice de  $\varphi_A$  dans la base  $(I, J, K, L)$  est semblable à une matrice diagonale.
13. On pose  $p = \frac{1}{2}(\text{id} + \varphi_A)$  et  $q = \frac{1}{2}(\text{id} - \varphi_A)$ .
  - a) Montrer que  $p$  et  $q$  sont des projecteurs.
  - b) Déterminer  $\text{Ker}(p)$ ,  $\text{Im}(p)$ ,  $\text{Ker}(q)$  et  $\text{Im}(q)$ .

## Partie III : une notion d'orthogonalité

On rappelle que l'application, notée  $\text{Tr}$ , qui à toute matrice de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  associe sa trace (c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux) est une application linéaire de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$ .

On pose de plus

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{M}_4(\mathbb{R})^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (M, N) & \mapsto \text{Tr}({}^t M N). \end{cases}$$

14. Démontrer que, pour tout couple  $(P, Q)$  de  $E \times E$ ,  $\text{Tr}(PQ) = \text{Tr}(QP)$ .
15. Établir

$$\forall M, N \in E, \quad \Phi(M, \varphi_A(N)) = \Phi(N, \varphi_A(M)).$$

16. En déduire que

$$\forall M \in \text{Ker}(\varphi_A - \text{id}), \quad \forall N \in \text{Ker}(\varphi_A + \text{id}), \quad \Phi(M, N) = 0.$$

–FIN–

## DS 1 - sujet ♦

## THÈMES : RÉVISIONS ANALYSE ECG1, VALEURS PROPRES

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

L'énoncé est composé de deux problèmes indépendants.

## Problème 1

## Matrices stochastiques

Dans la suite de ce problème :

- $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
- On dit qu'une matrice  $M = (m_{ij})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice stochastique d'ordre  $n$  si tous ses coefficients sont des réels positifs ou nuls et si, pour tout entier  $i$  de  $[[1; n]]$  :

$$\sum_{k=1}^n m_{ik} = m_{i1} + m_{i2} + \dots + m_{in} = 1.$$

Ces matrices jouent un rôle important, notamment en calcul des probabilités.

- On note  $\mathcal{S}_n$  l'ensemble des matrices stochastiques d'ordre  $n$ .
- La famille  $\mathcal{B}$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et on note  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , les vecteurs de  $\mathcal{B}$  et  $v$  le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dont les composantes dans la base  $\mathcal{B}$  sont toutes égales à 1.
- $\text{id}$  désigne l'application identité sur  $\mathbb{R}^n$ .
- Soit  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de matrices. Notons  $a_{i,j}^{(k)}$  le coefficient de  $A_k$  en position  $(i, j)$ . On dit que  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers une matrice  $A = (a_{i,j})$  si, pour tout couple d'indices  $(i, j)$ , la suite de réels  $(a_{i,j}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $a_{i,j}$ .

## Partie A : un exemple

On considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est la matrice stochastique :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer une base du noyau de  $f - \text{id}$ .
2. Montrer que  $\mathcal{C} = (e_1 - e_2, e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_n)$  est une famille libre d'éléments de l'image de  $f - \text{id}$ , puis établir que c'en est une base.
3. Établir que  $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f - \text{id}) \oplus \text{Im}(f - \text{id})$ .
4. Soit  $p$  le projecteur sur le sous-espace vectoriel  $\text{Ker}(f - \text{id})$  parallèlement à  $\text{Im}(f - \text{id})$ .
  - a) Déterminer  $p(v)$ , puis  $p(e_1), p(e_2), \dots, p(e_n)$ .
  - b) Expliciter la matrice  $P$  associée à  $p$  dans la base  $\mathcal{B}$ .  
On s'assurera que tous les coefficients de  $P$  sont identiques.
5. Soit  $q$  le projecteur sur le sous-espace vectoriel  $\text{Im}(f - \text{id})$  parallèlement à  $\text{Ker}(f - \text{id})$ .
  - a) Que dire de  $p + q, p \circ q, q \circ p$ ?
  - b) Donner ensuite la matrice  $Q$  associée à  $q$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
6. À l'aide du code ci-dessous, conjecturer les valeurs propres de  $M$ .

```
import numpy as np

def test(n,l):
    M=1/(n-1)*(np.ones([n,n])-np.eye(n,n))
    r=np.linalg.matrix_rank(M-l*np.eye(n,n))
    return r
```

Console

```
>>> test(10,0)
10

>>> test(10,1)
9

>>> test(10,-1/9)
1
```

Console

```
>>> test(50,0)
50

>>> test(50,1)
49

>>> test(50,-1/49)
1
```

Console

```
>>> test(100,0)
100

>>> test(100,1)
99

>>> test(100,-1/99)
1
```

7. Déterminer les valeurs propres de  $f$  et les sous-espaces propres associés.
8. Exprimer  $M$  comme combinaison linéaire de  $P$  et  $Q$ .
9. a) Écrire une fonction Python qui prend en argument  $n$  et renvoie la matrice  $M$ .  
b) En déduire une fonction Python qui prend en arguments  $n, k$  et renvoie  $M^k$ .  
*Ci-dessous, quelques tests*

Console

```
>>> puissance(3,2)

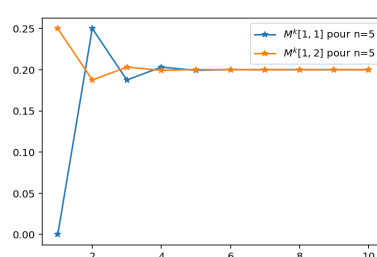
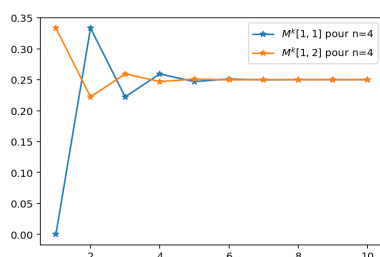
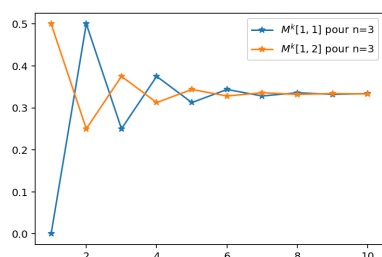
array([[0.25 , 0.375, 0.375],
       [0.375, 0.25 , 0.375],
       [0.375, 0.375, 0.25 ]])
```

Console

```
>>> puissance(3,3)

array([[0.375 , 0.3125, 0.3125],
       [0.3125, 0.375 , 0.3125],
       [0.3125, 0.3125, 0.375 ]])
```

On affiche aussi les premiers termes des coefficients de  $M^k$  en position (1,1) et (1,2) pour différentes valeurs de  $n$ .



10. a) Déduire de la question 8 l'expression de la matrice  $M^k$ , ainsi que sa limite lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$  en fonction des matrices  $P$  et  $Q$ .  
b) Exprimer de même l'inverse de  $M$  en fonction de  $P$  et  $Q$ .

## Partie B : propriétés spectrales dans le cas général

Soit  $V$  la matrice colonne d'ordre  $n$  dont les coefficients sont tous égaux à 1.

11. Montrer qu'une matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  à coefficients réels positifs ou nuls est stochastique si et seulement si  $MV = V$ .
12. En déduire un programme Python qui prend en argument une matrice  $A$  et teste si cette dernière est stochastique.
13. Justifier que, pour tout couple  $(A, B)$  d'éléments de  $\mathcal{S}_n$ , le produit  $AB$  appartient encore à  $\mathcal{S}_n$ , de même que les puissances positives de  $A$  et  $B$ .

Dans la suite, on désigne par  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dont la matrice  $M = (m_{ij})$  dans la base canonique  $\mathcal{B}$  est stochastique. Pour tout vecteur  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , on convient de noter :

$$\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}.$$

14. a) Établir que, pour tout élément  $x$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\|f(x)\| \leq \|x\|$ .  
b) En déduire que toutes les valeurs propres de  $f$  sont comprises dans  $[-1; 1]$ . Montrer que 1 est valeur propre de  $f$ .
15. Soit  $y$  un élément de  $\text{Im}(f - \text{id}) \cap \text{Ker}(f - \text{id})$ , écrit sous la forme  $f(x) - x$ . Pour tout nombre entier naturel non nul  $k$ , exprimer  $f^k(x)$  en fonction de  $k, x$  et  $y$ . Déduire du 14. a) que  $k\|y\| \leq 2\|x\|$ , puis prouver que  $y$  est nul.
16. Déduire des questions précédentes que  $\text{Ker}(f - \text{id}) \oplus \text{Im}(f - \text{id}) = \mathbb{R}^n$ .
17. Montrer que, pour tout élément  $x$  de  $\text{Im}(f - \text{id})$ ,  $f(x)$  appartient à  $\text{Im}(f - \text{id})$ . Établir que tout sous-espace propre de  $f$  associé à une valeur propre autre que 1 est inclus dans  $\text{Im}(f - \text{id})$ .

### Partie C : retour sur la partie A, lien avec les probabilités (facultative)

On considère une expérience aléatoire répétée. À chaque instant, un mobile se déplace sur les sommets d'un polygone régulier à  $n$  sommets. Chaque sommet est repéré par un entier de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ .

S'il se trouve à l'instant  $k$  sur le sommet  $i$ , alors à l'instant  $k+1$ , il choisit au hasard l'un des  $n-1$  sommets différents du sommet  $i$ , chacun avec la même probabilité. Il ne peut donc pas rester deux instants de suite sur le même sommet.

Pour tout entier naturel  $k$ , on note  $X_k$  la variable aléatoire égale au numéro du sommet du mobile à l'instant  $k$ .

18. a) Soient  $i$  et  $j$  deux éléments de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ . Déterminer  $\mathbf{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = j)$ . Vérifier que la matrice  $M$  étudiée dans la partie A contient exactement ces probabilités conditionnelles.  
b) Soient  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . À l'aide de l'étude précédente, montrer que

$$\mathbf{P}(X_k = i | X_0 = i) = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n-1}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

$$\text{Et si } j \neq i, \quad \mathbf{P}(X_k = j | X_0 = i) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \left(-\frac{1}{n-1}\right)^k.$$

### Problème 2

#### Endomorphisme sur des intégrales à paramètres

Dans ce problème, on considère  $E_0$ , l'ensemble des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  et bornées sur  $\mathbb{R}$ . Pour  $f \in E_0$ , on note

$$N_0(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

La partie B est indépendante des parties C et D.

#### Partie A : Définition de l'application $\Phi$

1. Vérifier que  $E_0$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .  
2. Rappeler la définition de la fonction arctangente, son graphe, ses limites en  $\pm\infty$  et sa dérivée.  
3. a) Soit  $f \in E_0$ . Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\int_0^{+\infty} \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} dt$  est absolument convergente.  
b) On définit alors l'application  $\Phi$  sur  $E$  par

$$\forall f \in E, \quad \Phi(f) : x \in \mathbb{R} \mapsto \Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} dt.$$

Soit  $f \in E_0$ , montrer que  $\Phi(f)$  est bornée et que  $N_0(\Phi(f)) \leq \frac{\pi^2}{4} N_0(f)$ .

#### Partie B : L'endomorphisme $\Phi$

Dans cette partie,  $f$  désigne un élément de  $E_0$  et  $x$  un réel.

4. Soit  $A$  un réel strictement positif et  $h \in \mathbb{R}^*$ . Vérifier que

$$|\Phi(f)(x+h) - \Phi(f)(x)| \leq N_0(f) \left( \int_0^A \frac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2} dt + \int_A^{+\infty} \frac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2} dt \right)$$

5. a) Justifier que pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|.$$

- b) En déduire que pour tout  $h \in \mathbb{R}^*$ , pour tout  $A > 0$

$$|\Phi(f)(x+h) - \Phi(f)(x)| \leq N_0(f) \left( |h| \int_0^A \frac{t}{1+t^2} dt + \pi \int_A^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \right)$$

6. a) Vérifier que pour  $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$

$$\arctan(\alpha) + \arctan(1/\alpha) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{puis} \quad \int_{1/\alpha}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(\alpha).$$

- b) Soit  $h \in \mathbb{R}^*$ . En choisissant  $A = \frac{1}{|h|}$ , établir que

$$|[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x)| \leq \frac{N_0(f)}{2} \cdot |h| \ln \left( 1 + \frac{1}{h^2} \right) + \pi N_0(f) \arctan |h|.$$

7. a) Calculer la limite de  $|h| \ln \left(1 + \frac{1}{h^2}\right)$  lorsque  $h \rightarrow 0$ .  
 b) Montrer alors que  $\Phi(f)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .  
 c) En déduire que  $\Phi : f \in E_0 \mapsto \Phi(f)$  est un endomorphisme de  $E_0$ .
8. À l'aide de la question 3.b), prouver l'inclusion  $\text{Sp}(\Phi) \subset \left[-\frac{\pi^2}{4}; \frac{\pi^2}{4}\right]$ .

Dans toute la suite de cette partie, on considère :

- $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $|\lambda| < \frac{4}{\pi^2}$ , on pourra poser  $\gamma = \frac{\pi^2}{4} |\lambda|$ .
- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Phi^n = \underbrace{\Phi \circ \dots \circ \Phi}_{n \text{ fois}}$ , autrement dit  $\Phi^0 = \text{id}_{E_0}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Phi^{n+1} = \Phi \circ \Phi^n$ .
- $f \in E_0 \setminus \{0\}$ , on posera  $M = N_0(f)$ .
- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_n = \lambda^n \Phi^n(f)$ .

9. Vérifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

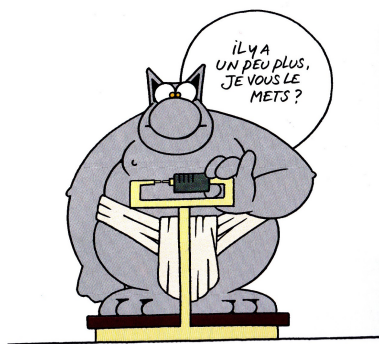
$$\varphi_{n+1} = \lambda \Phi(\varphi_n) \quad \text{et} \quad N_0(\varphi_{n+1}) \leq \gamma N_0(\varphi_n).$$

On pourra utiliser le fait que pour toute fonction  $g \in E$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $N_0(\lambda \cdot g) = |\lambda| N_0(g)$ .

10. En déduire que seule la fonction nulle vérifie  $\lambda \Phi(f) = f$ . Que peut-on alors dire de l'application  $\text{id}_{E_0} - \lambda \Phi$  ?
11. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $N_0(\varphi_n) \leq \gamma^n M$ .  
 En déduire la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} N_0(\varphi_n)$  puis la convergence, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , de  $\sum \varphi_n(x)$ .

On peut donc définir l'application  $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x)$ . On admet que dans ce cas,  $\varphi \in E$  et  $(\text{id}_{E_0} - \lambda \Phi)(\varphi) = f$ .

12. Que peut-on alors dire de l'application  $\text{id}_{E_0} - \lambda \Phi$  ?
13. Soit  $\mu \in \mathbb{R}^*$  tel que  $\Phi - \mu \text{id}_{E_0}$  ne soit pas bijective, montrer que  $|\mu| \leq \frac{\pi^2}{4}$ .



Le chat - Geluck.

### Partie C : Étude de $\Phi(1)$ et application au calcul de $\zeta(2)$

Dans cette partie, on s'intéresse à l'application

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt.$$

Ainsi  $g$  est l'image par  $\Phi$  de la fonction constante égale à 1.

14. Vérifier que  $g$  est impaire.
15. L'objectif de cette question est de montrer que  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{4}$ .  
 a) Vérifier successivement les deux égalités :

$$\frac{\pi^2}{4} - g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) dt = x \int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{x^2+t^2} dt.$$

- b) En découpant la seconde intégrale entre  $]0; 1]$  et  $[1; +\infty[$ , montrer que

$$0 \leq \frac{\pi^2}{4} - g(x) \leq \frac{\pi}{2x} + \frac{\ln(1+x^2)}{2x}.$$

- c) Conclure.

On admet dans la suite que la fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$  avec pour tout  $x \in ]0, 1[ \cup ]1; +\infty[$ ,

$$g'(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1} \quad \text{et} \quad g'(1) = \frac{1}{2} \quad (\star)$$

16. Justifier, pour tout  $x > 0$ , la convergence de l'intégrale  $\int_0^x \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt$ .

17. Montrer que, pour tout  $x > 0$ ,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt.$$

18. Montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2} dt$  est convergente et calculer sa valeur à l'aide des questions précédentes.

19. Vérifier que  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt$ .

On pourra, en le justifiant, utiliser le changement de variable  $u = \frac{1}{t}$ .

20. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Démontrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt = \sum_{k=0}^n \int_0^1 t^{2k} \ln t dt + \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} t^{2n+2} dt$$

(on admet la convergence des intégrales introduites).

21. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $\int_0^1 t^{2n} \ln t dt$ .

22. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} t^{2n+2} dt = 0$ .

23. Donner alors la valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ . En déduire celle de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

#### Partie D : Retour sur la dérivabilité de $g$ (facultative)

24. Preuve de la dérivabilité de  $g$  sur  $]0, +\infty[$ . Soit  $x$  un réel strictement positif.

a) Soient  $a$  et  $b$  deux réels distincts et  $I$  le segment d'extrémités  $a$  et  $b$ . Montrer que :

$$\left| \arctan b - \arctan a - \frac{b-a}{1+a^2} \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \max_{u \in I} \left( \frac{1}{1+u^2} \right).$$

b) Soient  $h \in \left] -\frac{x}{2}; \frac{x}{2} \right[$  et  $t$  un réel positif, établir :

$$\left| \arctan(t(x+h)) - \arctan(tx) - \frac{th}{1+t^2x^2} \right| \leq \frac{t^2h^2}{2} \frac{1}{1+\frac{t^2x^2}{4}}.$$

c) Montrer alors que, pour tout  $h \in \left] -\frac{x}{2}; \frac{x}{2} \right[$ ,

$$\left| g(x+h) - g(x) - h \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt \right| \leq 2h^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(4+t^2x^2)(1+t^2)} dt$$

d) En déduire que  $g$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et justifier que, pour tout  $x > 0$ ,

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt.$$

25. La fonction  $g$  est-elle dérivable sur  $] -\infty, 0[$ ? Si oui, que vaut  $g'(x)$  pour  $x < 0$ ?

26. Calcul de  $g'(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}_*^+$ .

a) Pour tout  $x \in \mathbb{R}_*^+ \setminus \{1\}$ , chercher des expressions  $A(x)$  et  $B(x)$ , indépendantes de  $t$ , telles que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} = A(x) \frac{t}{1+t^2x^2} + B(x) \frac{t}{1+t^2}.$$

b) Conclure en montrant les relations  $(\star)$ .

– FIN –

## DS 1 A - solution

Bonus pour toute erreur/coquille trouvée ou remarque intéressante sur ce corrigé.

**Exercice 1**  
adapté de EDHEC 2015

Le corrigé est une adaptation du corrigé officiel.

1. La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^n(x+1)}$  est continue sur  $[1, +\infty[$  et on a

$$\frac{1}{x^n(x+1) + \infty} \sim \frac{1}{x^{n+1}}$$

et comme  $n+1 \geq 2 > 1$ , l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+1}}$  converge et, grâce au critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues et positives, on peut conclure :  $I_n$  est une intégrale convergente.

- 2.a) On a les équivalences suivantes (valables pour tout  $x$  différent de  $-1$  et  $0$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+1)} &= \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)} &= \frac{a(x+1) - bx}{x(x+1)} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)} &= \frac{(a-b)x + a}{x(x+1)}. \end{aligned}$$

Par identification des coefficients au numérateur, on obtient :

$$\begin{cases} a-b=0 \\ a=1 \end{cases}$$

En conclusion, on trouve  $a=b=1$  et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \quad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

- 2.b) Pour tout réel  $x$  supérieur ou égal à 1, on a :

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{dx}{x(x+1)} &= \int_1^A \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= [\ln x - \ln(x+1)]_1^A \\ &= \ln A - \ln(A+1) + \ln 2. \end{aligned}$$

Pour terminer,

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln A - \ln(A+1)) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \frac{A}{A+1} = 0$$

d'où, après passage à la limite :

$$I_1 = \ln 2.$$

- 3) a) Pour tout réel  $x$  supérieur ou égal à 1, on a  $x+1 \geq 2$  donc, par décroissance de la fonction inverse sur  $[2, +\infty[$ , on obtient :  $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$ . Comme tout est positif, on peut écrire  $0 \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$ , et en multipliant par  $\frac{1}{x^n} \geq 0$ , on a :

$$0 \leq \frac{1}{x^n(x+1)} \leq \frac{1}{2x^n}$$

Il reste à intégrer de 1 à  $A$ , avec  $A \geq 1$  (bornes dans l'ordre croissant) et on trouve :

$$0 \leq \int_1^A \frac{1}{x^n(x+1)} dx \leq \frac{1}{2} \int_1^A \frac{1}{x^n} dx.$$

Ceci donne :

$$0 \leq \int_1^A \frac{1}{x^n(x+1)} dx \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} \right]_1^A$$

On a donc :

$$0 \leq \int_1^A \frac{1}{x^n(x+1)} dx \leq \frac{1}{2(n-1)} \left( 1 - \frac{1}{A^{n-1}} \right).$$

Comme  $n \geq 2$ , on a  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A^{n-1}} = 0$  et, après passage à la limite :

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}.$$

- 3.b) Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(n-1)} = 0$ , on obtient par encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

4. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on a :

$$I_n + I_{n+1} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+1}(x+1)}.$$

Par linéarité de l'intégration, on obtient :

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+1} &= \int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{x^n(x+1)} + \frac{1}{x^{n+1}(x+1)} \right) dx \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^{n+1}(x+1)} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}} dx \end{aligned}$$

On a déjà vu que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}} dx$  était convergente et de plus, on a :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^{n+1}} dx \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-1}{nx^n} \right]_1^A \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{A^n} \right) = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Finalement :

$$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n}.$$

- 5.

```
import numpy as np
def I(n):
    I=np.log(2)
    for i in range(1,n):
        I=1/i-I
    return I
```

6.

```
import numpy as np
def suite(n):
    I=np.log(2)
    L=[I]
    for i in range(1,n):
        I=1/i-I
        L.append(I)
    return L

import matplotlib.pyplot as plt

n=10
ind=np.linspace(1,n,n)
plt.plot(ind,suite(n),'ko')
plt.show()
```

7. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+1}(x+1)} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)}.$$

Par linéarité de l'intégration, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{x^{n+1}(x+1)} - \frac{1}{x^n(x+1)} \right) dx \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1-x}{x^{n+1}(x+1)} dx \end{aligned}$$

Comme  $x \geq 1$ , on a  $\frac{1-x}{x^{n+1}(x+1)} \leq 0$ , et ainsi  $I_{n+1} - I_n$  est l'intégrale, bornes dans l'ordre croissant, d'une fonction négative donc :  $I_{n+1} - I_n \leq 0$ .

Conclusion :

La suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante.

8. Grâce à la décroissance de la suite  $(I_n)$ , on a  $I_n \geq I_{n+1}$  d'où l'on tire

$$2I_n \geq I_n + I_{n+1},$$

et comme, avec la question 4), on sait que

$$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n},$$

on en déduit :

$$I_n \geq \frac{1}{2n}.$$

D'après la question 3a), on sait que  $I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$  et en regroupant ces deux dernières inégalités, on trouve :

$$\frac{1}{2n} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$$

En multipliant par  $2n > 0$ , on trouve :

$$1 \leq 2nI_n \leq \frac{n}{n-1}.$$

Par encadrement, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2nI_n = 1$ , ce qui signifie :

$$I_n \sim \frac{1}{2n}.$$

La série de terme général  $\frac{1}{n}$  est divergente donc, grâce au critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, on peut conclure :

La série de terme général  $I_n$  diverge.

9.a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= S_{2n+2} - S_{2n} \\ &= (-1)^{2n+2-1} I_{2n+2} - (-1)^{2n+1-1} I_{2n+1} \\ &= I_{2n+1} - I_{2n+2} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

car la suite  $(I_k)_k$  est décroissante.

On a aussi

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} &= S_{2n+3} - S_{2n+1} \\ &= (-1)^{2n+3-1} I_{2n+3} - (-1)^{2n+2-1} I_{2n+2} \\ &= I_{2n+3} - I_{2n+2} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

La suite  $(S_{2n+1})_n$  est décroissante.

Enfin,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1-1} I_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

d'après la question 3.b).

Notons que cela fonctionne lorsque :



- $(I_n)$  est positive;
- $(I_n)$  est décroissante;
- $(I_n)$  tend vers 0.

C'est le critère spécial des séries alternées.

9.b) D'après le critère des suites adjacentes, les suites

$$(S_{2n})_n \quad \text{et} \quad (S_{2n+1})_n$$

convergent vers une limite commune. Ensuite, d'après un résultat de cours sur les suites extraites, la suite  $(S_n)_n$  converge.

9.c) On a aussi l'encadrement dans le cas des suites extraites

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}.$$

D'où  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq S - S_{2n} \leq S_{2n+1} - S_{2n} = I_{2n+1}.$

Puis, la question 3.a) donne aussi

$$0 \leq I_{2n+1} \leq \frac{1}{2(2n+1-1)} = \frac{1}{4n}.$$

Ce qui conclut.

9.d) On utilise le code de la question 6 et l'encadrement de la question précédente.

$$\frac{1}{4n} \leq e \iff n \geq \frac{1}{4e}.$$

```
def approx(e):
    n=np.floor(1/(4*e))+1
    n=int(n) # conversion en entier
    L = suite(2*n)
    S = 0
    for k in range(1, 2*n+1):
        S += (-1)**(k-1) * L[k-1]
    return S
```

**10.a)** La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^n(x+1)^2}$  est continue sur  $[1, +\infty[$  et

$$\frac{1}{x^n(x+1)^2 + \infty} \sim \frac{1}{x^{n+2}}$$

et comme  $n+2 \geq 2 > 1$ , l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+2}}$  converge et, grâce au critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues et positives, on peut conclure :

$J_n$  est une intégrale convergente.

**10.b)** Pour tout réel  $x$  supérieur ou égal à 1, on a :

$$\int_1^A \frac{dx}{(x+1)^2} = \left[ \frac{-1}{x+1} \right]_1^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{A+1}$$

Comme  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A+1} = 0$ , on a, après passage à la limite :

$$J_0 = \frac{1}{2}.$$

**11.** Pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ , on a :

$$J_k + J_{k-1} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^k(x+1)^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{k-1}(x+1)^2}.$$

Par linéarité de l'intégration, on obtient :

$$\begin{aligned} J_k + J_{k-1} &= \int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{x^k(x+1)^2} + \frac{1}{x^{k-1}(x+1)^2} \right) dx \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1+x}{x^k(x+1)^2} dx \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k(x+1)} dx \end{aligned}$$

On a donc :

$$J_k + J_{k-1} = I_k.$$

**12.** De l'égalité précédente, on tire, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (J_k + J_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} J_k + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} J_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} J_k + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i J_i \end{aligned}$$

En écrivant  $(-1)^i = -(-1)^{i-1}$ , on obtient :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} J_k - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i-1} J_i$$

Par télescopage, on trouve :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k = (-1)^{n-1} J_n + J_0$$

Comme  $J_0 = \frac{1}{2}$ , on a finalement :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k = (-1)^{n-1} J_n + \frac{1}{2}.$$

**13.** Pour tout réel  $x$  supérieur ou égal à 1, on a  $x+1 \geq 2$  donc  $(x+1)^2 \geq 4$ , par stricte positivité de  $(x+1)^2$  et par décroissance de la fonction inverse sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on obtient :

$$0 \leq \frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{4}$$

En multipliant par  $\frac{1}{x^n} \geq 0$ , on trouve :

$$0 \leq \frac{1}{x^n(x+1)^2} \leq \frac{1}{4x^n}.$$

Le calcul est le même qu'à la question 3a) où l'on a montré que  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{n-1}$ . On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \quad 0 \leq J_n \leq \frac{1}{4(n-1)}.$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4(n-1)} = 0$ , on en déduit, par encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0.$$

**14.** D'après la question 11., on a :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k = (-1)^{n-1} J_n + \frac{1}{2}$$

On en déduit :

$$\left| \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k - \frac{1}{2} \right| = |(-1)^{n-1} J_n| = J_n,$$

car  $J_n$  est positif. Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$ , on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k - \frac{1}{2} \right) = 0,$$

ce qui prouve que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k = \frac{1}{2}.$$

Ceci signifie que la série de terme général  $(-1)^{n-1} I_n$  est convergente et sa somme est :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} I_k = \frac{1}{2}.$$

**Exercice 2**  
Valeur propre d'un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[x]$

1. On a, pour tout  $P = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$  :

$$\begin{aligned}\varphi(P)(x) &= (2x+1)(ax^2 + bx + c) - (x^2 - 1)(2ax + b) \\ &= (a+b)x^2 + (2a+b+2c)x + (b+c).\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[x].$$

De plus, pour  $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[x]$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha P + Q)(x) &= (2x+1)(\alpha P + Q)(x) - (x^2 - 1)(\alpha P' + Q')(x) \\ &= \alpha \left( (2x+1)P(x) - (x^2 - 1)P'(x) \right) \\ &\quad + \left( (2x+1)Q(x) - (x^2 - 1)Q'(x) \right) \\ &= \alpha \varphi(P)(x) + \varphi(Q)(x).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[x].}$$

2. En reprenant le calcul précédent :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Le calcul Python affirme que pour  $\lambda$  valant 1, -1 et 3,

$$\text{rg}(A - \lambda I_3) = 2.$$

D'après la formule du rang

$$\dim E_\lambda(A) = 1.$$

Ainsi, 1, -1 et 3 sont trois valeurs propres de A. Comme il y a au plus trois valeurs propres :

$$\boxed{\text{Sp}(A) = \{-1; 1; 3\}.}$$

*Remarque. Voici la rédaction sans le calcul Python :*

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\text{rg}(A - \lambda I_3)$$

$$= \text{rg} \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \text{rg} \begin{bmatrix} 2 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1+2\lambda-\lambda^2 & -2(1-\lambda) \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - (1-\lambda)L_2 \end{array}$$

$$= \text{rg} \begin{bmatrix} 2 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \star \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - (1+2\lambda-\lambda^2)L_2 \\ \star \end{array}$$

où

$$\begin{aligned}\star &= -2(1-\lambda) - (1+2\lambda-\lambda^2)(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)(-3-2\lambda+\lambda^2) = (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-3)\end{aligned}$$

Finalement, on retrouve

$$\text{Sp}(A) = \{-1; 1; 3\}.$$

4.

$$\begin{aligned}X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_1(A) &\iff \begin{cases} x+y=x \\ 2x+y+2z=y \\ y+z=z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y=0 \\ 2x+2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ z=-x \end{cases}\end{aligned}$$

D'où

$$E_1(A) = \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right).$$

De même, on trouve

$$E_3(A) = \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

$$E_{-1}(A) = \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

5. On trouve

$$\begin{aligned}E_{-1}(\varphi) &= \text{Vect}(1-2x+x^2) \\ E_1(\varphi) &= \text{Vect}(1-x^2) \\ E_3(\varphi) &= \text{Vect}(1+2x+x^2).\end{aligned}$$

6. L'endomorphisme de dimension finie  $\varphi + \alpha \text{id}_{\mathbb{R}_2[x]}$  est bijectif si et seulement si  $-\alpha$  n'est pas valeur propre de  $\varphi$ . Ainsi

$$\boxed{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-3; -1; 1\},}$$

### Exercice 3

#### Endomorphisme sur un espace fonctionnel

1. Soit  $f \in E$ . Soit  $x \in [0, 1]$ . Par linéarité de l'intégrale :

$$T(f)(x) = \left( \int_0^1 f(t) dt \right) x - \int_0^1 t f(t) dt.$$

Si on pose

$$\alpha_f = \int_0^1 f(t) dt \quad \text{et} \quad \beta_f = - \int_0^1 t f(t) dt,$$

on a :

$$\forall x \in [0, 1], \quad T(f)(x) = \alpha_f x + \beta_f.$$

La fonction  $T(f)$  est donc bien affine.

2. D'après ce qui précède,  $T(f)$  est affine donc continue sur  $[0; 1]$ . Soit

$$T(f) \in E.$$

Soient  $f, g \in E, \lambda \in \mathbb{R}$ . Soit  $x \in [0; 1]$ .

$$\begin{aligned}T(\lambda f + g)(x) &= \int_0^1 (x-t)(\lambda f + g)(t) dt \\ &= \lambda \int_0^1 (x-t)f(t) dt + \int_0^1 (x-t)g(t) dt.\end{aligned}$$

Ainsi

$$T(\lambda f + g)(x) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x).$$

Cela étant valable pour tout  $x \in [0; 1]$  :

$$T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g).$$

Remarque. Dans la rédaction, il faut bien distinguer la fonction  $T(f)$  du réel  $T(f)(x)$ .

En conclusion,  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .

3. On a vu que

$$\forall x \in [0; 1], \quad T(f)(x) = \alpha_f x + \beta_f = \alpha_f e_1(x) + \beta_f e_0(x).$$

$$\text{D'où} \quad T(f) = \alpha_f e_1 + \beta_f e_0 \in \text{Vect}(e_1, e_0).$$

Dès lors

$$\text{Im}(T) \subset \text{Vect}(e_1, e_0).$$

4. Soit  $x \in [0; 1]$ ,

$$\begin{aligned} T(e_0)(x) &= \int_0^1 (x-t)e_0(t) dt = \int_0^1 (x-t) \times 1 dt \\ &= \left[ xt - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = x - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} T(e_1)(x) &= \int_0^1 (x-t)e_1(t) dt = \int_0^1 (x-t) \times t dt \\ &= \left[ \frac{xt^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{x}{2} - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Finalement

$$T(e_0) = e_1 - \frac{1}{2}e_0 \quad \text{et} \quad T(e_1) = \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{3}e_0.$$

5. La famille  $(e_0, e_1)$  est génératrice de  $F$  avec

$$T(e_0) \in F, \quad T(e_1) \in F.$$

Ainsi  $F$  est stable par  $T$ . À l'aide du calcul précédent

$$M = \text{Mat}_{(e_0, e_1)}(T) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

6. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) = \frac{1}{3} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi,} \quad \det(M - \lambda I_2) = \lambda^2 + \frac{1}{12} > 0.$$

Ainsi  $M - \lambda I_2$  est toujours inversible, il n'y a pas de valeur propre réelle.

7.a) Soit  $f$  un vecteur propre de  $T$  associé à la valeur propre  $\lambda \neq 0$  :

$$T(f) = \lambda f$$

$$\text{puis} \quad f = \frac{1}{\lambda} T(f) = T\left(\frac{1}{\lambda} f\right).$$

En particulier

$$f \in \text{Im}(T) = F.$$

7.b) Dès lors  $f$  est un vecteur propre pour l'endomorphisme restreint de  $T$ . Or ce dernier n'a pas de valeur propre puisque sa matrice représentative dans  $(e_0, e_1)$  n'a pas de valeur propre. On a donc une contradiction et  $T$  n'a aucune valeur propre réelle non nulle.

8. On a par le calcul

$$\int_0^1 f_0(t) dt = \left[ \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi} \right]_0^1 = 0$$

et via une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 t f_0(t) dt &= \int_0^1 t \cos(2\pi t) dt \\ &= \left[ \frac{t \sin(2\pi t)}{2\pi} \right]_0^1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sin(2\pi t) dt \\ &= 0 + \frac{1}{4\pi^2} [\cos(2\pi t)]_0^1 \\ &= \frac{1}{4\pi^2} (\cos(2\pi) - \cos(0)) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 t f_0(t) dt = 0.$$

D'où pour tout  $x \in [0; 1]$

$$\begin{aligned} T(f_0)(x) &= \int_0^1 (x-t)f_0(t) dt \\ &= x \underbrace{\int_0^1 f_0(t) dt}_{=0} - \underbrace{\int_0^1 t f_0(t) dt}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi  $T(f_0)$  est l'application nulle :

$$f_0 \in \text{Ker}(T).$$

9. D'après la question 7,

$$\text{Sp}(T) \subset \{0\},$$

et la question 8 donne

$$0 \in \text{Sp}(T), \quad \text{soit} \quad \{0\} \subset \text{Sp}(T).$$

Par double inclusion, on a

$$\boxed{\{0\} = \text{Sp}(T)}.$$

### Problème adapté d'EDHEC 2007

1. Par définition  $(I, J, K, L)$  est une famille génératrice de  $E$ . Montrons que cette famille est libre. Soient  $a, b, c$  et  $d$  quatre réels tels que :  $aI + bJ + cK + dL = 0_E$ . C'est-à-dire

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$c \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_E.$$

Ainsi :

$$\begin{bmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ c & d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix} = 0_E.$$

Alors  $a = b = c = d = 0$ . La famille  $(I, J, K, L)$  est une famille libre de  $E$ .

Concluons :

$(I, J, K, L)$  est une base de  $E$ .

Cette famille étant de cardinal quatre,

$E$  est de dimension 4.

**2.a,b)** Vérifier que

$$JK = L, \quad KL = J, \quad LJ = K$$

$$J^2 = -I, \quad K^2 = -I, \quad L^2 = -I.$$

$J = KL$  donc  $KJ = K^2L = -IL = -L$ . De même :  $K = LJ$  donc  $LK = L^2J = -IJ = -J$ ;  $L = JK$  donc  $JL = J^2K = -IK = -K$ .

$$KJ = -L, \quad LK = -J \text{ et } JL = -K$$

**2.c)** Soient  $N, M \in E$ .

Il existe donc  $x, x', y, y', z, z', t, t' \in \mathbb{R}$  tels que

$$M = \begin{bmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & -t & z \\ z & t & x & -y \\ t & -z & y & x \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} x' & -y' & -z' & -t' \\ y' & x' & -t' & z' \\ z' & t' & x' & -y' \\ t' & -z' & y' & x' \end{bmatrix}.$$

Par suite, en reprenant les calculs de la question précédente

$$\begin{aligned} MN &= (xI + yJ + zK + tL)(x'I + y'J + z'K + t'L) \\ &= xx'I + xy'J + xz'K + xt'L \\ &\quad + yx'J + yy'J^2 + yz'JK + yt'JL \\ &\quad + zx'K + zy'KJ + zz'K^2 + zt'KL \\ &\quad + tx'L + ty'LJ + tz'LK + tt'L^2 \\ &= xx'I + xy'J + xz'K + xt'L \\ &\quad + yx'J - yy'I + yz'L - yt'K \\ &\quad + zx'K - zy'L - zz'I + zt'J \\ &\quad + tx'L + ty'K - tz'J - tt'I. \end{aligned}$$

$MN$  est une combinaison linéaire de la famille  $(I, J, K, L)$ .  
 $MN$  est donc un élément de  $E$ .

$E$  est donc stable par produit matriciel.

**3.**

$$\begin{aligned} A^2 &= (J + K)^2 = (J + K)(J + K) \\ &= J^2 + KJ + JK + K^2 = -I - L + L - I \\ &= -2I. \end{aligned}$$

Alors

$$A \left( -\frac{1}{2}A \right) = I \quad \text{et} \quad \left( -\frac{1}{2}A \right) A = I.$$

La matrice  $A$  est donc inversible et d'inverse  $-\frac{1}{2}A$ .  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}A.$$

**4.a)** On a

$$\begin{aligned} M\overline{M} &= (aI + bJ + cK + dL)(aI - bJ - cK - dL) \\ &= a^2I - abJ - acK - adL \\ &\quad + baJ - b^2J^2 - bcJK - bdJL \\ &\quad + caK - cbKJ - c^2K^2 - cdKL \\ &\quad + daL - dbLJ - dcLK - d^2L^2 \\ &= a^2I - abJ - acK - adL \\ &\quad + baJ + b^2I - bcL + bdK \\ &\quad + caK + bcL + c^2I - cdJ \\ &\quad + adL - bdK + cdJ + d^2I. \end{aligned}$$

On constate que les termes symétriques par rapport à la diagonale sont opposés. Dans la somme, il ne reste que les termes diagonaux :

$$M\overline{M} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I.$$

En particulier  $M\overline{M}$  et  $I$  sont colinéaires.

**4.b)** Si  $M$  est non nul,

$$\alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0 \quad \text{et} \quad M \left( \frac{1}{\alpha} \overline{M} \right) = I_4.$$

On en déduit que  $M$  est inversible (à droite) donc inversible avec

$$M^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \overline{M}.$$

**4.c)** Dans ce cas  $a = 0, b = 1, c = 1$  et  $d = 0$ . D'où

$$A^{-1} = \frac{1}{0^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2} \overline{A} = -\frac{1}{2}(J + K) = -\frac{1}{2}A.$$

**5.** Donnons un code possible :

```
def test(A,B):
    n,p=np.shape(A)
    m,l=np.shape(B)
    if n!=m or p!=l :
        return False
    for i in range(n):
        for j in range(p):
            if A[i,j]!=B[i,j]:
                return False
    return True
```

**6.**

```
import numpy as np

def MdansE(M):
    # Si M=aI+bJ+cK+dL
    a=M[0,0]
    b=M[1,0]
    c=M[2,0]
    d=M[3,0]
    if a==0 and b==0 and c==0 and d==0 :
        return "La matrice est nulle"

    if test(a*I+b*J+c*K+d*L,M)==False :
        return "M n'est pas dans E"
    else:
        return (a*I-b*J-c*K-d*L)/(a^2+b^2+c^2+d^2)
```

On peut aussi mettre pour le test de nullité :

`test(M, np.zeros((4,4)))`

7. Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $M, N \in E$ .

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N)A^{-1} = (\lambda AM + AN)A^{-1} \\ &= \lambda AMA^{-1} + ANA^{-1} \\ &= \lambda \varphi_A(M) + \varphi_A(N).\end{aligned}$$

$\varphi_A$  est donc une application linéaire.

• Soit  $M \in E$ .

$$\begin{aligned}\varphi_A(M) &= AMA^{-1} \\ &= AM \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}AMA.\end{aligned}$$

Les matrices  $M, A, -A/2$  sont trois éléments de  $E$  et  $E$  est stable par le produit matriciel donc  $-\frac{1}{2}AMA$  est encore un élément de  $E$ . Ainsi  $\varphi_A(M)$  appartient à  $E$ .  $\varphi_A$  est bien une application de  $E$  dans  $E$ .

$\varphi_A$  est un endomorphisme de  $E$ .

8. Soit  $M \in E$ .

$$\begin{aligned}\varphi_A \circ \varphi_A(M) &= \varphi_A(AMA^{-1}) \\ &= A(AMA^{-1})A^{-1} \\ &= A^2M(A^2)^{-1}.\end{aligned}$$

Or on a vu à la question 3 que

$$A^2 = -2I_4,$$

d'où

$$\begin{aligned}\varphi_A \circ \varphi_A(M) &= (-2I_4)M(-2I_4)^{-1} \\ &= -2M \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} I_4 \\ &= M.\end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout  $M \in E$ , on obtient

$$\varphi_A \circ \varphi_A = \text{id}_E.$$

Dès lors,  $x^2 - 1$  est un polynôme annulateur de  $\varphi_A$ . Comme ce polynôme a deux racines :  $\pm 1$ . On peut affirmer que

$$\text{Sp}(\varphi_A) \subset \{-1; 1\}.$$

9. Rédaction 1.

Soit  $M$  un élément de  $\text{Ker } \varphi_A$ . C'est-à-dire  $AMA^{-1} = 0_E$ . Alors

$$\begin{aligned}M &= A^{-1}AMA^{-1}A \\ &= A^{-1}0_EA = 0_E.\end{aligned}$$

Ce qui suffit pour dire que :

$$\text{Ker } \varphi_A = \{0_E\}.$$

Dès lors,  $\varphi_A$  est un endomorphisme de dimension finie injectif,

$\varphi_A$  est un isomorphisme.

Rédaction 2.

Vérifier que si on pose

$$g : M \in E \mapsto A^{-1}MA \in E,$$

alors

$$g \circ \varphi_A = \text{id}_E \quad \text{et} \quad \varphi_A \circ g = \text{id}_E.$$

Par la caractérisation des applications bijectives,  $\varphi_A$  est bijective et  $\varphi_A^{-1} = g$ .

10. Vérifier que

$$\varphi_A(I) = I, \quad \varphi_A(J) = K, \quad \varphi_A(K) = J, \quad \varphi_A(L) = -L.$$

Ceci permet de dire que la matrice  $\Phi_A$  de  $\varphi_A$  dans la base  $(I, J, K, L)$  est :

$$\Phi_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

11.a,b) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\det(S - \lambda I_2) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1).\end{aligned}$$

Dès lors  $S - \lambda I_2$  est non inversible si et seulement si  $\lambda = \pm 1$ .

$$\text{Sp}(S) = \{\pm 1\}.$$

De plus, on vérifie que

$$E_1(S) = \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad E_{-1}(S) = \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

On montre que le spectre de  $\varphi_A$  est

$$\text{Sp}(\varphi_A) = \{-1; 1\}.$$

Et en s'appuyant sur les vecteurs propres  $S$ , on peut « deviner » des vecteurs propres de  $\Phi_A$ .

$$E_{-1}(\Phi_A) = \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$E_1(\Phi_A) = \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

D'où

$$\begin{aligned}E_{-1}(\varphi_A) &= \text{Vect}(K - J, L) \\ E_1(\varphi_A) &= \text{Vect}(I, K + J).\end{aligned}$$

12. Dans la base  $(I, K + J, K - J, L)$ , la matrice de  $\varphi_A$  est maintenant

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Les matrices  $\Phi_A$  et  $D$  sont semblables car elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

**13.a)** Les applications  $p$  et  $q$  sont linéaires. De plus,

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{1}{4} (\text{id}_E + \varphi_A)^2 \\ &= \frac{1}{4} (\text{id}_E^2 + 2\text{id}_E \circ \varphi_A + \varphi_A^2) \quad (\text{id}_E, \varphi_A \text{ commutent}) \\ &= \frac{1}{4} (2\text{id}_E + 2\varphi_A). \end{aligned}$$

Ainsi  $p^2 = p$ .

De même  $q^2 = q$ .

On a donc bien deux projecteurs de  $E$ .

**13.b)** Soit  $M \in E$ .

$$\begin{aligned} M \in \text{Ker } p &\iff M + \varphi_A(M) = 0 \\ &\iff \varphi_A(M) = -M \\ &\iff M \in E_{-1}(\varphi_A) \\ &\iff M \in \text{Vect}(K - J, L). \end{aligned}$$

Ensuite, sachant que  $p$  est un projecteur,

$$\begin{aligned} M \in \text{Im } p &\iff M \in \text{Ker}(\text{id}_E - p) \\ &\iff M \in \text{Ker} \left( \frac{1}{2} (\text{id}_E - \varphi_A) \right) \\ &\iff M - \varphi_A(M) = 0 \\ &\iff \varphi_A(M) = M \\ &\iff M \in E_1(\varphi_A) = \text{Vect}(I, K + J). \end{aligned}$$

Comme

$$p + q = \text{id}_E,$$

les deux projecteurs sont associés :

$$\text{Ker } p = \text{Im } q \quad \text{et} \quad \text{Ker } q = \text{Im } p.$$

**14.** Voir cours.

**15.** Soient  $M, N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \Phi(M, \varphi_A(N)) &= \text{Tr}({}^t M \varphi_A(N)) \\ &= \text{Tr}({}^t M A N A^{-1}) \\ &= \text{Tr}({}^t ({}^t M A N A^{-1})) \\ &= \text{Tr}({}^t A^{-1} {}^t N {}^t A M) \\ &= \text{Tr}({}^t N {}^t A M {}^t A^{-1}). \end{aligned}$$

Comme  $J$  et  $K$  sont antisymétriques, les matrices  $A$  et  $A^{-1} = -\frac{1}{2}A$  le sont aussi. On peut donc simplifier

$$\begin{aligned} {}^t A M {}^t A^{-1} &= (-A) M (-A^{-1}) \\ &= A M A^{-1} \\ &= \varphi_A(M). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \Phi(M, \varphi_A(N)) &= \text{Tr}({}^t N, \varphi_A(M)) \\ &= \Phi(N, \varphi_A(M)). \end{aligned}$$

On dira que l'endomorphisme  $\varphi_A$  est symétrique pour le produit scalaire  $\Phi$ .

**16.** Soient  $M \in \text{Ker}(\varphi_A - \text{id})$ ,  $N \in \text{Ker}(\varphi_A + \text{id})$ . On a donc

$$\begin{aligned} \varphi_A(M) &= M \quad \text{et} \quad \varphi_A(N) = -N. \\ \Phi(M, N) &= \Phi(\varphi_A(M), N) \\ &= \Phi(M, \varphi_A(N)) \\ &= \Phi(M, -N) \\ &= -\Phi(M, N). \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\boxed{\Phi(M, N) = 0.}$$

On dira que  $\text{Ker}(\varphi_A - \text{id})$  et  $\text{Ker}(\varphi_A + \text{id})$  sont orthogonaux pour le produit scalaire  $\Phi$ .

## DS 1 ♦ solution

Bonus pour toute erreur/coquille trouvée ou remarque intéressante sur ce corrigé.

### Problème 1 adapté de HEC 1993

1. Soit  $X = (x_i)_{i=1 \dots n} \in \mathbb{R}^n$ . On a les équivalences

$$X \in \text{Ker}(f - \text{id}) \Leftrightarrow f(X) = X \Leftrightarrow (n-1)f(X) = (n-1)X$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = (n-1)x_1 \\ x_1 + 0 + x_3 + \dots + x_n = (n-1)x_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \dots + 0 + 0 = (n-1)x_n. \end{cases}$$

En sommant toutes les lignes, on a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = nx_1 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = nx_n. \end{cases}$$

On en déduit que ce système est équivalent à

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

En posant  $v = (1, \dots, 1)$ , on continue l'équivalence avec

$$X = x_1 \cdot v \iff X \in \text{Vect}(v).$$

Finalement

$$\boxed{\text{Ker}(f - \text{id}) = \text{Vect}(v)}.$$

Comme  $v$  est non nul, il forme une base du noyau.

2. Avec la notation précédente,  $v = \sum_{i=1}^n e_i$ . Pour tout  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\begin{aligned} f(e_j) - e_j &= \sum_{i \neq j} \frac{1}{n-1} e_i - e_j = \left( \frac{1}{n-1} (v - e_j) \right) - e_j \\ &= \frac{1}{n-1} v - \left( \frac{1}{n-1} - 1 \right) e_j \\ &= \frac{1}{n-1} v - \frac{n}{n-1} e_j \end{aligned}$$

Soit  $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , posons  $w_j = e_1 - e_j$ . Par linéarité de  $f$

$$\begin{aligned} f(w_j) - w_j &= f(e_1) - f(e_j) - e_1 + e_j \\ &= f(e_1) - e_1 - (f(e_j) - e_j) \\ &= \frac{1}{n-1} v - \frac{n}{n-1} e_1 - \left( \frac{1}{n-1} v - \frac{n}{n-1} e_j \right) \\ &= -\frac{n}{n-1} (e_1 - e_j) \\ &= -\frac{n}{n-1} w_j. \end{aligned}$$

Si on note  $g = f - \text{id}$

$$g\left(-\frac{n-1}{n} w_j\right) = e_1 - e_j.$$

Donc

$$\boxed{e_1 - e_j \in \text{Im } g = \text{Im}(f - \text{id})}.$$

• On vérifie que la famille  $\mathcal{C}$  est libre.

$$\underbrace{\text{Vect}(e_1 - e_2, \dots, e_1 - e_n)}_{\dim=n-1} \subset \text{Im}(f - \text{id}) \subset \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\dim \mathbb{R}^n = n}$$

Or  $f \neq \text{id}$ , et  $\dim \text{Im}(f - \text{id}) < n$  On a donc l'égalité

$$\text{Vect}(e_1 - e_2, \dots, e_1 - e_n) = \text{Im}(f - \text{id}).$$

C'est donc une famille génératrice puis une base de l'image.

3. On a vu que :

$$\text{Ker } f - \text{id} = \text{Vect}(v)$$

$$\text{Im } f - \text{id} = \text{Vect}(e_1 - e_2, \dots, e_1 - e_n)$$

De plus, on vérifie que la famille  $(v, e_1 - e_2, e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_n)$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ . Par concaténation de bases, cela prouve que

$$\boxed{\text{Ker}(f - \text{id}) \oplus \text{Im}(f - \text{id}) = \mathbb{R}^n}.$$

4. On a

$$v = \underbrace{v}_{\in \text{Ker } f - \text{id}} + \underbrace{0}_{\in \text{Im } f - \text{id}}$$

Par définition du projecteur :

$$\boxed{p(v) = v}.$$

Reprenons la notation  $w_j = e_1 - e_j \in \text{Im } f - \text{id}$ . On a

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^n (e_1 - e_j) &= (n-1)e_1 - \sum_{j=2}^n e_j \\ &= (n-1)e_1 - (v - e_1) \\ &= ne_1 - v \end{aligned}$$

$$\text{D'où } e_1 = \underbrace{\frac{1}{n} v}_{\text{Ker } f - \text{id}} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=2}^n (e_1 - e_j)}_{\text{Im } f - \text{id}}$$

$$\text{On lit } p(e_1) = \frac{1}{n} v.$$

Puis pour tout  $j \in \llbracket 2; n \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} p(e_j) &= p(e_1 + e_j - e_1) \\ &= p(e_1) - p(e_1 - e_j) \\ &= \frac{1}{n} v + 0 \quad \text{car } e_j - e_1 \in \text{Im } f - \text{id}. \end{aligned}$$

En résumé

$$p(e_j) = \frac{1}{n} v.$$

- On en déduit que

$$P = \begin{bmatrix} 1/n & 1/n & 1/n & 1/n \\ 1/n & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1/n & 1/n & \cdots & 1/n \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

5. On a

$$p \circ q = q \circ p = 0 \quad \text{et} \quad q = \text{id} - p.$$

Ainsi

$$Q = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}) - \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) \\ = I_n - P.$$

Après simplifications

$$Q = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{bmatrix}.$$

6. On conjecture que 1 est valeur propre avec

$$\dim E_1(M) = 1$$

et aussi que  $-1/(n-1)$  est valeur propre avec

$$\dim E_{-1/(n-1)}(M) = n-1.$$

7. On a vu que

$$E_1 = \text{Ker } f - \text{id} = \text{Vect}(v).$$

Donc 1 est valeur propre. De plus, on constate que la matrice

$$M + \frac{1}{n-1} I_n$$

est de rang 1. D'où, par la formule du rang :

$$\begin{aligned} \dim \left( \text{Ker } f + \frac{1}{n-1} \text{id} \right) &= \dim \ker \left( M + \frac{1}{n-1} I_n \right) \\ &= n - \text{rg} \left( M + \frac{1}{n-1} I_n \right) \\ &= n-1 < n. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $-\frac{1}{n-1} \in \text{Sp}(f).$

Or en comptant les dimensions

$$\dim E_1(f) + \dim E_{-1/(n-1)}(f) = n.$$

On peut affirmer que il n'y a pas d'autre valeur propre. D'où

$$\text{Sp}(f) = \left\{ -\frac{1}{n-1}; 1 \right\}.$$

8. On vérifie que

$$M = P - \frac{1}{n-1} Q.$$

9.a) Un code possible est :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
def matriceM(n):
    A=1/(n-1)*np.ones([n,n])
    B=1/(n-1)*np.eye(n)
    return A-B
```

Si on veut éviter les matrices pré-programmées :

```
def matriceM(n):
    A=np.zeros([n,n])
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i!=j:
                A[i,j]=1

    return 1/(n-1)*A
```

9.b) On utilise le code précédent :

Ci-dessous le code qui a généré les graphes :

```
n=3
m=10
Mk11=np.zeros(m)
Mk12=np.zeros(m)
M=matriceM(n)
P=M
for k in range(m):
    Mk11[k]=P[0,0]
    Mk12[k]=P[0,1]
    P=np.dot(P,M)
plt.plot(np.arange(1,m+1),Mk11,'-*',label=
r'$M^k[1,1]$ pour n='+str(n))
plt.plot(np.arange(1,m+1),Mk12,'-*',label=
r'$M^k[1,2]$ pour n='+str(n))
plt.legend()
plt.show()
```

10.a) • Les matrices P et Q commutent, donc d'après la formule du binôme de Newton. Pour  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} M^k &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} P^i \left( -\frac{1}{n-1} \right)^{-i+k} Q^{-i+k} \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} P^i \left( -\frac{1}{n-1} \right)^{-i+k} Q^{k-i} + P^k + Q^k \left( -\frac{1}{n-1} \right)^k \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \left( -\frac{1}{n-1} \right)^{k-i} \underbrace{PQ}_{=0} + P^k + \left( -\frac{1}{n-1} \right)^k Q^k \end{aligned}$$

$$M^k = P + \left( -\frac{1}{n-1} \right)^k Q.$$

- Par passage à la limite

$$M^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} P.$$

Résultat cohérent avec la simulation python.

10.b) Testons si la formule précédente convient pour  $k = -1$ . Posons

$$B = P + \left( -\frac{1}{n-1} \right)^{-1} Q = P - (n-1)Q.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} MB &= \left( P - \frac{1}{(n-1)}Q \right) (P - (n-1)Q) \\ &= P^2 - (n-1)PQ - \frac{1}{(n-1)}QP + Q^2 \\ &= P + Q \\ MB &= I_n. \end{aligned}$$

De même

$$BM = I_n.$$

On vérifie ainsi que M est inversible et

$$M^{-1} = B = P - (n-1)Q.$$

11. Si  $M = (m_{ij})_{i,j}$ , on a

$$MV = M \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n m_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n m_{nj} \end{bmatrix}.$$

La matrice M est stochastique si et seulement si

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n m_{ij} = 1$$

si et seulement si

$$MV = V.$$

12.

```
import numpy as np

def stocha(M):

    [n,p]=np.shape(M)
    V=np.ones(n)
    N=sum(sum(M>=0))
    # Nombre de coefficients positifs

    if N==n**2 and sum(np.dot(M,V))==V==n:
        :
        print('Oui, la matrice est
              stochastique')
    else :
        print('Non, la matrice n est pas
              stochastique')
```

13. Soient  $P_1, P_2$  deux matrices stochastiques

$$(P_1 P_2)V = P_1 (P_2 V) = P_1 V = V,$$

donc la somme des coefficients sur chaque ligne vaut 1. Notons  $[M]_{ij}$  le coefficient de la matrice M en position  $(i, j)$ . Par définition du produit matriciel

$$[P_1 P_2]_{ij} = \sum_{k=1}^n \underbrace{[P_1]_{ik}}_{\geq 0} \underbrace{[P_2]_{kj}}_{\geq 0} \geq 0.$$

La matrice  $P_1 P_2$  a donc tous ses coefficients positifs. La matrice  $P_1 P_2$  est donc une matrice stochastique.

$$\mathcal{S}_n \text{ est stable par produit.}$$

14.a) Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Posons

$$f(x) = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Par définition de  $M = (m_{ij})$ , on a pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$y_i = \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j$$

Par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |y_i| &\leq \sum_{j=1}^n |m_{ij}| \cdot |x_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^n m_{ij} \cdot \|x\|. \\ &\leq 1 \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

Cette inégalité étant vraie pour tout indice  $i$

$$\|f(x)\| = \max_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket} |y_j| \leq \|x\|.$$

14.b) Soit  $\lambda \in \text{Sp}(f)$ . Il existe donc un vecteur  $x$  non nul tel que

$$f(x) = \lambda x.$$

L'inégalité précédente donne alors

$$|\lambda| \cdot \|x\| = \|f(x)\| \leq \|x\|.$$

Comme  $x$  est non nul,  $\|x\| > 0$  et  $|\lambda| \leq 1$ . D'où le résultat.

15. Calculons les premières puissances

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - x + x = y + x. \\ f^2(x) &= f(f(x)) = f(y) + f(x) \\ &= y + f(x) \\ &= y + y + x = 2y + x. \\ f^3(x) &= f(f^2(x)) = f(2y + x) \\ &= 2f(y) + f(x) \\ &= 2y + x + y = 3y + x. \end{aligned}$$

On conjecture puis on montre par récurrence que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

$$f^k(x) = ky + x.$$

$$\text{De plus} \quad \|x + ky\| = \|f^k(x)\| \leq \|x\|.$$

Par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} -\|x\| + k\|y\| &\leq \|x\| \\ \text{D'où} \quad k\|y\| &\leq 2\|x\|. \end{aligned}$$

Si  $\|y\| \neq 0$ , alors

$$k\|y\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty,$$

absurde d'après l'inégalité précédente. Donc  $\|y\| = 0$ , c'est-à-dire

$$y = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

16. On vient de montrer que

$$\text{Im}(f - \text{id}) \cap \text{Ker}(f - \text{id}) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$$

De plus, par la formule du rang :

$$\dim \text{Im}(f - \text{id}) + \dim \text{Ker}(f - \text{id}) = \dim \mathbb{R}^n.$$

Les espaces sont bien supplémentaires.

17. Soit  $x \in \text{Im}(f - \text{id})$ . Il existe donc  $z \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$f(z) - z = x.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f(x) &= f(f(z)) - f(z) \\ &= f(w) - w \quad \text{où } w = f(z) \\ &\in \text{Im } f - \text{id}. \end{aligned}$$

Soit  $\lambda \neq 1$ , une valeur propre de  $f$ . Soit  $x \in \ker(f - \lambda \text{id})$ . On a  $f(x) = \lambda x$  puis

$$\begin{aligned} \lambda x - x &= f(x) - x \\ \text{puis } (\lambda - 1)x &= f(x) - x \\ x &= f\left(\frac{1}{\lambda - 1}x\right) - \frac{1}{\lambda - 1}x \\ &\in \text{Im } f - \text{id}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

18.a) À la lecture de l'énoncé, on a pour  $i \neq j$

$$\mathbf{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1}=j) = \frac{1}{n-1},$$

et pour  $i = j$ ,

$$\mathbf{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1}=j) = 0$$

car le mobile ne reste pas sur le même sommet. Ce sont précisément les coefficients de la matrice  $\mathbf{M}$  étudiée dans la partie A. Plus généralement, en utilisant la formule des probabilités totales, on montre par récurrence que

$$\mathbf{P}(X_k = j \mid X_0 = i) = [\mathbf{M}^k]_{i,j}.$$

18.b) D'après la question 10,

$$\mathbf{M}^k = \mathbf{P} + \left(-\frac{1}{n-1}\right)^k \mathbf{Q},$$

avec

$$\mathbf{P} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{I}_n - \mathbf{P}.$$

Le coefficient diagonal de  $\mathbf{P}$  vaut  $\frac{1}{n}$  et celui de  $\mathbf{Q}$  vaut  $1 - \frac{1}{n}$ . Ainsi

$$\mathbb{P}(X_k = i \mid X_0 = i) = [\mathbf{M}^k]_{i,i} = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n-1}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Si  $j \neq i$ , le coefficient  $(i, j)$  de  $\mathbf{P}$  vaut  $\frac{1}{n}$  et celui de  $\mathbf{Q}$  vaut  $-\frac{1}{n}$ . Par conséquent,

$$\mathbf{P}(X_k = j \mid X_0 = i) = [\mathbf{M}^k]_{i,j} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \left(-\frac{1}{n-1}\right)^k.$$

### Problème 2

adapté de Essec 2013

1. La fonction nulle est continue et bornée. Elle appartient à  $E_0$  qui est donc non vide.

Soient  $f, g \in E_0$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Les fonctions  $f$  et  $g$  sont continues par combinaison linéaire, donc  $\lambda f + g$  est aussi continue. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq N_0(f) \quad \text{et} \quad |g(x)| \leq N_0(g).$$

D'où, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |(\lambda f + g)(x)| &= |\lambda f(x) + g(x)| \\ &\leq |\lambda| |f(x)| + |g(x)| \\ &\leq |\lambda| N_0(f) + N_0(g). \end{aligned}$$

Donc la fonction  $\lambda f + g$  est bornée. Il vient  $\lambda f + g \in E_0$ .

Concluons :

$E_0$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

2. Cours.

3.a) Soient  $f \in E_0$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $t \in [0, +\infty[$ ,

$$\left| \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{N_0(f)}{1+t^2}.$$

Car la fonction arctangente est minorée et majorée par  $-\pi/2$  et  $\pi/2$ . Or, pour  $A \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\int_0^A \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^A \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}.$$

En particulier,  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$  est convergente. Par le critère de comparaison, on en déduit la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \left| \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} \right| dt.$$

Par conséquent

$$\int_0^{+\infty} \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} dt$$

est absolument convergente.

3.b) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . À l'aide de l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |\Phi(f)(x)| &= \left| \int_0^{+\infty} \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} dt \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left| \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} \right| dt \\ &\leq \frac{\pi}{2} N_0(f) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{\pi^2}{4} N_0(f). \end{aligned}$$

En reprenant le calcul de la question précédente.

4. Par linéarité puis par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} &|[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x)| \\ &= \left| \int_0^{+\infty} (\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)) \frac{f(t)}{1+t^2} dt \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left| (\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)) \frac{f(t)}{1+t^2} \right| dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} |\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)| \frac{N_0(f)}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

D'où le résultat à l'aide de la relation de Chasles.

**5.a)** C'est une conséquence de l'inégalité des accroissements finis sachant que la fonction arctangente est dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec pour tout  $t \in \mathbb{R}$

$$|\arctan'(t)| = \frac{1}{1+t^2} \leq 1.$$

**5.b)** Soient  $A \in \mathbb{R}_*^+$  et  $h \in \mathbb{R}^*$ . Soit  $t \in \mathbb{R}^+$ .

Distinguons deux cas :  $t \leq A$  et  $t \geq A$ .

- Pour  $t \in [0, A]$ , d'après la question précédente

$$|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)| \leq |t(x+h) - tx| \leq |th| \leq t|h|$$

Par division par  $1+t^2 > 0$  et par croissance de l'intégrale

$$\int_0^A \frac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2} dt \leq \int_0^A |h| \frac{t}{1+t^2} dt.$$

- Pour  $t \in [A; +\infty[$ , on a par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} & |\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)| \\ & \leq |\arctan(t(x+h))| + |\arctan(tx)| \\ & \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \leq \pi. \end{aligned}$$

De nouveau, par croissance de l'intégrale

$$\int_A^{+\infty} \frac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2} dt \leq \pi \int_A^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

On obtient alors le résultat demandé en reprenant l'inégalité de la question 3.b).

**6.a)** Posons

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan(x) + \arctan(1/x). \end{cases}$$

Comme la fonction arctangente est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et la fonction inverse  $x \mapsto 1/x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ , la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  par somme et composition. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{1+(1/x)^2} = 0.$$

La fonction  $f$  est constante sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ . Finalement, on obtient pour tout  $\alpha > 0$ .

$$\boxed{\arctan(\alpha) + \arctan(1/\alpha) = \pi/2.}$$

*Attention. Pourtant la fonction  $f$  n'est pas constante sur  $\mathbb{R}^*$  qui n'est pas un intervalle.*

$$f(1) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad f(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\left( \text{car } \arctan(1) = -\arctan(-1) = \frac{\pi}{4} \right).$$

**6.b)** Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^+$ ,

$$\begin{aligned} \int_{1/\alpha}^{\beta} \frac{dt}{1+t^2} &= [\arctan(t)]_{1/\alpha}^{\beta} \\ &= \arctan(\beta) - \arctan(1/\alpha). \end{aligned}$$

Par passage à la limite  $\beta \rightarrow +\infty$ , on prouve la convergence et l'égalité

$$\boxed{\int_{1/\alpha}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan(1/\alpha) = \arctan(\alpha).}$$

**7.a)** Soit  $h \in \mathbb{R}$ . On a

$$\begin{aligned} |h| \ln \left( 1 + \frac{1}{h^2} \right) &= |h| \left( \ln(1+h^2) - \ln(h^2) \right) \\ &= |h| \ln(1+h^2) - 2|h| \ln|h|. \end{aligned}$$

Par produit,

$$|h| \ln(1+h^2) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$$

et par les croissances comparées

$$2|h| \ln|h| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Par différence

$$\boxed{|h| \ln \left( 1 + \frac{1}{h^2} \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.}$$

**7.b)** Par continuité de la fonction arctangente

$$\arctan|h| \xrightarrow{h \rightarrow 0} \arctan(0) = 0.$$

Par combinaison linéaire

$$\frac{N_0(f)}{2} |h| \ln \left( 1 + \frac{1}{h^2} \right) + \pi N_0(f) \arctan|h| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

En utilisant l'inégalité de la question précédente et le théorème d'encadrement, on prouve l'existence de la limite et l'égalité

$$\lim_{h \rightarrow 0} [\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)] = 0$$

Ce qu'on peut réécrire

$$\lim_{h \rightarrow 0} [\Phi(f)](x+h) = [\Phi(f)](x).$$

C'est la définition de la continuité de  $\Phi(f)$  en  $x$ . Ce résultat étant valable pour tout réel  $x$

$$\boxed{\Phi(f) \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

**7.c)** Résumons, pour tout  $f \in E_0$  :

- $\Phi(f)$  est continue;
- $\Phi(f)$  est bornée.

Ainsi  $\Phi(f) \in E_0$ . Comme  $\Phi$  est linéaire

$$\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } E_0.}$$

**8.** Soit  $\lambda \in \text{Sp}(\Phi)$ . Soit  $f$  un vecteur propre associé

$$f \neq 0 \quad \text{et} \quad \Phi(f) = \lambda f.$$

On a d'après la question 3.b)

$$N_0(\Phi(f)) \leq \frac{\pi^2}{4} N_0(f).$$

Or  $|\lambda| N_0(f) = N_0(\lambda f) = N_0(\Phi(f))$ . Ainsi

$$|\lambda| N_0(f) \leq \frac{\pi^2}{4} N_0(f).$$

Comme  $f \neq 0$ ,  $N_0(f) \neq 0$  et

$$|\lambda| \leq \frac{\pi^2}{4}.$$

D'où le résultat.

9. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} \lambda \Phi(\varphi_n) &= \lambda \Phi(\lambda^n \Phi^n(f)) \\ &= \lambda \cdot \lambda^n \Phi \circ \Phi^n(f) \quad \Phi \text{ est linéaire} \\ &= \lambda^{n+1} \Phi^{n+1}(f) \quad \text{par définition} \\ &= \varphi_{n+1}. \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} N_0(\varphi_{n+1}) &= N_0(\lambda \Phi(\varphi_n)) \\ &= |\lambda| N_0(\Phi(\varphi_n)) \\ &\leq |\lambda| \cdot \frac{\pi^2}{4} N_0(\varphi_n) \\ &\leq \gamma N_0(\varphi_n). \end{aligned}$$

10. Supposons qu'il existe une fonction  $f \in E$  telle que  $\lambda \Phi(f) = f$ . Par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_n = f.$$

Or on a vu d'après la question précédente

$$N_0(f) = N_0(\varphi_n) \leq \gamma^n N_0(f).$$

Comme  $|\lambda| < 4/\pi^2$ ,  $\gamma \in ]-1; 1[$   $\gamma^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Par encadrement,

$$N_0(f) = 0.$$

La fonction  $f$  est alors la fonction nulle. Réciproquement, la fonction nulle est solution. On peut retraduire ce résultat avec

$$\ker(\text{id}_{E_0} - \lambda \Phi) = \{0_E\}$$

Autrement dit, l'endomorphisme

$$\text{id}_{E_0} - \lambda \Phi \text{ est injectif.}$$

*Remarque.* Comme on est en dimension infinie, on ne peut rien en conclure sur la surjectivité de l'application  $\text{id}_{E_0} - \lambda \Phi$ .

11. Par récurrence et en utilisant la seconde inégalité de la question 9, on montre que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq N_0(\varphi_n) \leq \gamma^n N_0(\varphi_0) = \gamma^n N_0(f) = \gamma^n M.$$

Or la série géométrique  $\sum \gamma^n$  est convergente puisque  $\gamma \in ]-1; 1[$ , par le critère de comparaison de nouveau, on en déduit que

$$\text{La convergence de la série } \sum N_0(\varphi_n).$$

De nouveau, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|\varphi_n(x)| \leq N_0(\varphi_n).$$

Le critère de comparaison s'applique pour justifier la convergence de la série. Concluons :

$$\text{La convergence de } \sum \varphi_n(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

12. Le résultat admis se traduit par :

$$\text{id}_{E_0} - \lambda \Phi \text{ est surjectif.}$$

13. Pour  $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\Phi - \mu \text{id}_{E_0} = -\mu \left( \text{id}_{E_0} - \frac{1}{\mu} \Phi \right).$$

Dès lors,  $\Phi - \mu \text{id}_{E_0}$  n'est pas bijectif si et seulement si  $\text{id}_{E_0} - \frac{1}{\mu} \Phi$  n'est pas bijectif. Or, en regroupant les questions 27 et 29, on a montré que si

$$\left| \frac{1}{\mu} \right| < \frac{4}{\pi^2} \quad \left( |\mu| > \frac{\pi^2}{4} \right)$$

alors  $\text{id}_{E_0} - \frac{1}{\mu} \Phi$  est bijective. Par contraposée si  $\Phi - \mu \text{id}_{E_0}$  n'est pas bijective, alors

$$|\mu| \leq \frac{\pi^2}{4}.$$

14. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Comme la fonction arctangente est impaire :

$$g(-x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(-tx)}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} -\frac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt = -g(x).$$

$$\text{La fonction } g \text{ est impaire.}$$

15. Soit  $x \in \mathbb{R}_*^+$

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{4} - g(x) &= \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan(tx) \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) dt. \end{aligned}$$

15.a) Pour tout  $x > 0$ , on a

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Ainsi,

$$\frac{\pi^2}{4} - g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(tx)}{1+t^2} dt.$$

Or, pour  $t > 0$ , comme  $tx > 0$ ,

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(tx) = \arctan\left(\frac{1}{tx}\right).$$

On obtient donc

$$\frac{\pi^2}{4} - g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) dt.$$

Effectuons maintenant le changement de variable  $u = tx$ . Alors

$$t = \frac{u}{x} \quad \text{et} \quad dt = \frac{du}{x}.$$

Il vient

$$\frac{\pi^2}{4} - g(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{u}\right)}{x^2 + u^2} du.$$

En renommant la variable d'intégration,

$$\frac{\pi^2}{4} - g(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{x^2 + t^2} dt.$$

**15.b)** Découpons l'intégrale précédente en 0, 1 et  $+\infty$  :

$$\frac{\pi^2}{4} - g(x) = x \int_0^1 \frac{\arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{x^2 + t^2} dt + x \int_1^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{x^2 + t^2} dt.$$

Les deux intégrales sont positives, donc

$$0 \leq \frac{\pi^2}{4} - g(x).$$

Pour  $t \in ]0; 1]$ ,

$$0 \leq \arctan\left(\frac{1}{t}\right) \leq \frac{\pi}{2}$$

et  $x^2 + t^2 \geq x^2$ . Ainsi

$$x \int_0^1 \frac{\arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{x^2 + t^2} dt \leq x \int_0^1 \frac{\pi/2}{x^2} dt = \frac{\pi}{2x}.$$

Pour  $t \geq 1$ , comme  $\arctan(u) \leq u$  (question 5.a) avec  $x = u$ ,  $y = 0$  pour tout  $u \geq 0$ ,

$$\arctan\left(\frac{1}{t}\right) \leq \frac{1}{t}.$$

Par conséquent,

$$x \int_1^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{x^2 + t^2} dt \leq x \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(x^2 + t^2)}.$$

Or

$$\frac{1}{t(x^2 + t^2)} = \frac{1}{x^2} \left( \frac{1}{t} - \frac{t}{x^2 + t^2} \right).$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(x^2 + t^2)} &= \frac{1}{x^2} \left[ \ln t - \frac{1}{2} \ln(x^2 + t^2) \right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2x^2} \ln(1 + x^2). \end{aligned}$$

Ainsi

$$x \int_1^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{x^2 + t^2} dt \leq \frac{\ln(1 + x^2)}{2x}.$$

Finalement,

$$0 \leq \frac{\pi^2}{4} - g(x) \leq \frac{\pi}{2x} + \frac{\ln(1 + x^2)}{2x}.$$

**15.c)** On a

$$\frac{\pi}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

et, par croissance comparée,

$$\frac{\ln(1 + x^2)}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Par encadrement,

$$\frac{\pi^2}{4} - g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{4}.$$

**16.** Soit  $x \in \mathbb{R}_*^+$ . La fonction  $f : t \mapsto \ln(t)/(t^2 - 1)$  est continue sur  $]0; x] \setminus \{1\}$ .

• *Étude en 0.*

On a

$$f(t) \sim -\ln(t).$$

et par le critère d'équivalence pour des fonctions positives ( $\int_0^{1/2} \ln(t) dt$  est intégrale convergente). L'intégrale  $\int_0^{1/2} f(t) dt$  est convergente en 0.

• *Étude en 1.*

De plus

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\ln(t)}{t-1} \cdot \frac{1}{t+1} \\ &= \frac{\ln(1 + (t-1))}{t-1} \cdot \frac{1}{t+1} \\ &\sim \frac{1}{t+1} \sim \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La fonction  $f$  est prolongeable par continuité en 1. L'intégrale  $\int_1^x f(t) dt$  est donc faussement impropre, elle converge.

Finalement :

$$\int_0^x \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt \text{ converge.}$$

**17.** On vérifie que

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 = g(0).$$

La fonction  $g$  est continue en 0.

Soit  $x \in \mathbb{R}_*^+$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ . Comme  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$ , par le théorème fondamental de l'analyse

$$g(x) - g(\alpha) = \int_\alpha^x g'(t) dt = \int_\alpha^x \frac{\ln(t)}{t^2 - 1} dt.$$

Par passage à la limite (les convergences ont été prouvées précédemment) avec  $\alpha \rightarrow 0$ ,

$$g(x) - g(0) = \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2 - 1} dt.$$

D'où le résultat.

**18.** On a vu à la question 16

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\pi^2}{4} \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt = \frac{\pi^2}{4}.$$

Cela prouve la convergence de  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt$  et l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt = \frac{\pi^2}{4}.$$

Puis

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1 - t^2} dt = -\frac{\pi^2}{4}.$$

19. Comme indiqué, on effectue le changement de variable  $u = 1/t$  strictement décroissant de  $[1; +\infty[$  dans  $]0; 1]$  et de classe  $\mathcal{C}^1$ . L'intégrale obtenue est convergente et

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2} dt &= \int_1^0 \frac{\ln \frac{1}{u}}{1-\frac{1}{u^2}} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du \\ &= \int_0^1 \frac{-\ln u}{u^2-1} du \\ &= \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u^2} du\end{aligned}$$

On conclut à l'aide de la relation de Chasles

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2} dt &= \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt + \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u^2} du \\ &= 2 \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt.\end{aligned}$$

20. Soit  $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

$$\sum_{k=0}^n t^{2k} = \frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2} \iff \frac{1}{1-t^2} = \sum_{k=0}^n t^{2k} + \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}.$$

En effet, on reconnaît une somme géométrique de raison  $t^2 \neq 1$ . D'où

$$\frac{\ln t}{1-t^2} = \sum_{k=0}^n (\ln t) t^{2k} + \frac{\ln t}{1-t^2} t^{2n+2}.$$

Par intégration, on obtient le résultat demandé.

21. Soient  $A, B \in ]0; 1[$ . Procédons par une intégration par parties en considérant les fonctions  $u$  et  $v$  (de classe  $\mathcal{C}^1$ ) définies sur  $[A; B]$  par

$$u(t) = \ln(t) \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{t^{2n+1}}{2n+1}.$$

On obtient

$$\begin{aligned}&\int_A^B (\ln t) t^{2n} dt \\ &= \left[ \ln t \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_A^B - \int_A^B \frac{t^{2n+1}}{t(2n+1)} dt \\ &= \frac{1}{2n+1} (\ln(B) B^{2n+1} - \ln(A) A^{2n+1}) - \int_A^B \frac{t^{2n}}{2n+1} dt \\ &= \frac{1}{2n+1} (\ln(B) (B)^{2n+1} - \ln(A) A^{2n+1}) - \left[ \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)^2} \right]_A^B \\ &= \frac{1}{2n+1} (\ln(B) B^{2n+1} - \ln(A) A^{2n+1}) - \frac{1}{(2n+1)^2} (B^{2n+1} - A^{2n+1})\end{aligned}$$

Lorsque  $A \rightarrow 0^+$  et  $B \rightarrow 1^-$ , il vient

$$\int_0^1 (\ln t) t^{2n} dt = -\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

22. Posons pour tout  $t \in ]0; 1[$

$$h(t) = \frac{t^2 \ln(t)}{1-t^2}.$$

Par les croissances comparées

$$h(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0.$$

De plus, en reprenant l'équivalent de la question 16

$$h(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} -\frac{1}{2}.$$

La fonction  $h$  est continue sur  $]0; 1[$  et prolongeable par continuité en 0 et 1. La fonction  $h$  est donc bornée sur  $[0; 1]$  : il existe  $K \in \mathbb{R}^+$  tel que

$$\forall t \in ]0; 1[, \quad |h(t)| \leq K.$$

Puis

$$\forall t \in ]0; 1[, \quad \left| \frac{\ln(t)}{1-t^2} t^{2n+2} \right| \leq K t^{2n}.$$

Par croissance de l'intégrale

$$\left| \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2} t^{2n+2} dt \right| \leq K \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{K}{2n+1}.$$

Comme  $K/(2n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , on termine par encadrement

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2} t^{2n+2} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

23. En reprenant les questions précédentes :

$$\begin{aligned}-\frac{\pi^2}{8} &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt \\ &= - \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} + \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} t^{2n+2} dt.\end{aligned}$$

Par passage à la limite

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

• En distinguant les indices pairs et impairs

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

$$\text{D'où} \quad \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

• Et l'on conclut ce sujet par

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

24.a) Posons  $f = \arctan$ . On a

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

De plus,

$$2|x| \leq 1+x^2,$$

donc

$$|f''(x)| = \frac{2|x|}{(1+x^2)^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Par la formule de Taylor avec reste de Lagrange, il existe un réel  $c$  appartenant au segment  $I$  d'extrémités  $a$  et  $b$  tel que

$$\arctan b - \arctan a = \frac{b-a}{1+a^2} + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c).$$

Par conséquent,

$$\left| \arctan b - \arctan a - \frac{b-a}{1+a^2} \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \max_{u \in I} \left( \frac{1}{1+u^2} \right).$$

**24.b)** On applique la question précédente avec

$$a = tx \quad \text{et} \quad b = t(x+h).$$

On obtient

$$\left| \arctan(t(x+h)) - \arctan(tx) - \frac{th}{1+t^2x^2} \right| \leq \frac{t^2h^2}{2} \max_{u \in I} \frac{1}{1+u^2}.$$

Comme

$$|h| < \frac{x}{2},$$

on a

$$x+h > \frac{x}{2}.$$

Les deux extrémités  $tx$  et  $t(x+h)$  sont donc supérieures ou égales à  $\frac{tx}{2}$ . Ainsi, pour tout  $u \in I$ ,

$$u \geq \frac{tx}{2}.$$

Par décroissance de  $u \mapsto \frac{1}{1+u^2}$  sur  $\mathbb{R}_+$ ,

$$\max_{u \in I} \frac{1}{1+u^2} \leq \frac{1}{1+\frac{t^2x^2}{4}}.$$

D'où

$$\left| \arctan(t(x+h)) - \arctan(tx) - \frac{th}{1+t^2x^2} \right| \leq \frac{t^2h^2}{2} \frac{1}{1+\frac{t^2x^2}{4}}.$$

**24.c)** On a

$$g(x+h) - g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)}{1+t^2} dt.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \left| g(x+h) - g(x) - h \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt \right| \\ & \leq \int_0^{+\infty} \frac{\left| \arctan(t(x+h)) - \arctan(tx) - \frac{th}{1+t^2x^2} \right|}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} & \left| g(x+h) - g(x) - h \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt \right| \\ & \leq \frac{h^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+\frac{t^2x^2}{4}} \frac{dt}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{1+\frac{t^2x^2}{4}} = \frac{4}{4+t^2x^2}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} & \left| g(x+h) - g(x) - h \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt \right| \\ & \leq 2h^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(4+t^2x^2)(1+t^2)} dt. \end{aligned}$$

**24.d)** Pour  $x > 0$ , l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(4+t^2x^2)(1+t^2)} dt$$

est convergente.

En divisant l'inégalité précédente par  $|h|$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt \right| \\ & \leq 2|h| \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(4+t^2x^2)(1+t^2)} dt. \end{aligned}$$

Le membre de droite tend vers 0 lorsque  $h$  tend vers 0.

Ainsi  $g$  est dérivable en  $x$  et

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt.$$

Ce résultat étant valable pour tout  $x > 0$ ,  $g$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

**25.** On a montré à la question 14 que  $g$  est impaire.

Soit  $x < 0$ . Comme  $-x > 0$ , la fonction  $g$  est dérivable en  $-x$  et

$$g(x) = -g(-x).$$

On en déduit que  $g$  est dérivable en  $x$  avec

$$g'(x) = g'(-x).$$

Ainsi  $g'$  est paire sur  $\mathbb{R}^*$ .

En particulier, pour  $x < 0$  et  $x \neq -1$ ,

$$g'(x) = \frac{\ln(-x)}{x^2-1}.$$

De plus,

$$g'(-1) = g'(1) = \frac{1}{2}.$$

**26.a)** On cherche  $A(x)$  et  $B(x)$  tels que

$$\frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} = A(x) \frac{t}{1+t^2x^2} + B(x) \frac{t}{1+t^2}.$$

Après réduction au même dénominateur, il suffit d'avoir

$$1 = A(x)(1+t^2) + B(x)(1+t^2x^2).$$

Par identification,

$$\begin{cases} A(x) + B(x) = 1, \\ A(x) + x^2B(x) = 0. \end{cases}$$

Comme  $x \neq 1$ , on obtient

$$A(x) = \frac{x^2}{x^2-1} \quad \text{et} \quad B(x) = -\frac{1}{x^2-1}.$$

Ainsi

$$\frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} = \frac{x^2}{x^2-1} \frac{t}{1+t^2x^2} - \frac{1}{x^2-1} \frac{t}{1+t^2}.$$

**26.b)** Soit  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ , et  $A > 0$ . D'après la question précédente,

$$\int_0^A \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt = \frac{x^2}{x^2-1} \int_0^A \frac{t}{1+t^2x^2} dt - \frac{1}{x^2-1} \int_0^A \frac{t}{1+t^2} dt.$$

Or

$$\int_0^A \frac{t}{1+t^2x^2} dt = \frac{1}{2x^2} \ln(1+x^2A^2)$$

et

$$\int_0^A \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \ln(1+A^2).$$

Ainsi

$$\int_0^A \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt = \frac{1}{2(x^2-1)} \ln\left(\frac{1+x^2A^2}{1+A^2}\right).$$

Lorsque  $A \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{1+x^2A^2}{1+A^2} \rightarrow x^2.$$

Comme  $x > 0$ ,

$$g'(x) = \frac{\ln(x^2)}{2(x^2-1)} = \boxed{\frac{\ln x}{x^2-1}}.$$

Pour  $x = 1$ ,

$$g'(1) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt = \left[ -\frac{1}{2(1+t^2)} \right]_0^{+\infty} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

On retrouve donc bien les relations  $(\star)$  :

$$\boxed{g'(x) = \frac{\ln x}{x^2-1} \quad \text{pour } x \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[}$$

et

$$\boxed{g'(1) = \frac{1}{2}}.$$